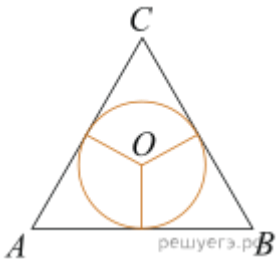
Демонстрационный вариант переводного экзамена по профильной математике в 10 классе 2023-2024 учебный год

1. Тип 1 № 27934



Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 5, основание равно 6. Найдите радиус вписанной окружности.

Решение. Радиус вписанной окружности равен отношению площади к полупериметру. Для нахождения площади, воспользуемся формулой Герона:

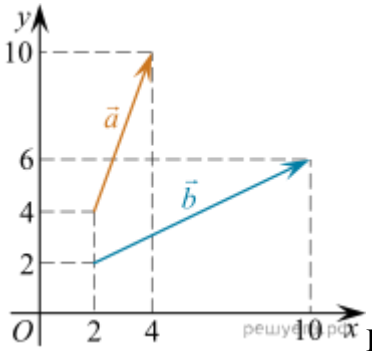
$$S_{ABC} = = \sqrt{\frac{P_{ABC}}{2}\left(\frac{P_{ABC}}{2} - AB\right)\left(\frac{P_{ABC}}{2} - BC\right)\left(\frac{P_{ABC}}{2} - AC\right)} = \\ = \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{16 \cdot 9} = 12.$$

Тогда

$$r = \frac{S}{p} = \frac{12}{8} = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

2. Тип 2 № 27738



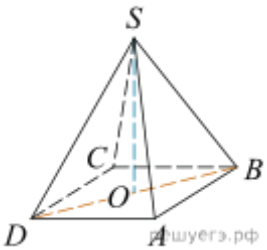
Найдите сумму координат вектора $\vec{a} - \vec{b}$.

Решение. Координаты вектора равны разности координат конца вектора и его начала. Поэтому вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(2;\ 6)$, вектор $\vec{b}$ имеет координаты $(8;\ 4)$.

Координаты разности векторов равны разности соответствующих координат. Тогда вектор $\vec{a} - \vec{b}$ имеет координаты $(-6;\ 2)$, их сумма равна -4.

Ответ: −4.

3. Тип 3 № 911



В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* точка *O* − центр основания, *S* − вершина, $SO = 15, BD = 16$. Найдите боковое ребро SA.

Решение. В правильной пирамиде вершина проецируется в центр основания, следовательно, *SO* является высотой пирамиды. тогда по теореме Пифагора

$$SA = SB = \sqrt{SO^2 + BO^2} = = \sqrt{SO^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = \sqrt{225 + 64} = 17.$$

Ответ: 17.

4. Тип 4 № 320190

На борту самолёта 12 кресел расположены рядом с запасными выходами и 18 — за перегородками, разделяющими салоны. Все эти места удобны для пассажира высокого роста. Остальные места неудобны. Пассажир В. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру В. достанется удобное место, если всего в самолёте 300 мест.

Решение. В самолете $12 + 18 = 30$ мест удобны пассажиру В., а всего в самолете 300 мест. Поэтому вероятность того, что пассажиру В. достанется удобное место равна $30 : 300 = 0{,}1$.

Ответ: 0,1.

5. Тип 5 № 320210

Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

Решение. Вероятность того, что батарейка исправна, равна 0,94. Вероятность произведения независимых событий (обе батарейки окажутся исправными) равна произведению вероятностей этих событий: 0,94·0,94 = 0,8836.

Ответ: 0,8836.

6. Тип 6 № 26669

Найдите корни уравнения: $\cos\frac{\pi(x-7)}{3}=\frac{1}{2}$. В ответ запишите наибольший отрицательный корень.

Решение. Последовательно получаем:

$$\cos\frac{\pi(x-7)}{3}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\pi(x-7)}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-7=\pm1+6n\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=8+6n;\\x=6+6n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Значениям $n\geqslant 0$ соответствуют положительные корни.

Если $n=-1$, то $x=2$ и $x=0$.

Если $n=-2$, то $x=8-12=-4$ и $x=6-12=-6$.

Значениям $n\leqslant -3$ соответствуют меньшие значения корней.

Следовательно, наибольшим отрицательным корнем является число -4.

Ответ: −4.

