Многоуровневая система задач в целых числах (задача №18). Базовые задачи и приёмы решения

Максютин Алексей Алексеевич
К.п.н., Почётный работник образования РФ

1. Считать истинным только то, что с очевидностью познается таковым. Другими словами, научное исследование следует проводить без спешки и предубеждения в выводах, причем отчетливость и ясность должны быть на первом плане.
2. Каждую из рассматриваемых трудностей делить на столько частей, сколько требуется для лучшего разрешения.
3. Исследование всегда надо начинать с наиболее простых и легко познаваемых предметов и постепенно восходить, как по ступеням, до наиболее сложных предметов и явлений.
4. Делать всегда настолько полные перечни и общие обзоры (фактов, открытий, гипотез, систем), чтобы быть уверенным, что ничего не пропущено.
«Рассуждение о методе, чтобы исправлять свой разум и отыскивать истину в науках» (1637).
Рене Декарт (31.03.1596 – 11.02.1650) – французский математик, физик, философ, физиолог.

Анализ задачного материала по теме *решение задач в целых числах,* непосредственно связанной с тематикой задачи №18 (С6,№19 – в предыдущие годы), показывает, что существует некоторое подмножество задач (назовём их *базовыми задачами*), которые неизбежно встают перед человеком, решающим любую задачу из названной темы. Логично постараться выделить с максимальной полнотой перечень таких базовых задач, а также адекватные им логические и специальные математические учебные действия. Следующим шагом будет обоснование того, что построенный перечень базовых задач действительно является базисом в пространстве задач темы *решение задач в целых числах*. Справедливо следующее утверждение: решение любой задачи данной темы представимо в виде цепочки последовательно разворачивающихся базовых задач (не обязательно всех, но некоторых), взятых в определённой последовательности. Внутри каждой базовой задачи выделяются три уровня внутренней дифференциации в зависимости от сложности и трудности задач: 1)знакомая задача **(ЗЗ)**, при решении которой воспроизводится известный, рассказанный учителем алгоритм; 2) модифицированная задача **(МЗ)**, при решении которой известный алгоритм применяется в новой ситуации или требуется сделать минимум один новый шаг в известном алгоритме; 3) незнакомая задача **(НЗ),** при решении которой **один или несколько** известных алгоритмов применяется в *новой ситуации* в *новой последовательности* или требуется сделать *несколько новых шагов* в известном алгоритме, или требуется сконструировать новый алгоритм. Задачи этого уровня имеют исследовательский характер, предполагают проведение численного эксперимента, обнаружение закономерности, обоснование найденной закономерности и применение синтезированного нового алгоритма для решения поставленной задачи; заключительный этап - ясное, последовательное и обоснованное изложение решения. Отмеченные этапы присутствуют в работе научного работника. С уважением отмечаем близость наших взглядов концепции Рене Декарта, 425-летний юбилей которого отмечается в эти дни. Субъективный показатель *трудность решения задачи* понимается как готовность решателя к решению данной задачи, трудность выражается в процентах решаемости/нерешаемости задачи на больших выборках испытуемых. Объективный показатель *сложность решения задачи* определяется количеством элементов содержания образования (определений, теорем, алгоритмов, приемов действий математических и эвристических), а также степенью неочевидности, неожиданности переходов или ходов мысли. При проектировании многоуровневой системы задач по теме решение задач в целых числах мы придерживались намеченной структуры. Были проанализированы, систематизированы в соответствии с нашим подходом и даны развёрнутые авторские решения, ответы, подсказки к решению задач из КИМов последних лет, а также из Тренировочных материалов наиболее популярных авторов. Работа содержит более 300 задач высокого уровня сложности. Она поможет (и это проверено на многолетней практике автора и его коллег) мотивированным учащимся преодолеть боязнь трудных задач и научиться уверенно их решать. Для учащихся разработаны индивидуальные многоуровневые системы зачётных заданий разных типов, в том числе по структуре КИМа ЕГЭ, с охватом базовых задач разных уровней темы *решение задач в целых числах*.

Базовые задачи темы “Решение задач в целых числах»

БЗ1. Задача о делении целого числа **a** на целое число **b** с остатком (нахождение неполного частного **c** и остатка **r**, таких, что выполняется равенство: $a = bc + r, \quad 0 \le r < b$). Способы действий: деление чисел с остатком, использование арифметики остатков (рассуждение по выбранному модулю), проверка чисел на чётность и нечётность, рассуждение от противного, учёт периодичности чередования остатков. Делимость чисел, признаки делимости. Обратная задача: по неполному частному **c** и остатку определить число **a.**

БЗ2. Задача определения вида числа: простое или составное (способы действий: проверка признаков делимости на 2,3,4,5,6,8,9,10,11; разложение на множители; проверка условий теоремы: если натуральное число N не делится ни на одно из простых чисел, не превосходящих $\left[\sqrt{N}\right]$, т.е. на $p \le \left[\sqrt{N}\right]$, то число N – простое, применение формул сокращённого умножения, применение метода математической индукции.

БЗ3. Задача приведения натурального числа N к каноническому виду $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_k^{\alpha_k}$ (способы действий: разложение на множители, применение основной теоремы арифметики, гарантирующей единственность разложения с точностью до порядка множителей).

БЗ4. Задача нахождения НОК, НОД двух и более чисел (способы действий: использование основной теоремы арифметики, алгоритма Евклида). Обратная задача: по НОК и НОД двух и более чисел определить эти числа.

БЗ5. Задача нахождения количества делителей $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\ldots(\alpha_k+1)$ произвольного натурального числа $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_k^{\alpha_k}$. Способы действий: применение основной теоремы арифметики, правила умножения (принципа произведения). Обратная задача: определение числа N по количеству его делителей.

БЗ6. Задача нахождения целых решений линейных диофантовых уравнений с двумя неизвестными $ax + by = c$. Способы действий: нахождение (может быть, угадывание) частного решения и применение теоремы о виде общего решения; применение метода спуска.

БЗ7. Задача нахождения целых решений квадратичных диофантовых уравнений с двумя неизвестными $ax^2 + bxy + cy^2 = d$. Способы действий: разложение на множители левой части, рассмотрение уравнения как квадратного относительно одной из переменных с наложением дополнительных ограничений; частный приём: сведение к однородному уравнению в случае d=0; использование свойств функций, входящих в левую часть уравнения (чётность, монотонность, ограниченность, др.).

БЗ8. Задача нахождения целых решений диофантовых уравнений с двумя и более неизвестными различного вида (например, содержащих неизвестную под знаком показательной функции). Способы действий: рассуждение по выбранному модулю, применение арифметики остатков, использование периодичности чередования остатков, бинома Ньютона.

БЗ9. Задача нахождения сумм различных числовых последовательностей (суммы первых степеней первых n натуральных чисел, суммы вторых, третьих степеней первых n натуральных чисел, суммы прогрессий, суммирование дробей различного рода, обращение периодических дробей в рациональную дробь). Способы действий: применение аппарата прогрессий, уравнений, метода математической индукции, составление и решение рекуррентных соотношений (в том числе с использование характеристических уравнений).

БЗ10. Задача математического моделирования с помощью уравнений, неравенств, систем с использованием элементарных функций, рекуррентных соотношений, построения графов, базовых задач данного перечня. Способы действий: использование комбинаций рассмотренных алгоритмов.

БЗ11. Решение задачи о принадлежности данного числа данному числовому множеству (N, Z, Q, R,C).

БЗ1. Задача о делении целого числа **a** на целое число **b** с остатком (нахождение неполного частного **c** и остатка **r**, таких, что выполняется равенство: $a = bc + r, \quad 0 \le r < b$). Способы действий: деление чисел с остатком, использование арифметики остатков (рассуждение по выбранному модулю), проверка чисел на чётность и нечётность, рассуждение от противного, учёт периодичности чередования остатков. Делимость чисел, признаки делимости. Обратная задача: по неполному частному **c** и остатку определить число **a.**

ЗЗ. Знакомые задачи минимального уровня на деление целых чисел с остатком.

1.1. Число а при делении на 8 даёт остаток 6.Чему равен остаток от деления числа а на 4?

Решение. По условию число а имеет вид а=8k+6.Разделив его на 4, получим в остатке 2.

1.2. Напишите общий вид чисел, кратных 4 и дающих при делении на 3 остаток 2.

*Решение. Рассмотрим остатки при делении натурального числа на 3*4=12, эти остатки имеют вид* $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11\}$*.Из них только остатки* $\{0;4;8\}$ *дают числа, кратные 4. Из, них в свою очередь, только остаток 8 даёт числа вида 12n+8, кратных 4 и дающих при делении на 3 остаток 2.*

1.3. Напишите общий вид чисел, кратных 5 и дающих при делении на 4 остаток 3.

*Решение. Рассмотрим остатки при делении натурального числа на 5*4=20, эти остатки имеют вид* $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15;16;17;18;19\}$*.Из них только остатки* $\{0;5;10;15\}$ *дают числа, кратные 5. Из, них в свою очередь, только остаток 15 даёт числа вида 20n+15, кратных 5 и дающих при делении на 4 остаток 3.*

1.4. Число а при делении на 5 даёт остаток 3. Чему равен остаток от деления на 5 числа a^2-3а ?

1.5. Найдите все числа, которые при делении на 3 дают остаток 2, а при делении на 4 - остаток 3.

*Решение. Рассмотрим остатки при делении натурального числа на 3*4=12, эти остатки имеют вид* $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11\}$*.Из них только остатки* $\{2;5;8;11\}$ *дают числа, которые при делении на 3 дают остаток 2. Из, них в свою очередь, только остаток 11 даёт числа вида 12n+11, которые при делении на 3 дают остаток 2, а при делении на 4 - остаток 3*

1.6. Найдите все числа, которые при делении на 5 дают остаток 4, а при делении на 7 - остаток 6. *Ответ:35n+34.*

1.7. Буратино сложил три последовательных натуральных числа, затем три следующих числа и полученные суммы перемножил. Получилось 791. Прав ли Буратино?

Подсказка: $((2n-1)+(2n)+(2n+1))\cdot((2n+2)+(2n+3)+(2n+4))=6n\cdot(6n+9)=18n(2n+3)\ \vdots\ 18.$

1.8. Могут ли числа разной чётности быть корнями уравнения $x^2+y^2=1000$?

Подсказка: рассмотрите 1-ый случай x=2n+1,y=2k; 2-ой случай x=2n, y=2k+1.

1.9. Могут ли нечётные числа быть корнями уравнения $x^2+y^2=1000$?

Подсказка: рассмотрите случай x=2n+1, y=2k+1.Вопрос: какими числами могут быть целочисленные решения этого уравнения?

1.9.1.Решите в целых числах уравнения: а) $x^2+y^2=2017$; б) $x^2+y^2=2023$. Отв. $(\pm 8;\pm 44);(\pm 44;\pm 8)$

М3. Модифицированные задачи, требующие для своего решения видоизменения известного алгоритма и конструирование, как минимум одного самостоятельного шага алгоритма.

1.10. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, которые при делении на 11 дают в остатке 1.

Подсказка: рассматриваемые числа имеют вид x=11n+1, они ограничены снизу числом 100, а сверху числом 999 $\Rightarrow 100\le 11n+1\le 999 \Leftrightarrow \frac{100-1}{11}\le n\le \frac{999-1}{11} \Leftrightarrow n\in\{9;10;11;,,,90\}$*,т.к. n-натуральное число. Сумма 82 первых членов арифметической прогрессии : 100, 111, 122, … 892 равна* $S_{82}=\frac{a_1+a_{82}}{2}\cdot 82=\frac{100+991}{2}\cdot 82=44731.$

1.11. Докажите, что сумма и разность любых двух целых чисел имеют одинаковую чётность.

Подсказка: рассмотрите 4 случая 1) x=2n+1, y=2k+1; 2) x=2n, y=2k+1; 3) x=2n+1, y=2k; 4) x=2n, y=2k.

1.12. Чётно или нечётно произведение: а) $(9a+3b-5c+7)(7a-11b+7c+20)$; б) $(7a+b-2c+d+2)(3a-5b+4c+11)$, где $a,b,c,d\in Z$.

Подсказка: было доказано, что сумма и разность любых двух целых чисел имеют одинаковую чётность. По чётности/нечётности суммы и разности можно судить о чётности/нечётности слагаемых: $(7a+b-2c+d+2)+(3a-5b+4c+11)=10a-4b+2c+13$*, сумма этих чисел нечётна, следовательно, числа в скобках разной чётности. Тогда и произведение чётного числа на нечётное равно чётному числу. Ответ:а)чётно. Ответ в б) зависит от чётности/нечётности числа d.*

1.13. Чётны или нечётны числа:
а) $A=1-2+3-4+5-\ldots-2000+2001$; б) $C=1^2+2^2-3^2+4^2+5^2-6^2+\ldots+1999^2+2000^2-2001^2$?

1.14. Антоша написал на доске верное равенство $1*2*3*4*5*\ldots*999=499500$, причём вместо каждой звёздочки он написал либо плюс, либо минус. Лена переправила несколько знаков на противоположные, получив в результате 399499. Не ошиблась ли Лена при подсчёте?

1.15. Пусть x_1, x_2, …, x_{2001} - целые числа. Докажите, что число $|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+|x_3-x_4|+\ldots+|x_{2000}-x_{2001}|+|x_{2001}-x_1|$ является чётным. (Рассмотреть сначала три числа; потом 667 триад).

1.16. На прямой расположены несколько точек. Между каждыми двумя точками поставили ещё по точке. Процедура повторяется неограниченное количество раз. Докажите, что на каждом шаге общее число точек будет нечётным.

1.17. В девятиэтажном доме с 8 подъездами подсчитали число жителей в каждом подъезде и на каждом этаже. Могут ли все полученные 17 чисел быть нечётными?

1.17. Найдите все целые значения *a*, при которых число $y=x^3+ax^2+5x+9$ нечётно при всех целых значениях *x*.

1.18. Докажите, что если a не кратно 3, то a^2-1 кратно 3.

1.19. Докажите, что число $n^3+3n^2-n-3 \vdots 3$, $n\in N$. Докажите, что это число делится на 48 при любом нечётном n.

1.20. Дано: $a^2+b^2 \vdots 3$; $a,b\in N$. Докажите, что $a \vdots 3$, $b \vdots 3$. *Подсказка: рассмотрите 9 случаев всевозможных остатков у чисел a,b.*

0;0	0;1	0;2
1;0	1;1	1;2
2;0	2;1	2;2

1.21. Рассматривая остатки при делении на 3, решите уравнение $3x+4y=1$ в целых числах.

Решение: $3x+4y=1 \Leftrightarrow 3x=1-4y$ *левая часть уравнения делится на 3, значит, и правая делится на 3. Рассуждаем про y по модулю 3, т.е. рассматриваем остатки* $r\in\{0;1;2\}$ *при делении на 3, возможны три случая* $y\in\{3n;3n+1;3n+2\}$. *Если* y=3n, уравнение примет вид $3x=1-4y \Leftrightarrow 3x=1-4(3n) \Leftrightarrow \varnothing$, *т.к. правая часть не делится на три, а левая делится. Если* y=3n+1, уравнение примет вид $3x=1-4y \Leftrightarrow 3x=1-4(3n+1) \Leftrightarrow 3x=-12n-3 \Leftrightarrow x=-4n-1, n\in Z$. *Случай y=3n+2 проверьте самостоятельно. Получено общее решение исходного диофантова уравнения в целых числах:* $\begin{cases} x=-4n-1, n\in Z \\ y=3n+1, \end{cases}$ *Проверка решения:* $3(-4n-1)+4(3n+1)=1$- *верно. Подставляя значения* n *, получаем частные решения исходного уравнения:*

n	*0*	*-1*	*1*	*-2*	*2*	…
x	*-1*	*3*	*-5*	*7*	*-9*	
y	*1*	*-2*	*4*	*-5*	*7*	

Можно иначе решить исходное уравнение $3x+4y=1 \Leftrightarrow 4y=1-3x$, *левая часть кратна 4, поэтому про x рассуждаем по модулю 4, т.е. рассматриваем остатки* $r\in\{0;1;2;3\}$ *при делении на 4, возможны четыре случая* $x\in\{4n;4n+1;4n+2;4n+3\}$.

$$1)\begin{cases} x=4n, n\in Z \\ 4y=1-3(4n), \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing; 2)\begin{cases} x=4n+1, n\in Z \\ 4y=1-3(4n+1), \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing; 3)\begin{cases} x=4n+2, n\in Z \\ 4y=1-3(4n+2), \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing; 4)\begin{cases} x=4n+3, n\in Z \\ 4y=1-3(4n+3), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4n+3, \\ y=-3n-2, \end{cases}$$

. Получено общее решение исходного диофантова уравнения в целых числах: $\begin{cases} x = 4n+3, n \in Z \\ y = -3n-2, \end{cases}$ *. Проверка решения:* $3(4n+3)+4(-3n-2)=1$ *- верно. Подставляя значения* n *, получаем частные решения исходного уравнения:*

n	*0*	*1*	*-1*	*-2*	*2*	*-3*	…
x	*3*	*7*	*-1*	*-5*	*11*	*-9*	
y	*-2*	*-5*	*1*	*4*	*-8*	*7*	

Нетрудно убедиться, что полученные два разных по виду решения, дают одно множество решений уравнения.

1.22. Применяя метод остатков, решите уравнения: 1) $5x-7y=1$; 2) $5x-7y=-1$. *Подсказка: рассмотрите* $y \in \{5n; 5n+1; 5n+2; 5n+3; 5n+4\}$. *Рассмотрение третьего случая приведёт к общему решению уравнения* $\begin{cases} x = 7n+3, n \in Z \\ y = 5n+2, \end{cases}$ *. Проверка решения:* $5(7n+3)-7(5n+2)=1$ *- верно. Подставляя значения* n *, получаем частные решения исходного уравнения:*

n	*0*	*1*	*-1*	*-2*	*2*	*-3*
x	***3***	*10*	*-4*	***-11***	***17***	*-18*
y	***2***	*7*	*-3*	***-8***	***12***	*-13*

Для уравнения $5x-7y=-1$*метод остатков даёт общее решение* $\begin{cases} x = 7n+4, n \in Z \\ y = 5n+3, \end{cases}$ *. Проверку сделайте самостоятельно. Подставляя значения* n *, получаем частные решения уравнения* $5x-7y=-1$*:*

n	*0*	*1*	*-1*	*-2*	*2*	*-3*
x	*4*	***11***	***-3***	*-10*	*18*	***-17***
y	*3*	***8***	***-2***	*-7*	*13*	***-12***

1.23. Докажите, что число $n^2+3n+11$ не кратно 25 ни при каких $n \in N$. *Подсказка: рассмотрите случаи всевозможных остатков при делении на 25: n=25k+r,* $r \in \{0;1;2;3;...24\}$.

1.24. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, кратных 11, но не кратных 13.

Решение: рассматриваем числа, удовлетворяющие первому условию, они имеют вид x=11n, они ограничены снизу числом 100, а сверху числом 999$\Rightarrow 100 \le 11n \le 999 \Leftrightarrow \frac{100}{11} \le n \le \frac{999}{11} \Leftrightarrow n \in \{10;11;,,,90\}$ *,т.к. n-натуральное число. Сумма 81 первых членов арифметической прогрессии :110;121;…990 равна* $S_{81} = \frac{a_1 + a_{81}}{2} \cdot 81 = \frac{110+990}{2} \cdot 81 = 44550.$ *В арифметической прогрессии:110;121;…990 есть числа, кратные 13, например, 143,286…т.е.числа вида 11*13*k=143k, всего их 6 чисел. Действительно, решив неравенство, получим:* $\Rightarrow 100 \le 143k \le 999 \Leftrightarrow \frac{100}{143} \le k \le \frac{999}{143} \Leftrightarrow n \in \{1;2;...;6\}$*.Сумму этих чисел* $S_6 = \frac{a_1 + a_6}{2} \cdot 6 = \frac{143+858}{2} \cdot 6 = 3003$ *вычтем из* $S_{81} = 44550.$*Получим ответ44550-3003=41547.*

1.25. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, которые при делении на 4 дают остаток 1.

1.26. Найдите сумму всех четырёхзначных чисел, делящихся на 5,но не делящихся на 7.

1.28. Красная Шапочка по дороге к бабушке собирала грибы и при этом 117 раз пересекла лесную дорогу. По одну или по разные стороны от дороги находятся сейчас Красная Шапочка и её дом?

1.29. Произведение трёх целых чисел нечётно. Чётна или нечётна их сумма?

1.30. Найдите сумму всех четырёхзначных чисел, кратных 29, но не кратных 31.

1.31. Даны числа 1 и 2. Перед ними в произвольном порядке расставляют знаки «+» и «-». Какие числа можно получить, выполнив арифметические вычисления? Ответ: $\{\pm 3;\pm 1\}$.

1.32. Даны числа 1, 2 и 3. Перед ними в произвольном порядке расставляют знаки «+» и «-». Какие числа можно получить, выполнив арифметические вычисления? Ответ: $\{\pm 6;\pm 4;\pm 2;0\}$.

1.33. Даны числа 6,7 ,8,9 и 10. Перед ними в произвольном порядке расставляют знаки «+» и «-». Какие числа можно получить, выполнив арифметические вычисления? Ответ: построив разветвляющийся граф $\pm 6 \pm 7 \pm 8 \pm 9 \pm 10$ или $\pm 10 \pm 9 \pm 8 \pm 7 \pm 6$, в итоге получим числовое множество: $\{\pm 2;\pm 4;\pm 6;\pm 8;\pm 10;\pm 12;\pm 14;\pm 20;\pm 22;\pm 24;\pm 26;\pm 28;\pm 40\}$.