7. Тип 7 № 26785

i

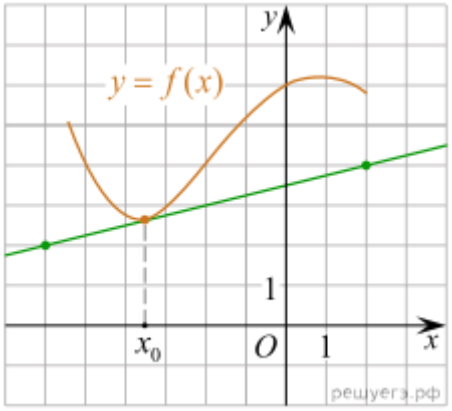
Найдите $26\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\cos\alpha=\frac{12}{13}$ и $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$.

Решение. Поскольку угол α лежит в четвертой четверти, $\sin\alpha<0$. Применим формулу приведения, а затем выразим синус через косинус. Имеем:

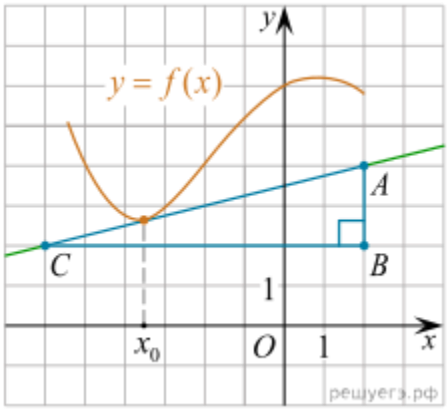
$$26\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=26\sin\alpha=-26\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=-26\cdot\frac{5}{13}=-10.$$

Ответ: −10

8. Тип 8 № 27504



На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A\,(2;\,4)$, $B\,(2;\,2)$, $C\,(-6;\,2)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу ABC. Поэтому

$$y'(x_0) = \operatorname{tg}\angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{8} = 0,25.$$

Ответ: 0,25

9. Тип 9 № 28012

Груз массой 0,08 кг колеблется на пружине. Его скорость υ меняется по закону $\upsilon = \upsilon_0 \sin\frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 12$ с — период колебаний, $\upsilon_0 = 0,5$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{m\upsilon^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, υ — скорость груза в м/с.

Найдите кинетическую энергию груза через 1 секунду после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Решение. Найдем скорость груза через 1 секунду после начала колебаний:

$$\upsilon = \upsilon_0 \sin\frac{2\pi t}{T} = 0,5 \cdot \sin\frac{2\pi \cdot 1}{12} = = 0,5 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25 \text{ м/с}$$

Найдем кинетическую энергию груза через 1 секунду после начала колебаний:

$$E = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{0,08 \cdot 0,25^2}{2} = 0,0025$$

Ответ: 0,002

10. Тип 10 № 99577

Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

Решение. Пусть масса 30-процентного раствора кислоты – m_1кг, а масса 60-процентного – m_2. Если смешать 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавить 10кг чистой воды, получится 36-процентный раствор кислоты: $0,3m_1 + 0,6m_2 = 0,36(m_1 + m_2 + 10)$. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты: $0,3m_1 + 0,6m_2 + 0,5 \cdot 10 = 0,41(m_1 + m_2 + 10)$. Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,3m_1 + 0,6m_2 = 0,36m_1 + 0,36m_2 + 3,6, \\ 0,3m_1 + 0,6m_2 + 5 = 0,41m_1 + 0,41m_2 + 4,1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

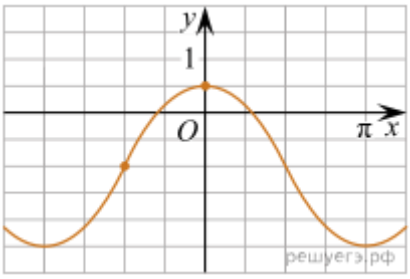
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,24m_2 - 0,06m_1 = 3,6, \\ 0,11m_1 - 0,19m_2 = 0,9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m_2 - m_1 = 60, \\ 11m_1 - 19m_2 = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 4m_2 - 60, \\ 11(4m_2 - 60) - 19m_2 = 90 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 4m_2 - 60, \\ 25m_2 = 750 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 60, \\ m_2 = 30. \end{cases}$$

Ответ: 60.

11. Тип 11 № 509123



На рисунке изображён график функции $f(x) = a\cos x + b$. Найдите a.