НЗ –незнакомые задачи, при решении которых **один или несколько** известных алгоритмов применяется в новой ситуации в новой последовательности или требуется сделать несколько новых шагов в известном алгоритме, обнаружить закономерность и применить её для решения.

1.34. (Я2020,В16.19). Дана бесконечная арифметическая прогрессия, первый член которой равен 2014, а разность равна 13. Каждый член прогрессии заменили суммой его цифр. С полученной последовательностью поступили также и действовали так до тех пор, пока не получилась последовательность однозначных чисел. а) Найдите тысячное число получившейся последовательности; б)Найдите сумму первой тысячи чисел получившейся последовательности; в)Чему может равняться наибольшая сумма 1010 чисел получившейся последовательности, идущих подряд? Отв. а)7 б)5002 в) 5054

Решение: Задания типа «найти миллионный член последовательности, заданной рекуррентно; вычислить сумму тысячи слагаемых», и т.д. явно не предполагают последовательное выполнение указанных операций. Инструменты для выполнения подобных заданий по «заглядыванию в бесконечность» у нас имеются: обнаружение закономерности, часто связанной с периодичностью; нахождение формулы общего члена последовательности; предельный переход. Для обнаружения закономерности проведём численный эксперимент: выпишем несколько членов первой последовательности - арифметической прогрессии, под членами первой последовательности выпишем члены второй последовательности $S(x)$*, равные сумме цифр числа из первой последовательности, затем аналогично просуммируем цифры членов второй последовательности* $S(S(x))$ *и так далее, пока не получим последовательность из однозначных чисел, т. е. цифр.*

x	2014	2027	2040	2053	2066	2079	2092	2105	2118	2131
$S(x)$	7	11	6	10	14	18	13	8	12	7
$S(S(x))$	7	2	6	1	5	9	4	8	3	7

x	2144	2157	2170	2181	2196	2209	2222	2235	2248	2261…
$S(x)$	11	15	10	12	18	13	8	12	16	11…
$S(S(x))$	2	6	1	3	9	4	8	3	7	2…

Обнаружен повторяющийся период T_1 *из 9 цифр*

7	2	6	1	5	9	4	8	3

Заметим, что, если начать отсчитывать период с цифры 2, то обнаружится второй период T_2 *:*

2	6	1	5	9	4	8	3	7

А если начать с цифры 6, то третий период T_3 *будет*

6	1	5	9	4	8	3	7	2

И так далее, всего 9 периодов. Если отложить 111 раз T_1 то мы попадём на 999-й член первой последовательности, следующим за ним будет число 7, т.е. 1000-й член первой последовательности. Ответ:7.

Б) Сумма чисел в первом периоде (так же, как и во втором и остальных) равна 45 (проверьте). Тогда сумма первой тысячи чисел получившейся первой последовательности равна ***45*111+7=5002****.*

*В) Можно провести численный эксперимент и вычислить сначала сумму первых 1010 членов первой последовательности, она равна 112*45+7+2=5040+9=5049. Теперь сдвинемся на одну цифру вправо, последовательность начинается с цифры 2, период T_2 повторится 112 раз и ещё добавятся следующие два числа 2+6, сумма 1010 чисел, идущих подряд будет равна 112*45+2+6=5048. Сдвигая последовательность поочерёдно вправо на одну цифру и выполняя суммирование, найдём все возможные 9 значений сумм из 1010 членов. Однако, можно уменьшить объём вычислений, если заметить, что сумма 112 периодов является инвариантом, т.е. не зависит от того, с какого числа начинается суммирование. Значит, максимум суммы достигается за счёт тех двух слагаемых, которые оказались в данном случае вне 112 периодов. Очевидно, что 5+9 дают наибольшую сумму из всех при суммировании двух подряд идущих чисел первой последовательности. Значит, взяв 112 раз пятый период $T_5(594837261)$ и прибавив следующие цифры 5+9, получим наибольшую сумму 112*45+5+9=5054. Ответ:5054.*

Замечание

При решении задачи была обнаружена закономерность: периодическое чередование в последовательности «суммы цифр от суммы цифр» $S(S(x))$. Чтобы не утяжелять решение задачи, мы вынесли доказательство этой *периодичности на бесконечном множестве* натуральных чисел, а не *повторяемости на конечном* его отрезке, в отдельное замечание. Для доказательства нам будет полезна **теорема (А.Максютин):**

Для арифметической прогрессии $\div n, n \in N$ составим последовательность однозначных чисел $s_n = S(S(S(n)))$-«суммы цифр от суммы цифр от суммы цифр числ n». Тогда:

1)последовательность $s_n = S(S(S(n)))$ является периодической с первым членом 1 и периодом $T_1(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$;

2)аналитическое задание последовательности $s_n = S(S(S(n)))$ определяется формулой:

$$s_n = S(S(S(n))) = \begin{cases} n, n \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}; \\ n-9, n \in \{10,11,12,\ldots 17,18\}; \\ n-18, n \in \{19,20,\ldots 26,27\}; \\ \ldots \\ n-9(k-1), n \in \{1+9(k-1),\ldots,9+9(k-1)\}; \\ \ldots \end{cases}$$

3)для арифметической прогрессии из натуральных чисел общего вида $\div a_1 + (n-1)d, n \in N$ последовательность $\tilde{s}_n = S(S(S(a_1 + (n-1)d)))$ является периодической, первый член этой последовательности, длина периода, порядок цифр в периоде определяются двумя параметрами r_{a_1} и r_d, где $a_1 = 9l + r_{a_1}, r_{a_1} \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ (ноль отсутствует, сумма цифр не может быть равной нулю); и $d = 9k + r_d$; $r_d \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, d- разность прогрессии $\div a_1 + (n-1)d$, $n, d \in N$.

Доказательство.

П.1) Для обнаружения закономерности проведём численный эксперимент с арифметической прогрессией $\div n, n \in N$, вычисляя для каждого n сумму цифр (до однозначного числа) и остатки при делении числа n на 9; результаты для наглядности сводим в таблицу:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2
$S(n)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2	3	4	5
$S(S(n))$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
$S(S(S(n)))$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
Остатки r_n	1	2	3	4	5	6	7	8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	0	1	2	3	4	5

Обнаруживаем *закономерности*: 1) последовательность $s_n = S(S(S(n)))$ является периодической с первым членом 1 и периодом $T_1(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$; будет ли эта закономерность проявляться на всём натуральном ряде, а не только на рассмотренном отрезке натурального ряда?

2) последовательность остатков r_n является периодической последовательностью с периодом $T_2(1,2,3,4,5,6,7,8,0)$.

3)при всех n, не кратных 9 соответствующие члены обеих последовательностей совпадают, а при n, кратных 9, принимают значения: $S(S(S(9l))) = 9$, $r_{9l} = 0$. В чём причина этих явлений? Как писал Френсис Бэкон: «истинно знать что-либо – значит знать его причины».

Наша цель - доказать, что последовательность $s_n = S(S(S(n)))$ является периодической с периодом $T_1(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ на всём множестве натуральных чисел.

Доказательство построим так: 1)сначала докажем, что последовательность остатков r_n является периодической с периодом $T_2(1,2,3,4,5,6,7,8,0)$ на всём множестве натуральных чисел. 2)Затем перенесём свойство периодичности остатков r_n на множестве всех натуральных чисел **N** на периодичность $s_n = S(S(S(n)))$ на множестве всех натуральных чисел **N**, пользуясь тождественным совпадением элементов периодов для всех n, не кратных 9 (основанным на признаке делимости на 9) и повторяемостью значений первой и второй последовательностей для всех n, кратных 9.

1)Действительно, пусть $n = 9l + r, r \in \{0;1,2,3,4,5,6,7,8\}$, рассмотрим два случая: 1)если $r \in \{0;1,2,3,4,5,6,7\}$, то $n+1 = 9l + (r+1), (r+1) \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$; 2)если r=8, то $n+1 = 9(l+1) + 0, r = 0$. Т.е. остатки при делении чисел n на 9 образуют периодическую последовательность с периодом $T_2(1,2,3,4,5,6,7,8,0)$ на всём натуральном ряде, причём остаток 0 встречается только у чисел, кратных 9.

2)Обнаружено тождественное совпадение для одних и тех же натуралльных чисел первых восьми элементов периодов $T_1(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ и $T_2(1,2,3,4,5,6,7,8,0)$; выяснена причина различия в 9-ой компоненте. Будут ли первые восемь цифр в периодах совпадать на всём N, а не только на рассмотренном промежутке? Ответ утвердительный, причина в **признаке делимости на 9**: остатки от деления на 9 числа n и суммы его цифр S(n) совпадают. Что касается последних несовпадающих цифр в периодах, то всегда цифре 9 из $T_1(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ на всём N будет соответствовать цифра 0 из $T_2(1,2,3,4,5,6,7,8,0)$ опять же по признаку делимости на 9. А так как $T_2(1,2,3,4,5,6,7,8,0)$ повторяется неограниченно на N, то также будет себя вести $T_1(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ на всём множестве натуральных чисел.

П.2) График последовательности $s_n = S(S(S(n)))$ строим по точкам: (1;1),(2,2)….(9.9), по доказанному s_n периодична, поэтому для $n \in \{10,11,12,...17,18\}$ из n поочерёдно вычитаем 9 для получения s_n, на следующем промежутке $n \in \{19,20,...26,27\}$ вычитаем из n 18 и т.д. Получаем график кусочно-монотонно-возрастающей последоватеьности в осях NOS, точки принадлежат наклонённым под 45 градусов к оси абсцисс отрезкам прямых (напоминающих график «дробной части числа» $\{x\} = x - [x]$, растянутый в 8 раз и сдвинутый в точку (1,1) т.е. $y = 8\{x-1\}+1$). Аналитическое задание кусочно-линейной функции не представляет труда.

П.3) При доказательстве п.3.удобно воспользоваться графиком последовательности $s_n = S(S(S(n)))$. Арифметическая прогрессия общего вида $\div a_1 + (n-1)d, n \in N$ является подпоследовательностью последовательности натуральных чисел $\div n, n \in N$. Рассмотрим подробнее, на какие фрагменты построенного графика последовательности $s_n = S(S(S(n)))$ будут попадать точки, соответствующие $\tilde{s}_n = S(S(S(a_1 + (n-1)d)))$. Чтобы почувствовать влияние a_1 на период $\tilde{T}_1$ последовательности $\tilde{s}_n$, рассмотрим по порядку несколько примеров.

При d=1 , $a_1 = 1$ члены последовательностей и точки графиков будут совпадать $s_n = \tilde{s}_n$. В этом случае период будет $\tilde{T}_1(1;2,3,4,5,6,7,8,9) = T_1$.

При d=1 , $a_1 = 2$ прогрессия примет вид $\div a_1 + (n-1)d = n+1, n \in N$ члены последовательности $\tilde{s}_n$ начнутся со второго члена последовательности s_n и точки графиков будут совпадать при $n \in \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$, а при n=10 точка графика $\tilde{s}_n$ попадёт во второй период графика s_n и мы получим (10,1) и далее периодический повтор. В этом случае период будет $\tilde{T}_1(2,3,4,5,6,7,8,9,1)$.