Решение. По графику, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, тогда

$$a\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + b = -1 \;\Leftrightarrow\; a\cdot 0 + b = -1 \;\Leftrightarrow\; b = -1.$$

Далее, по графику, $f(0) = 0{,}5$, тогда

$$a\cos 0 - 1 = 0{,}5 \;\Leftrightarrow\; a\cdot 1 - 1 = 0{,}5 \;\Leftrightarrow\; a = 1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

12. Тип 12 № 245174

Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 - 6x + 11}$.

Решение. Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ с положительным старшим коэффициентом достигает минимума в точке $x_{min} = -\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке 3. Поскольку функция $y = \sqrt{x}$ возрастающая, а заданная функция определена при найденном значении переменной, она достигает минимума в той же точке, в которой достигает минимума подкоренное выражение.

Ответ: 3.

13. Тип 13 № 485964

i

а) Решите уравнение $\sin x + \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) = 0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Используя формулу $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$, заменим выражение в скобках на $\cos x$, получаем однородное тригонометрическое уравнение первой степени:

$$\sin x+\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=0\Leftrightarrow \sin x+\cos x=0.$$

Если $\cos x=0$, то из уравнения следует $\sin x=0$, что невозможно в силу основного тригонометрического тождества. Значит, на множестве корней уравнения $\cos x\neq 0$. Разделим обе части уравнения на $\cos x$:

$$\operatorname{tg}x+1=0\Leftrightarrow \operatorname{tg}x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) Составим двойное неравенство: $\pi\leqslant -\frac{\pi}{4}+\pi k\leqslant \frac{5\pi}{2}$, откуда $\frac{5}{4}\leqslant k\leqslant 2\frac{3}{4}$. Следовательно, $k=2$. Поэтому на данном отрезке получаем единственный корень $-\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{7\pi}{4}$.

14. Тип 14 № 501752

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB=8$, $AD=7$, $AA_1=5$. Точка W принадлежит ребру DD_1 и делит его в отношении $1:4$, считая от вершины D.

а) Докажите, что сечение этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки C, W и A_1 — параллелограмм.

б) Найдите площадь этого сечения.

Решение. а) Отрезок CT параллелен A_1W (точка T принадлежит ребру BB_1). Плоскость сечения пересекает плоскость AA_1B_1 по прямой A_1T, параллельной CW, следовательно, искомое сечение — параллелограмм CTA_1W (рис. 1).

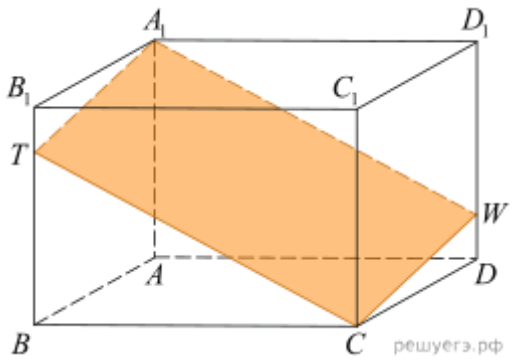


Рис. 1

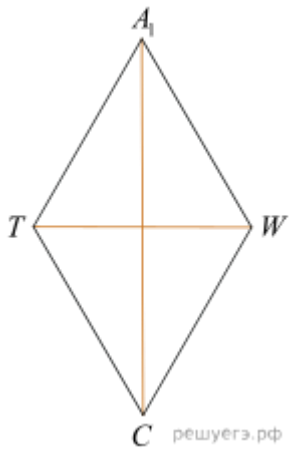


Рис. 2

б) Треугольники CBT и A_1D_1W равны, следовательно,

$$BT = D_1W = \frac{4}{5}DD_1 = 4,\ DW = DD_1 - D_1W = 1,$$

$$CT = \sqrt{BC^2 + BT^2} = \sqrt{65},\ CW = \sqrt{CD^2 + DW^2} = \sqrt{65},$$

Значит, CTA_1W — ромб со стороной $\sqrt{65}$ и диагональю $CA_1 = \sqrt{CB^2 + BA^2 + AA_1^2} = \sqrt{138}$ (рис. 2). Тогда диагональ

$$WT = 2\sqrt{CT^2 - \left(\frac{CA_1}{2}\right)^2} = = \sqrt{122},\ S_{CTA_1W} = \frac{CA_1 \cdot WT}{2} = \sqrt{4209}.$$

Ответ: $\sqrt{4209}$.