При d=1 , $a_1 = 3$ прогрессия примет вид $\div a_1 + (n-1)d = n+2, n \in N$ члены последовательности $\tilde{s}_n$ начнутся с третьего члена последовательности s_n и точки графиков будут совпадать при $n \in \{3,4,5,6,7,8,9\}$, а при n=10, n=11 точка графика $\tilde{s}_n$ попадёт во второй период графика s_n и мы получим (10,1) , (11,2) и далее периодический повтор. В этом случае период будет $\tilde{T}_1(3,4,5,6,7,8,9,1,2)$.

При d=1 , $a_1 = 4$ период будет $\tilde{T}_1(4,5,6,7,8,9,1,2;3)$.

При d=1 , $a_1 = 5$ период будет $\tilde{T}_1(5,6,7,8,9,1,2;3;4)$.

При d=1 , $a_1 = 6$ период будет $\tilde{T}_1(6,7,8,9,1,2;3;4;5)$.

При d=1 , $a_1 = 7$ период будет $\tilde{T}_1(7,8,9,1,2;3;4;5;6)$.

При d=1 , $a_1 = 8$ период будет $\tilde{T}_1(8,9,1,2;3;4;5;6;7)$.

При d=1 , $a_1 = 9$ период будет $\tilde{T}_1(9,1,2;3;4;5;6;7;8)$.

При d=1 , $a_1 = 10$ период будет $\tilde{T}_1(1,2;3;4;5;6;7;8;9)$. С этого момента соответствующие периоды $\tilde{T}_1$ повторяются.

Таким образом, на период $\tilde{T}_1$ оказывает влияние не само число a_1, а его остаток при делении на 9 при

a_1 не кратном 9, т.е. при вычислении периода $\tilde{T}_1$ можно заменять a_1 его остатком. При a_1 кратном 9

($a_1 = 9l$)при вычислении периода $\tilde{T}_1$ можно заменять a_1 на число 9.

Наблюдение: при последовательном изменении a_1 от 1 до 9 (при d=1) происходит сдвиг последовательности s_n и точек её графика на такое же количество единиц вправо, что приводит к перестановке первых цифр в периоде $T_1(1;2,3,4,5,6,7,8,9)$ слева направо в конец периода.

Чтобы почувствовать влияние d на период $\tilde{T}_1$ последовательности $\tilde{s}_n$, рассмотрим по порядку несколько примеров. Используем график $s_n = S(S(S(n)))$.

При d=2 , $a_1 = 1$ период будет $\tilde{T}_1(1;3;5;7;9;2;4;6;8)$.

При d=3 , $a_1 = 1$ период будет $\tilde{T}_1(1;4;7)$, редкий случай короткого периода.

При d=4 , $a_1 = 1$ период будет $\tilde{T}_1(1;5;9;4;8;3;7;2;6)$.

При d=5 , $a_1 = 1$ период будет $\tilde{T}_1(1;6;2;7;3;8;4;9;5)$.

При d=6 , $a_1 = 1$ период будет $\tilde{T}_1(1;7;4)$, ещё один короткий период.

При d=7 , $a_1 = 1$ период будет $\tilde{T}_1(1;8;6;4;2;9;7;5;3)$.

При d=8 , $a_1 = 1$ период будет $\tilde{T}_1(1;9;8;7;6;5;4;3;2)$.

При d=9 , $a_1 = 1$ период будет $\tilde{T}_1(1)$, в этом случае $\tilde{s}_n = a_1 = 1$ и последовательность $\tilde{s}_n$ является стационарной. Очевидно, стационарную последовательность $\tilde{s}_n = a_1$ получим при любом другом a_1, если $d = 9l, l \in N$.

При d=2 , $a_1 = 2$ период будет $\tilde{T}_1(2;4;6;8;1;3;5;7;9)$.

Ясно, что d=10 для вычисления $\tilde{s}_n$ заменяем на d=1, просто вычисления начнутся со следующего промежутка. Аналогично, d=11 для вычисления $\tilde{s}_n$ заменяем на d=2, и вообще, $d = 9l + r_d$; $r_d \in \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$ заменяем на r_d. Ч.Т.Д.

Творческий вопрос для самостоятельного размышления: существует ли такое натуральное $n \in N$, что $S(n)$, $S(S(n))$ являются многозначными числами, т.е. не цифрами, а $S(S(S(n)))$ - однозначное число, т.е. цифра?

Подсказка: можно рассмотреть числа, состящие из 111 двоек, из 111 троек, т.д. Из каких цифр получилось число, удовлетворяющее требованию? Является ли составленное Вами число минимально возможным?

1.35. Дана бесконечная арифметическая прогрессия, первый член которой равен 2021, а разность равна 11. Каждый член прогрессии заменили суммой его цифр. С полученной последовательностью поступили также и действовали так до тех пор, пока не получилась последовательность однозначных чисел. а) Найдите 2022-е число получившейся последовательности; б)Найдите сумму первых 2022-х чисел получившейся последовательности; в)Чему может равняться наибольшая сумма 2022-х чисел получившейся последовательности, идущих подряд? Отв. а)6 б)10113 в) 10116.

Решение.

А) Применим доказанную теорему: 2021=2015+5=9*224+5; 11=9*1+2; тогда $\tilde{s}_n = S(S(S(a_1 + (n-1)d))) = S(S(S(2021 + (n-1)11))) = S(S(S(5 + (n-1)2))) = S(S(S(2n+3)))$

$\div a_1 + (n-1)d = 2n+3, n \in N; \div 2n+3 : 5;7;9;11;13;15;17;19;21;23;\ldots$, следовательно, по теореме Максютина, $\tilde{s}_n : 5;7;9;2;4;6;8;1;3;5;7;9;2;4\ldots$ период будет $\tilde{T}_1(5;7;9;2;4;6;8;1;3)$. $\tilde{s}_{2022} = \tilde{s}_{2016+6} = \tilde{s}_6 = 6$. Ответ:6.

Б) $\sum_{i=1}^{2022} \tilde{s}_i = 224 \cdot 45 + (5+7+9+2+4+6) = 10080 + 33 = 10113$. Ответ: 10113.

В)Сумма 224 –х периодов по 45 является инвариантом,т.к. инвариантна сумма 9 цифр в любом периоде, полученном сдвигом. Ищем максимальную сумму 6 подряд идущих цифр в периоде $\tilde{T}_1(5;7;9;2;4;6;8;1;3)$, очевидно, это $7;9;2;4;6;8$, сумма которых 36, поэтому $\sum_{\max}^{2022}\tilde{s}_i = 224\cdot 45+(7+9+2+4+6+8)=10080+36=10116$. Ответ: 10116.

1.36. Дана бесконечная арифметическая прогрессия, первый член которой равен 2022, а разность равна 13. Каждый член прогрессии заменили суммой его цифр. С полученной последовательностью поступили также и действовали так до тех пор, пока не получилась последовательность однозначных чисел. а) Найдите 2023-е число получившейся последовательности; б)Найдите сумму первых 2024-х чисел получившейся последовательности; в)Чему может равняться наибольшая сумма 2025-х чисел получившейся последовательности, идущих подряд? Отв. а) б) в) .

1.37. Дана бесконечная арифметическая прогрессия, первый член которой равен 2025, а разность равна 17. Каждый член прогрессии заменили суммой его цифр. С полученной последовательностью поступили также и действовали так до тех пор, пока не получилась последовательность однозначных чисел. а) Найдите 2027-е число получившейся последовательности; б)Найдите сумму первых 2028-х чисел получившейся последовательности; в)Чему может равняться наибольшая сумма 2029-х чисел получившейся последовательности, идущих подряд? Отв. а) б) в) .

1.38. Дана бесконечная арифметическая прогрессия, первый член которой равен 2028, а разность равна 19. Каждый член прогрессии заменили суммой его цифр. С полученной последовательностью поступили также и действовали так до тех пор, пока не получилась последовательность однозначных чисел. а) Найдите 2030-е число получившейся последовательности; б)Найдите сумму первых 2031-ого числа получившейся последовательности; в)Чему может равняться наибольшая сумма 2032-х чисел получившейся последовательности, идущих подряд? Отв. а) б) в) .

1.39. На доске написаны числа 2 и 3. За один ход эти числа, записанные на доске, заменяются на два числа: a+b и 2a-1 или a+b и 2b-1. а) Приведите пример последовательных ходов, после которых одно из чисел, записанных на доске, окажется числом 19; б) Может ли после 100 ходов одно из чисел, записанных на доске, оказаться числом 200? в) Сделали 1007 ходов, причём на доске никогда не было написано одновременно двух равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел? Отв. а) см. пример; б) нет; в) 2.

Решение а)*: для обнаружения закономерности проведём численный эксперимент: выпишем несколько ходов заданной последовательности:*

<table>
<tr><td colspan="9">2,3</td></tr>
<tr><td colspan="4">5,3</td><td rowspan="3"></td><td colspan="4">5,5</td></tr>
<tr><td colspan="2">8,5</td><td colspan="2">8,9</td><td colspan="2">10,9</td><td colspan="2">10,9</td></tr>
<tr><td>13,9</td><td>13,15</td><td>17,15</td><td>17,17</td><td>19,17</td><td>19,19</td><td>19,17</td><td>19,19</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

На правой ветке построенного графа (дерева), как видим, после 3 –х ходов одно из чисел последней строки, записанных на доске, оказалось числом 19. Ответ: а)да, см.граф.

Наблюдение за проведённым числовым экспериментом приводит к осознанию **закономерностей**:

1)В результате выполнения любого хода на **левой** ветке графа расположены **наименьшие** числа для данного хода. Для исходного положения – это 2; для первого хода – 3; для второго – 5; для третьего – 9; для четвёртого(ненаписанного) - 17 и т.д. Для единообразия записи пар чисел мы использовали ***правило***: «первое число записываемой пары- это сумма двух предыдущих чисел(из предыдущей пары); второе число пары – нечётное число, образованное из меньшего числа предыдущей пары». Причём, наименьшее число получается всегда по формуле 2a-1, где a<b. Действительно, $2a-1<a+b \Leftrightarrow b>a-1$, что верно, т.к. a<b.

2) Аналогично, **наибольшее** число находится в паре, полученной по *правилу*: «первое число – сумма; второе число – нечётное от большего числа предыдущей пары, т.е. 2b-1. Причём на данном ходе наибольшим числом может быть как сумма a+b, так 2b-1. Наибольшим 2b-1 будет при условии $b \geq a+2$. Действительно, $2b-1>a+b \Leftrightarrow b>a+1 \Leftrightarrow b \geq a+2$.

3)На нечётных ходах получаются только нечётные числа в парах (сумма чётного и нечётного –нечётна, а числа 2a-1;2b-1 нечётны по определению); на чётных ходах одно из чисел пары, а именно, сумма чисел – чётна (это понятно, т.к. сумма двух нечётных чисел предыдущей пары - чётна).

4)Меньшее число 2 на каждом n-ом ходе увеличивается более, чем в n раз: в 1,5; 2,5; 4,5; 8,5 и т.д. На каждом ходе в каждой паре меньшее число является нечётным, а чётное число в этой паре ещё больше. Что-то подсказывает нам, что гипотеза об увеличении на 100-м ходе числа 2 в 100 раз представляется неверной. Обоснование будет дано позже.

5)Теперь мы знаем, где (*левая часть графа*) и как (см. *правило*) на каждом ходе получаются наименьшие нечётные числа, а соответствующее чётное число в этой паре будет наименьшим чётным, полученном на данном ходе. Т.О. для отыскания на n-ом ходе наименьшего нечётного и наименьшего чётного чисел (они будут в одной паре), нам не потребуется весь громадный граф (дерево) получаемых чисел $(a+b;2a-1)$или$(a+b;2b-1)$, а только его цепочка, получаемая по правилу: «первое число записываемой пары- это сумма двух предыдущих чисел(из предыдущей пары); второе число пары – нечётное число, образованное из меньшего числа предыдущей пары». Т.Е. если по условию a<b, как у нас, то цепочка минимальных пар для ходов от 0-ого до, например, 8-ого имеет вид: $(a;b) \Rightarrow (a+b;2a-1) \Rightarrow (3a+b-1;4a-3) \Rightarrow (7a+b-4;8a-7) \Rightarrow (15a+b-11;16a-15) \Rightarrow$

$$(31a+b-26;32a-31) \Rightarrow (63a+b-57;64a-63) \Rightarrow (127a+b-120;128a-127) \Rightarrow$$

$$(127a+b-120;128a-127) \Rightarrow (255a+b-247;256a-255) \Rightarrow \ldots \qquad (*)$$

Всегда в паре меньшим является второе число, действительно:

1) $2a-1<a+b \Leftrightarrow a<b+1$, верно, т.к. a<b;

2) $4a-3<3a+b-1 \Leftrightarrow a<b+2$, верно;

…..

7) $128a-127<127a+b-120 \Leftrightarrow a<b+7$, верно. И так далее.

Интересующие нас пары чисел (*), будут на чётных ходах давать пары, состоящие из минимальных чётного и нечётного чисел для данного хода. В записи этих пар обнаруживается закономерность:

1-ый ход $(a+b; \quad 2a-1) \equiv ((2^1-1)a+b; \quad 2^1 \cdot a-(2^1-1))$;

2-ой ход $(3a+b-1; \quad 4a-3) \equiv ((2^2-1)a+b-1; \quad 2^2 \cdot a-(2^2-1))$;

…

5-ый ход $(31a+b-26; \quad 32a-31) \equiv ((2^5-1)a+b-26; \quad 2^5 \cdot a-(2^5-1))$;

6-ой ход $(63a+b-57; \quad 64a-63) \equiv ((2^6-1)a+b-57; \quad 2^6 \cdot a-(2^6-1))$;

7-ой ход $(127a+b-120; \quad 128a-127) \equiv ((2^7-1)a+b-120; \quad 2^7 \cdot a-(2^7-1))$;

…

100-ый ход $((2^{100}-1)a+b-x_{100}; \quad 2^{100} \cdot a-(2^{100}-1))$; где члены последовательности $x_n: 0;1;4;11;26;57;120;255;\ldots$ с чётными номерами нечётны, а с нечётными номерами – чётны.

Число $(2^{100}-1)a+b-x_{100}$ является наименьшим чётным числом на 100-м ходе,

а число $2^{100} \cdot a-(2^{100}-1)$ является наименьшим нечётным числом на 100-м ходе.

По какому закону образованы члены последовательности $x_n: 0;1;4;11;26;57;120;255;\ldots$? Для отыскания формулы общего члена возможны разные подходы, мы выбираем наглядный: установим явную зависимость x_n от n, поиск проведём с помощью таблицы:

n	1	2	3	4	5	6
x_n	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_n	0	1	4=1+3	11=4+7	26=11+15	57=26+31
x_n	0	1	$1+(2^{3-1}-1)$	$4+(2^{4-1}-1)$	$11+(2^{5-1}-1)$	$26+(2^{6-1}-1)$
x_n	0	1	$x_3=x_2+(2^{3-1}-1)$	$x_4=x_3+(2^{4-1}-1)$	$x_5=x_4+(2^{5-1}-1)$	$x_6=x_5+(2^{6-1}-1)$
			2^2	2^2+2^3-1	$2^2+2^3-1+2^4-1$	$2^2+2^3-1+2^4-1+2^5-1$

7	…	n
x_7		x_n
120=57+63		
$57+(2^{7-1}-1)$		
$x_7=x_6+(2^{7-1}-1)$		$x_n=x_{n-1}+(2^{n-1}-1)$
$2^2+2^3-1+2^4-1+2^5-1+2^6-1$		$2^2+2^3-1+2^4-1+2^5-1+2^6-1\ldots+2^{n-1}-1=$ $=2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+\ldots+2^{n-1}-(n-3)=\frac{2^2(1-2^{n-2})}{1-2}-(n-3)$

Чтобы найти решение неоднородного рекуррентного соотношения $x_n=x_{n-1}+(2^{n-1}-1), x_1=0, x_2=1$, подставим $x_2=1$ в $x_3=1+(2^{3-1}-1)=2^2$; затем x_3 в $x_4=2^2+2^3-1$ и так далее, получим последнюю строку таблицы.

При n=100 из полученной формулы $x_n=\frac{2^2(1-2^{n-2})}{1-2}-(n-3)=2^n-4-(n-3)=2^n-n-1$ получаем $x_{100}=2^{100}-101$. Таким образом, наименьшая пара на сотом ходе имеет вид $((2^{100}-1)a+b-x_{100}; \quad 2^{100} \cdot a-(2^{100}-1))=((2^{100}-1)\cdot 2+3-(2^{100}-101); \quad 2^{100} \cdot 2-(2^{100}-1))=$
$=(2^{100}+102; \quad 2^{100}+1)$.

Сравнив наименьшее чётное число на 100-м ходе $2^{100}+102$ и 200, приходим к выводу, что числа не совпадают. Все другие чётные числа на 100-м ходе ещё больше, равенство их числу 200 невозможно. Ответ б) нет.

Решение в)*:* Разность между наибольшим и наименьшим числами в паре не равно нулю, т.к. по условию пары с равными числами не выписывали. Следовательно, вся правая цепочка графа, выписанная в решении а), начиная с пары (5;5), отсутствует, минимальная разность чисел в паре на одном ходе $\Delta_{\min}\geq 1; \Delta_{\min}\in N$. Так как множество натуральных чисел ограничено снизу единицей, можно попытаться проверить гипотезу $\Delta_{1007,\min}=1$, а если не подтвердится, то гипотезу $\Delta_{1007,\min}=2$ и так далее до подтверждения гипотезы. Другой подход основан на эвристической идее: если предлагается заглянуть «очень далеко» в 1007-ход (реально построить все ходы до него мы не можем), для этого есть лишь два инструмента: идея периодичности и предельный переход. Воспользуемся первым.

Построенная ниже левая ветка графа из неравных чисел на ходах 1,2,3,4,5 позволяет найти минимальную разность чисел в паре на одном i-ом ходе $\Delta_{i,\min}$. Цветом выделена пара, на которой достигается минимум $\Delta_{i,\min}$ на i-ом ходе.

<table>
<tr><td>1-ый ход</td><td colspan="7">5,3</td></tr>
<tr><td>2-ой ход</td><td colspan="4">8,5</td><td rowspan="3"></td><td colspan="2">8,9</td></tr>
<tr><td>3-ий ход</td><td colspan="2">13,9</td><td colspan="2">13,15</td><td colspan="2">17,15</td></tr>
<tr><td>4-ый ход</td><td>22,17</td><td>22,25</td><td>28,25</td><td>28,29</td><td colspan="2">(32,29), (32,33)</td></tr>
<tr><td>5-ый ход</td><td>(39,33)
(39,43)</td><td>(47,43)
(47,49)</td><td>(53,49)
(53,55)</td><td>(67,55)
(67,57)</td><td></td><td>(61,57)
(61,63)</td><td>(65,63)</td></tr>
<tr><td>6-ый ход</td><td>…</td><td>…</td><td>108,109</td><td>…</td><td></td><td>…</td><td>…</td></tr>
</table>

Удобно вынести в таблицу зависимость номера i-ого хода и значения $\Delta_{i,\min}$:

Номер хода i	1	2	3	4	5	6	…	2n-1	2n
$\Delta_{i,\min}$	2	1	2	1	2	1	…	2	1

Замечаем закономерность: последовательность $\Delta_{i,\min}$ является периодической с периодом (2;1). На нечётных ходах $\Delta_{2i-1,\min}=2$, а на чётных $\Delta_{2i,\min}=1$. Доказательство этого утверждения оставим за скобками решения. Т.к. 1007-ой - это нечётный ход, то $\Delta_{1007,\min}=2$. Отв. в)2.

1.40. (ЕГЭ2021). Даны три натуральных числа, второе число равно сумме цифр первого, третье число равно сумме цифр второго числа. а) Может ли сумма трёх чисел быть равной 2022? б) Может ли сумма трёх чисел быть равной 2021? в) Сколько существует троек чисел, таких что: первое число – трёхзначное, а последнее равно 2? Отв. а) да; б) нет; в) 64.