15. Тип 15 № 508367

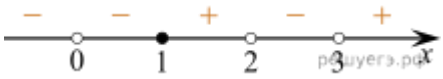
Решите неравенство: $\dfrac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 2x} + \dfrac{7x - 19}{x - 3} \leqslant \dfrac{8x + 1}{x}$.

Решение. Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 2x} + \frac{7x - 19}{x - 3} \leqslant \frac{8x + 1}{x} \Leftrightarrow\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x^2 - 2x} + 7 + \frac{2}{x - 3} - 8 - \frac{1}{x} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{x^2-2x}+\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x}\leqslant 0 \Leftrightarrow\Leftrightarrow -\frac{2}{x(x-2)}+\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x}\leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{x(x-3)(x-2)}\leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0, \\ 0<x\leqslant 1, \\ 2<x<3. \end{array}\right.$$



Ответ: $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 1]\cup(2;\ 3)$.

Ответ: $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 1]\cup(2;\ 3)$.

16. Тип 16 № 510103

15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение. Пусть начальная сумма кредита равна S_0, тогда переплата за первый месяц равна $\frac{r}{100}S_0$. По условию, ежемесячный долг перед банком должен уменьшиться равномерно. Этот долг состоит из двух частей: постоянной ежемесячной выплаты, равной $S_0/19$, и ежемесячной равномерно уменьшающейся выплаты процентов, равной

$$\frac{r}{100}S_0,\ \frac{18}{19}\cdot\frac{r}{100}S_0,\ \ldots,\ \frac{2}{19}\cdot\frac{r}{100}S_0,\ \frac{1}{19}\cdot\frac{r}{100}S_0.$$

Используя формулу суммы членов арифметической прогрессии, найдём полную переплату по кредиту:

$$\frac{r}{100}S_0\left(1+\frac{18}{19}+\ldots+\frac{2}{19}+\frac{1}{19}\right)==\frac{r}{100}S_0\cdot\frac{1+\frac{1}{19}}{2}\cdot 19=\frac{r}{10}S_0.$$

По условию общая сумма выплат на 30% больше суммы, взятой в кредит, тогда:

$$0,1rS_0=0,3S_0\Leftrightarrow r=3.$$

Ответ: 3.

Примечание Дмитрия Гущина.

Укажем общие формулы для решения задач этого типа. Пусть на n платежных периодов (дней, месяцев, лет) в кредит взята сумма S, причём каждый платежный период долг сначала возрастёт на r% по сравнению с концом предыдущего платежного периода, а затем вносится оплата так, что долг становится на одну и ту же сумму меньше долга на конец предыдущего платежного периода. Тогда величина переплаты П и полная величина выплат В за всё время выплаты кредита даются формулами

$$\text{П} = \frac{r}{100} \cdot \frac{n+1}{2} S_0, \qquad \text{В} = S_0 + \text{П} = S_0 \left(1 + \frac{r(n+1)}{200}\right).$$

В условиях нашей задачи получаем: $\frac{r(n+1)}{200} S_0 = 0,3 S_0,$ откуда для $n = 19$ находим $r = 3$.

Доказательство формул (для получения полного балла его нужно приводить на экзамене) немедленно следует из вышеприведённого решения задачи путём замены 19 месяцев на n месяцев и использовании формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии.

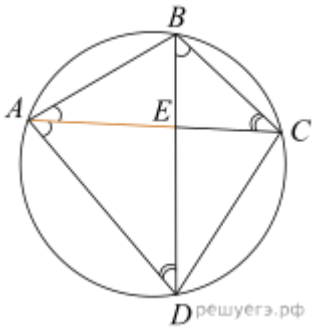
Ответ: 3.

17. Тип 17 № 621472

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке E. Известно, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

а) Докажите, что $AE \cdot AC = AD \cdot AB$.

б) Найдите AE, если известно, что $BC = 7$, $CE = 4$.



Решение. а) Углы BCA и BDA равны как вписанные углы, углы BAC и CAD равны по условию, следовательно, треугольники BAC и EAD подобны по двум углам. Значит,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} \Leftrightarrow AE \cdot AC = AB \cdot AD,$$

что и требовалось доказать.

б) Пусть $AE = x$. Углы DBC и DAC равны как вписанные углы, тогда треугольники ABC и BEC подобны по двум углам, откуда

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{EC} \Leftrightarrow AC = \frac{BC^2}{EC} = \frac{49}{4},$$

$$AE = AC - EC = \frac{49}{4} - 4 = \frac{33}{4}.$$

Ответ: $\frac{33}{4}$.