Решение а)*: Требуется выяснить, имеет ли уравнение* $n+S(n)+S(S(n))=2022$ *решение в натуральных числах. Поставим более широкую задачу: решим данное уравнение, т.е. найдём все соответствующие n. Может ли n быть 1-, 2-х, 3-х, 4-х и более многозначным числом? Например, если n- 3-х значное, то сумма его цифр не превосходит 27, а сумма цифр от суммы цифр не превосходит 9. Заметим, что 999 – это не только максимальное из всех трёхзначных чисел, оно имее максимальную сумму цифр* $S(n)$ и максимальную $S(S(n))$; *следовательно,* $n+S(n)+S(S(n))\leq 999+27+9=1035\neq 2022$, значит, n – четырёхзначное число, не превосходящее 2021. Поэтому n имеет вид $\overline{1}\overline{a}\overline{b}\overline{c}$. Полученная оценка для n : $n\in\{1000;....;2021\}$, предполагает при переборе выполнение большого(более тысячи) количества проб, сузим возможные значения для n. Так как $S(n)+S(S(n))\le(1+9+9+9)+(2+8)=38$, а $n+S(n)+S(S(n))=2022$, то $n\ge 2022-(S(n)+S(S(n)))\ge 2022-38=1984$, так что более точная оценка возможных натуральных значений n следующая: $n\in\{1984;\ldots 2021\}$. Перебор 37 значений вполне осуществим, мы покажем, как можно оптимизировать (т.е. сократить) и этот перебор.

n	$S(n)$	$S(S(n))$	$n+S(n)+S(S(n))$	*Наблюдения*
1984	*22*	*4*	*2010*	$\vdots 3$ *рост суммы на 3*
1985	*23*	*5*	*2013*	$\vdots 3$ *рост суммы на 3*
1986	*24*	*6*	*2016*	$\vdots 3$ *рост суммы на 3*
1987	*25*	*7*	*2019*	$\vdots 3$ *рост суммы на 3*
1988	*26*	*8*	*2022*	$\vdots 3$ *рост суммы на 3*

Замечаем 1) **делимость на три** чисел в сумме $n+S(n)+S(S(n))$ (что объясняется признаком делимости на 3: остатки числа n и суммы его цифр при делении на 3 совпадают и при утроении остатка сумма делится на три);
Замечаем, 2) что с ростом n **суммы увеличиваются** на 3 (что тоже объясняется признаком делимости на 3: при увеличении n на единицу ещё два остатка увеличиваются на единицу).
Мы уже знаем, что сумма цифр возрастает не монотонно, поэтому делаем
замечание 3) периодически будет происходить **нарушение монотонности** при переходе через десяток в числе n или $S(n)$. Смотрим:

1989	*27*	*9*	*2025*	$\vdots 3$ *рост суммы на 3*
1990	*19*	*10*	*2019*	$\vdots 3$ *Убывание суммы на 6*
1991	*20*	*2*	*2013*	$\vdots 3$ *Убывание суммы на 6*
1992	*21*	*3*	*2016*	$\vdots 3$ *рост суммы на 3*
1993	*22*	*4*	*2019*	$\vdots 3$ *рост суммы на 3*
1994	*23*	*5*	*2022*	$\vdots 3$ *рост суммы на 3*

Далее для чисел 1995,1996,1997,1998, 1999 следует ожидаемое, т.к. нет перехода через десяток, увеличение сумм: 2025,2028,2031, 2034, 2037, смотрим:

1999	*28*	*10*	*2037*	$\vdots 3$ *рост суммы на 3*
2000	*2*	*2*	*2004*	$\vdots 3$ *Убывание суммы на 33*

Далее для чисел 2001,2002,2003,2004,2005,2006,2007 следует ожидаемое, т.к. нет перехода через десяток, увеличение сумм: 2007,2010,2013, 2016, 2019,2022,2025, смотрим:

2001	*3*	*3*	*2007*	$\vdots 3$ *рост суммы на 3*
…				
2006	*8*	*8*	*2022*	$\vdots 3$ *рост суммы на 3*
2007	*9*	*9*	*2025*	$\vdots 3$ *рост суммы на 3*
2008	*10*	*1*	*2019*	$\vdots 3$ *Убывание суммы на 6*
2009	*11*	*2*	*2022*	$\vdots 3$ *рост суммы на 3*
2010	*3*	*3*	*2016*	$\vdots 3$ *Убывание суммы на 6*
2011	*4*	*4*	*2019*	$\vdots 3$ *рост суммы на 3*
2012	*5*	*5*	*2022*	$\vdots 3$ *рост суммы на 3*

Далее для чисел 2013,2014,2015,2016 следует ожидаемое, т.к. нет перехода через десяток, увеличение сумм: 2025,2028,2031, 2034, для 2017 следует уменьшение сумм на 6: $2017+S(2017)+S(S(2017))=2028$ *, далее рост до 2020(здесь опять переход через десяток), смотрим:*

2016	*9*	*9*	*2034*	
2017	*10*	*1*	*2028*	
2018	*11*	*2*	*2031*	
2019	*12*	*3*	*2034*	

2020	*4*	*4*	*2028*	
2021	*5*	*5*	*2031*	

Перебор окончен, количество проб уменьшено благодаря двум найденным закономерностям; избыточная подробность в таблице приведена для большей наглядности.

Ответ: уравнение $n+S(n)+S(S(n))=2022$ имеет пять решений:1988;1994;2006;2009; 2012.

Б)Было доказано, что, если $n\in N \Rightarrow n+S(n)+S(S(n)) \vdots 3$, а 2021 на 3 не делится. Ответ: нет.

В)Сколько существует корней уравнения $S(S(n))=2$, если n – трёхзначное натуральное число? Как часто бывает, поиск неизвестной закономерности начнём с числового эксперимента:

n	$S(n)$	$S(S(n))$
100	*1*	*1*
101	*2*	*2*
102	*3*	*3*
...		
109	*10*	*1*
110	*2*	*2*
...		

Так как сумма цифр от трёхзначного числа n может принимать только натутальные значения от 1 до 27, т.е. $S(n)\in\{1;27\}$, то вычислив все 27 чисел $S(1);S(2);...S(27)$, находим, что $S(S(n))=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S(n)=2 \\ S(n)=11 \end{array}\right.$.

В результате проведённого анализа задача сведена в следующим двум задачам:

№ 1) у каких трёхзначных чисел сумма цифр равна 2?

№2) у каких трёхзначных чисел сумма цифр равна 11?

Необходимо решить **основную задачу комбинаторики**: каким количеством способов осуществимо какое-то действие, т.е. каким количеством способов можно осуществить требования задач 1 и 2? Полученные количества затем сложим (принцип сложения).

Решение задачи №1.

1.1 исследуем, какими способами сумма цифр трёхзначного числа равна 2, если только одна цифра отлична от нуля; ясно, такое число единственно, это 200.

1.2 исследуем, какими способами сумма цифр трёхзначного числа равна 2, если только две цифры отличны от нуля; понятно, таких чисел два, это 110, 101.

1.3 очевидно, что трёхзначного числа с суммой цифр, равной 2, если все три цифры отличны от нуля, не существует. Промежуточный итог: первая задача осуществима тремя способами.

Ответ: среди трёхзначных чисел сумма цифр равна 2 только у трёх чисел:101;110;200.

Решение задачи №2 разбивается на три вспомогательные подзадачи.

2.1 исследуем, какими способами сумма цифр трёхзначного числа равна 11, если только одна цифра отлична от нуля; цифра не равна 11, таких трёхзначных чисел нет.

2.2 исследуем, какими способами сумма цифр трёхзначного числа равна 11, если только две цифры отличны от нуля; число 11 представимо в виде суммы двух цифр четырьмя способами: 2+9; 3+8; 4+7; 5+6; каждая из 4-х указанных пар даёт по четыре (две перестановки с нулями впереди отбрасываем) трёхзначных числа с суммой цифр 11:

$(2;9;0) \Rightarrow 290;209;920;902$

$(3;8;0) \Rightarrow 380;308;830;803$

$(4;7;0) \Rightarrow 470;407;740;704$

$(5;6;0) \Rightarrow 560;506;650;605$. Задача 2.2 осуществима 16-ю способами.

2.3 исследуем,каким количеством способов 11 можно представить в виде суммы трёх ненулевых цифр, причём, порядок слагаемых выжен. Упорядоченный перебор начнём так: зафиксируем на первой позиции 1, далее оставшуюся сумму 10 разбиваем в сумму двух цифр:

119 – перестановка этих цифр даёт 3 числа:119,191,911.

128 – перестановка этих цифр даёт 6 чисел:128,182,218,281,812,821.

137 – перестановка этих цифр даёт 6 чисел:137,173,317,371,713,731.

145 – перестановка этих цифр даёт 6 чисел:145,154,415,451,514,541.

155 – перестановка этих цифр даёт 3 числа:155,515,551.

Теперь зафиксируем на первой позиции 2, далее оставшуюся сумму 9 разбиваем в сумму двух цифр, выписываем только не встречавшиеся ранее числа:

227– перестановка этих цифр даёт 3 числа:227,272,722.

236 – перестановка этих цифр даёт 6 чисел.

245 – перестановка этих цифр даёт 6 чисел.

Теперь зафиксируем на первой позиции 3, далее оставшуюся сумму 8 разбиваем в сумму двух цифр, выписываем только не встречавшиеся ранее числа:

335– перестановка этих цифр даёт 3 числа.

344– перестановка этих цифр даёт 3 числа.

Рассмотрение дальнейших случаев с первыми цифрами 4,5,6 и т.д. невстречавшихся чисел не добавляет. Итак, задача №2 осуществима 16+24+15+6=61способом.

А всего требуемое действие осуществимо 64-я способами. Ответ:64.

1.41. (ЕГЭ2021). Даны три натуральных числа, второе число равно сумме цифр первого, третье число равно сумме цифр второго числа. а) Может ли сумма трёх чисел быть равной 420? б) Может ли сумма трёх чисел быть равной 419? в) Сколько существует троек чисел, таких что: первое число – трёхзначное, а последнее равно 5? Отв. а) да; б) нет; в) 100.

Решение а)*: Выясним, имеет ли уравнение* $n+S(n)+S(S(n))=420$ *решение в натуральных числах и если да, то решим его. Из уранения следует, что n<420, т.е. n -3-х значное число* $\overline{abc}$ $S(\overline{abc})\le 9+9+9=27$. Из всех чисел от 1 до 27 наибольшей суммой цифр, равной 10, обладает 19. Тогда $S(\overline{abc})+S(S(\overline{abc}))\le 27+10=37$ и из системы $\begin{cases} n+S(n)+S(S(n))=420; \\ S(\overline{abc})+S(S(\overline{abc}))\le 37 \end{cases} \Rightarrow 383\le n\le 419$.

Перебор 36 значений вполне осуществим, его можно оптимизировать за счёт использования двух выявленных закономерностей. Приводим искомые результаты перебора:

n	$S(n)$	$S(S(n))$	$n+S(n)+S(S(n))$
395	*17*	*8*	*420*
404	*8*	*8*	*420*
407	*11*	*2*	*420*
410	*5*	*5*	*420*

Ответ: да, для чисел 395,404,407,410 и только для них выполняются все требования задачи.

Б)419 не делится на 3. Ответ: нет.

В)Для всех трёхзначных чисела $\overline{abc}$ сумма цифр $S(\overline{abc})\le 9+9+9=27$. Среди чисел от 1 до 27 только 5,14, 23 имеют требуемую сумму цифр.

Основная задача распадается на **три** вспомогательные **подзадачи**:

№1 сколько трёхзначных чисел $\overline{abc}$ имеют сумму цифр, равную 5?

Осуществляя упорядоченный перебор, получаем 15 чисел с суммой цифр равной 5, т.е. удовлетворяющих требованиям задачи: 500,410,401,140,104,320,302,230,203,311,131,113,221,212,122.

№2 сколько трёхзначных чисел $\overline{abc}$ имеют сумму цифр, равную 14? Найдём все трёхзначные натуральные числа $\overline{abc}$, такие, что $a+b+c=14$, a,b,c-цифры, a-отлично от нуля. Для решения диофантова уравнения в цифрах проведём упорядоченны перебор: зафиксируем a=1 , тогда $\begin{cases} a=1 \\ a+b+c=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b+c=13 \end{cases}$ и все 6 решений уравнения при a=1 содержатся в таблице:

a	1	1	1	1	1	1
в	4	5	6	7	8	9
c	9	8	7	6	5	4

Аналогично, $\begin{cases} a=2 \\ a+b+c=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b+c=12 \end{cases}$ и все 7 решений уравнения при a=2 содержатся в таблице:

a	2	2	2	2	2	2	2
в	3	4	5	6	7	8	9
c	9	8	7	6	5	4	3

Аналогично, $\begin{cases} a=3 \\ a+b+c=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b+c=11 \end{cases}$ и все 8 решений уравнения при a=3 содержатся в таблице:

а	3	3	3	3	3	3	3	3
в	2	3	4	5	6	7	8	9
с	9	8	7	6	5	4	3	2

Аналогично, $\begin{cases} a = 4 \\ a + b + c = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b + c = 10 \end{cases}$ и все 9 решений уравнения при а=4 содержатся в таблице:

а	4	4	4	4	4	4	4	4	4
в	1	2	3	4	5	6	7	8	9
с	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Аналогично, $\begin{cases} a = 5 \\ a + b + c = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b + c = 9 \end{cases}$ и все 10 решений уравнения при а=5 содержатся в таблице:

а	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
в	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
с	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Аналогично, $\begin{cases} a = 6 \\ a + b + c = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b + c = 8 \end{cases}$ и все 9 решений уравнения при а=6 содержатся в таблице:

а	6	6	6	6	6	6	6	6	6
в	0	1	2	3	4	5	6	7	8
с	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Аналогично, $\begin{cases} a = 7 \\ a + b + c = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b + c = 7 \end{cases}$ и все 8 решений уравнения при а=6 содержатся в таблице:

а	7	7	7	7	7	7	7	7
в	0	1	2	3	4	5	6	7
с	7	6	5	4	3	2	1	0

Аналогично, $\begin{cases} a = 8 \\ a + b + c = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b + c = 6 \end{cases}$ и все 7 решений уравнения при а=6 содержатся в таблице:

а	8	8	8	8	8	8	8
в	0	1	2	3	4	5	6
с	6	5	4	3	2	1	0

Аналогично, $\begin{cases} a = 9 \\ a + b + c = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b + c = 5 \end{cases}$ и все 6 решений уравнения при а=6 содержатся в таблице:

а	9	9	9	9	9	9
в	0	1	2	3	4	5

с	5	4	3	2	1	0

Всего 70 трёхзначных чисел имеют сумму цифр, равную 14.

№3 сколько трёхзначных чисел $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ имеют сумму цифр, равную 23?

При а равном 1,2,3,4 задача: найти цифры, такие, что $a+b+c=23$,не имеет решения в цифрах.

При а=5, в=9, с=9 одно решение.

При а=6, $\begin{cases} a=6 \\ a+b+c=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b+c=17 \end{cases}$ и 2 решения уравнения при а=6 содержатся в таблице:

а	6	6
в	8	9
с	9	8

При а=7, $\begin{cases} a=7 \\ a+b+c=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7 \\ b+c=16 \end{cases}$ и 3 решения уравнения при а=7 содержатся в таблице:

а	7	7	7
в	7	8	9
с	9	8	7

При а=8, $\begin{cases} a=8 \\ a+b+c=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8 \\ b+c=15 \end{cases}$ и 4 решения уравнения при а=8 содержатся в таблице:

а	8	8	8	8
в	6	7	8	9
с	9	8	7	6

При а=9, $\begin{cases} a=9 \\ a+b+c=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=9 \\ b+c=14 \end{cases}$ и 5 решения уравнения при а=9 содержатся в таблице:

а	9	9	9	9	9
в	5	6	7	8	9
с	9	8	7	6	5

Итак, требования третьей задачи реализуемы 1+2+3+4+5=15 способами.

Требования всех трёх подзадач реализуемы 15+70+15=100 способами.

Ответ: существует 100 трёхзначных чисел с требуемыми свойствами.

1.42. Решите уравнения: а) $n+S(n)+S(S(n))=1993$;

б) $n+S(n)+S(S(n))+S(S(S(n)))=1993$

Отв. а) $\varnothing$; б)1963. Подсказка:1993=9к+4.

1.43. Из натурального числа вычли сумму его цифр. Из полученного числа снова вычли сумму его (полученного числа) цифр и так далее. После 11 таких вычитаний впервые получился 0. С какого числа начинали? Ответ: $\{100;101;102;....,109\}$. *Подсказка*: однозначные и двузначные числа не удовлетворяют требованию задачи. Проверим трёхзначные числа…

1.44. Докажите, что существует бесконечное множество натуралльных чисел, в записи которых нет нуля, и которые делятся на сумму своих цифр.

Решение. Возьмём самый простой случай: числа, составленные из одних единиц. Проведём численный эксперимент: будем делить числа, составленные из 3^n единиц на сумму их цифр.

При **n=0** число состоит из $3^0=1$ единицы, получим 1 (единицу), которая делится на сумму своих цифр.

При **n=1** число состоит из $3^1=3$ единиц, получим число 111, которое делится на 3, но для поиска общей закономерности запишем так: $\frac{111}{3}=\frac{9\cdot 111}{9\cdot 3}=\frac{999}{9\cdot 3}=\frac{10^3-1}{9\cdot 3}=\frac{(10\ -1)(10^2+10+1)}{9\cdot 3}=\frac{(10\ -1)}{9}\cdot\frac{(10^2+10+1)}{3}$ -это целое число, первая скобка делится на 9, вторая скобка делится на три, так как запись числа состоит из трёх единиц. Использована формула сокращённого умножения для разложения разности кубов в произведение разности оснований на неполный квадрат суммы.

При n=2 число состоит из $3^2=9$ единиц, получим число 111111111, которое делим на 9: $\frac{111111111}{9}=\frac{9\cdot 111111111}{9\cdot 9}=\frac{999999999}{9\cdot 9}=\frac{10^{3^2}-1}{9\cdot 9}=\frac{(10^3-1)(10^6+10^3+1)}{9\cdot 9}=\frac{(10^3-1)}{9\cdot 3}\cdot\frac{(10^6+10^3+1)}{3}$ -это целое число, первая скобка делится на 27, вторая скобка делится на три, так как запись числа состоит из трёх единиц и нулей.

Для проверки начинающей проявляться закономерности рассмотрим случай n=3 и n=4.

При n=3 число состоит из $3^3=27$ единиц, получим число 11…11, которое делим на 27: $\frac{11....11}{27}=\frac{9\cdot 11...11}{9\cdot 27}=\frac{99...99}{9\cdot 27}=\frac{10^{27}-1}{9\cdot 27}=\frac{((10^9)^3-1)}{9\cdot 27}=\frac{(10^9-1)}{9\cdot 9}\cdot\frac{(10^{18}+10^9+1)}{3}$ -это целое число, первая скобка делится на 81 по ранее доказанному, вторая скобка делится на три, так как запись числа состоит из трёх единиц и нулей.

При n=4 число состоит из $3^4=81$ единицы, получим число 11…11, которое делим на 81: $\frac{11....11}{81}=\frac{9\cdot 11...11}{9\cdot 81}=\frac{99...99}{9\cdot 81}=\frac{10^{81}-1}{9\cdot 81}=\frac{((10^{27})^3-1)}{9\cdot 81}=\frac{(10^{27}-1)}{9\cdot 27}\cdot\frac{(10^{54}+10^{27}+1)}{3}$ -это целое число, первая скобка делится на $9\cdot 27=243$ по ранее доказанному, вторая скобка делится на три, так как запись числа состоит из трёх единиц и нулей.

Далее применим метод математической индукции. Пусть утверждение о делимости числа на сумму его цифр справедливо при n=k, т.е. при n=k число состоит из 3^k единиц, получим число 11…11, которое делим на 3^k:

$$\frac{11....11}{3^k}=\frac{9\cdot 11...11}{9\cdot 3^k}=\frac{99...99}{9\cdot 3^k}=\frac{10^{3^k}-1}{9\cdot 3^k}=\frac{\left(\left(10^{3^{k-1}}\right)^3-1\right)}{9\cdot 3^k}=\frac{\left(10^{3^{k-1}}-1\right)}{3\cdot 3^k}\cdot\frac{\left(\left(10^{3^{k-1}}\right)^2+10^{3^{k-1}}+1\right)}{3}$$

-это целое число по предположению индукции, значит, первая скобка делится на $3\cdot 3^k$, поскольку , вторая скобка делится на три по признаку делимости на три, так как запись числа состоит из трёх единиц и нулей.

Теперь докажем справедливость утверждения при n=k+1, т.е. число состоящее из 3^{k+1} единицы, делится на 3^{k+1}

$$.\frac{11....11}{3^{k+1}}=\frac{9\cdot 11...11}{9\cdot 3^{k+1}}=\frac{99...99}{9\cdot 3^{k+1}}=\frac{10^{3^{k+1}}-1}{9\cdot 3^{k+1}}=\frac{\left(\left(10^{3^k}\right)^3-1\right)}{9\cdot 3^{k+1}}=\frac{\left(10^{3^k}-1\right)}{3\cdot 3^{k+1}}\cdot\frac{\left(\left(10^{3^k}\right)^2+10^{3^k}+1\right)}{3}$$

-это целое число, т.к. первая дробь – целое по предположению, а вторая дробь – целое по признаку. Утверждение о том, что число, составленное из 3^n единиц, делится на сумму своих цифр, доказано. При этом n пробегает бесконечное множество натуральных чисел. А это значит, что существует бесконечное множество натуралльных чисел, в записи которых нет нуля, и которые делятся на сумму своих цифр.

Творческий вопрос для самостоятельного размышления: сохранится ли справедливость доказанного утверждения, если число составить из 3^n ***двоек, а не единиц?*** *из* 3^n *троек****, а не единиц?***

1.45. В ряд выписаны квадраты всех натуральных чисел. Каждое число заменили суммой его цифр. С полученной последовательностью поступили также и действовали до тех пор, пока не получилась последовательность $\tilde{s}_n$ однозначных чисел (цифр). А)Найдите 16-е число получившейся последовательности $\tilde{s}_n$. Б)Найдите сумму 551 числа получившейся последовательности $\tilde{s}_n$. В)Сумма m членов идущих подряд в последовательности $\tilde{s}_n$ равна 3074. Чему может равняться m?

Решение. Мы уже предполагаем, что последовательность окажется периодической, т.к. в противном случае найти 551-ый член последовательности затруднительно. Проведём численный эксперимент,

результаты для наглядности сводим в таблицу:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400	441	484	529	576	625
$S(n)$	1	4	9	7	7	9	13	10	9	1	4	9	16	16	9	13	19	9	10	4	9	16	16	18	13
$S(S(n))$	1	4	9	7	7	9	4	1	9	1	4	9	7	7	9	4	10	9	1	4	9	7	7	9	4
$\tilde{s}_n=S(S(S(n)))$	1	4	9	7	7	9	4	1	9	1	4	9	7	7	9	4	1	9	1	4	9	7	7	9	4
Остатки r_n при делении n^2 на 9																									

Обнаружен период $T_1(1{,}4{,}9{,}7{,}7{,}9{,}4{,}1{,}9)$ в последовательности $\tilde{s}_n=S(S(S(n)))$, т.е. многократно повторяющийся набор упорядоченных цифр последовательности.

Интересно сопоставить членам последовательности $\tilde{s}_n=S(S(S(n)))$ остатки при делении квадратов соответствующих чисел n на 9. Сравним:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400	441	484	529	576	625
$\tilde{s}_n=S(S(S(n)))$	1	4	9	7	7	9	4	1	9	1	4	9	7	7	9	4	1	9	1	4	9	7	7	9	4
Остатки r_n при делении n^2 на 9	1	4	0	7	7	0	4	1	0	1	4	0	7	7	0	4	1	0	1	4	0	7	7	0	4

Заметим, что $\tilde{s}_{16}=S(S(S(16)))=4$**. Это ответ на п.а).**

Периоды в обеих последовательностях состоят из 9 цифр, расположенных в одном порядке, исключение составляют числа n, кратные 3, но и там остаток 0 закономерно соответствует сумме цифр 9.

Периодичность остатков следует из рассуждения по модулю 9:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	..	9k+1	9k+2	9k+3	9k+4	9k+5	9k+6	9k+7	9k+8	9k+9

n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	..									
Остатки r_n при делении n^2 на 9	1	4	0	7	7	0	4	1	0	..	1	4	0	7	7	0	4	1	0

Действительно, например, $(9k+1)^2 = 81k^2 + 18k + 1$и остаток при делении на 9 равен 1, что отражено в таблице.

$(9k+2)^2 = 81k^2 + 36k + 4$ и остаток при делении на 9 равен 4.

$(9k+3)^2 = 81k^2 + 81k + 9$ и остаток при делении на 9 равен 0.

$(9k+4)^2 = 81k^2 + 54k + 16$ и остаток при делении на 9 равен 7. Аналогично заполняется остальная часть таблицы.

Итак, периодичность остатков обнаружена и доказана, периоды у последовательности остатков и последовательности суммы цифр $\tilde{s}_n$ с учётом поправки совпадают (точнее взаимно однозначны), отсюда следует периодичность последовательности $\tilde{s}_n$ с обнаруженным периодом $T_1(1{,}4{,}9{,}7{,}7{,}9{,}4{,}1{,}9)$. Сумма цифр в периоде равна 51. Последовательность $\tilde{s}_n$ обладает девятью разными периодами, получающимися сдвигом цифр $T_1(1{,}4{,}9{,}7{,}7{,}9{,}4{,}1{,}9)$на одну цифру вправо. Сумма цифр в периоде инвариантна и равна 51.

Б)Сумма 551 члена последовательности $\tilde{s}_n$ равна сумме 61 периодов $T_1(1{,}4{,}9{,}7{,}7{,}9{,}4{,}1{,}9)$ плюс 1+4, т.е. 51*61+1+4=3111+5=3116.

Б) Ответ:3116.

В)В число 3074 равно сумме 60 периодов плюс 14: 3074=60*51+14, значит, нужно подобрать такой период, чтобы после его окончания сумма следующих подряд идущих цифр, равнялась бы 14. Например, сумма 7+7=14, 4+1+9=14, других подходящих комбинаций нет. Значит, в первом случае число взятых слагаемых равно 9*60+2=542, а во втором 9*60+3=543. Очевидно, в обоих случаях периоды берутся различные. Можете указать их?

В)Ответ:542 или 543.

1.46. В ряд выписаны **кубы всех натуральных чисел**. Каждое число заменили суммой его цифр. С полученной последовательностью поступили также и действовали до тех пор, пока не получилась последовательность $\tilde{s}_n$ однозначных чисел (цифр).

А)Найдите 2021-е;2023-е; 2026-е число получившейся последовательности $\tilde{s}_n$.

Б)Найдите сумму 2025 первых чисел получившейся последовательности $\tilde{s}_n$.

В)Сумма m членов идущих подряд в последовательности $\tilde{s}_n$ равна 9999. Чему может равняться m?

Г)Чему равна наибольшая сумма 1000 подряд идущих членов последовательности $\tilde{s}_n$?

Ответ: последовательность $\tilde{s}_n$ имеет три периода: $T_1(1;8;9), T_2(8;9;1), T_3(9;1;8)$.

Сумма цифр в периоде инвариантна и равна 18.

а) $\tilde{s}_{2021} = \tilde{s}_{6733+2} = \tilde{s}_2 = 8$; $\tilde{s}_{2023} = 1$ $\tilde{s}_{2028} = 9$.

Б) $\sum_1^{2025} \tilde{s}_n = 675 \cdot (1+8+9) = 12150$.

В) $9999=18\cdot 555+9=555\cdot(1+8+9)+9=555\cdot T_3(9;1;8)+9$ т.е. просуммированы 555 периодов $T_3(9;1;8)$ по 3 цифры в каждом плюс одна цифра 9 из членов последовательности $\tilde{s}_n$. Всего $3\cdot 555+1=1666$ членов последовательности.

Но сумму 9999 можно иначе предстваить, используя цифры из периодов, а именно: $9999=18\cdot 555+1+8=555\cdot(1+8+9)+1+8=555\cdot T_1(1;8;9)+1+8$. т.е. просуммированы 555 периодов $T_1(1;8;9)$ по 3 цифры в каждом плюс две цифры 1+8 из членов последовательности $\tilde{s}_n$. Всего $3\cdot 555+2=1667$ членов последовательности. Ответ: 1666 или 1667.

Г) Надо взять $333\cdot T_3(9;1;8)+9=333\cdot 18+9=6003$.

1.47. (ЕГЭ2013). Пусть n-трёхзначное число. А) Может ли отношение числа n к сумме его цифр равняться 82? Б) Может ли отношение числа n к сумме его цифр равняться 83? В)Чему равно наименьшее отношение числа n к сумме его цифр, если старшая цифра равна 6?

Решение. А) Пусть $n=\overline{abc}$, математическая модель задачи состоит в уравнении $\dfrac{100a+10b+c}{a+b+c}=82$, которое надо решить в цифрах a,b,c, $a\neq 0$. Преобразуем уравнение $\dfrac{100a+10b+c}{a+b+c}=82 \Leftrightarrow 100a+10b+c=82(a+b+c)\Leftrightarrow 18a=72b+81c\Leftrightarrow 2a=8b+9c$ (*).

Проведём оценку множества значений левой части уравнения (*). Т.к. a – цифра, то $E(2a)=\{2;4;6;8;10;12;14;16;18\}$. Можно решить 9 диофантовых уравнений (*) при фиксированных значениях левой части. Мы избираем метод оценки правой части: какие значения принимает правая часть? Может ли она равняться какому-либо числу из $E(2a)=\{2;4;6;8;10;12;14;16;18\}$. Вычисленные значения правой части поместим в таблицу:

	B=0	B=1	B=2	B=3	…
C=0	0	**8**	**16**	24	
C=1	9	17	25	…	
C=2	**18**	26	…		
C=3	27	…			
…					

Методом оценки получены три решения уравнения (*) a=4,b=1,c=0; a=8,b=2,c=0; a=9,b=0,c=2.

а) Ответ:410; 820; 902.

Решение б). $\dfrac{100a+10b+c}{a+b+c}=83\Leftrightarrow 100a+10b+c=83(a+b+c)\Leftrightarrow 17a=73b+82c$ (**)

$E(17a)=\{17;34;51;68;85;102;119;136;153\}$, $E(73b+82c)=\{73;82;155;146;164;...\}$, так как $E(17a)\cap E(73b+82c)=\varnothing$, то решений нет. Ответ: $\varnothing$.

Решение в). При a=6 выделим целую часть в неправильной алгебраической дроби: Обозначим дробь $\lambda(b,c)=\dfrac{100a+10b+c}{a+b+c}=\dfrac{600+10b+c}{6+b+c}=\dfrac{540+10(b+c+6)-9c}{6+b+c}=10+9\cdot\dfrac{60-c}{(b+c)+6}$. Цифры b,c каждая независимо принимают по 10 значений от 0 до 9, а пара (a,в) может принимать 10*10=100 различных значений. Перебор 100 вариантов с отсеиванием дробных значений $\lambda(b,c)$ и отбором наименьшего его значения не входит в наши планы. Оптимизируем перебор: варьировать будем не каждую переменную b,c по-отдельности, а сразу сумму (b+c), стоящую в знаменателе. Сумма цифр (b+c) может принимать 19 целых значений от 0 до 18.

Зафиксировав сумму(b+c), мы небольшим перебором найдём цифру c такую, чтобы отношение $\lambda(b,c)$ было целым:

$b+c=18 \Leftrightarrow b=c=9$	$\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-9}{(18)+6}\notin N$;ни при одном значении **c** не является целым. **(*)**
$b+c=17 \Rightarrow c\in\{8;9\}$	$\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-9}{(17)+6}\notin N$; $\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-8}{(17)+6}\notin N$ .. **(*)**
$b+c=16 \Rightarrow c\in\{7;8;9\}$	$\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-9}{(16)+6}\notin N$; $\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-8}{(16)+6}\notin N$ $\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-7}{(16)+6}\notin N$. **(*)**
$b+c=15 \Rightarrow c\in\{6;7;8;9$	$\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-9}{(15)+6}\notin N$; $\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-8}{(15)+6}\notin N$ $\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-7}{(15)+6}\notin N$; $\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-6}{(15)+6}\notin N$. **(*)**
$b+c=14 \Rightarrow$ $c\in\{5;6;7;8;9\}$	$\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-9}{(14)+6}\notin N$; $\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-8}{(14)+6}\notin N$ $\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-7}{(14)+6}\notin N$; $\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-6}{(14)+6}\notin N$ $\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-5}{(14)+6}\notin N$. **(*)**
$b+c=13 \Rightarrow$ $c\in\{4;5;6;7;8;9\}$	$\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-9}{(13)+6}\notin N$; $\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-8}{(13)+6}\notin N$ $\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-7}{(13)+6}\notin N$; $\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-6}{(13)+6}\notin N$ $\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-5}{(13)+6}\notin N$; $\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-4}{(13)+6}\notin N$. **(*)**
$b+c=12 \Rightarrow$ $c\in\{3;4;5;6;7;8;9\}$	$\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-9}{(12)+6}\notin N$; $\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-8}{(12)+6}=36\in N$ $\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-7}{(12)+6}\notin N$; $\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-6}{(12)+6}=37\in N$ $\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-5}{(13)+6}\notin N$; $\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-4}{(12)+6}=38\in N$.

$b+c=11 \Rightarrow$ $c \in \{2;3;4;5;6;7;8;9\}$	$\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-9}{(11)+6}=37 \in N$; .

Дальше перебор можно не продолжать, т.к. при всех остальных случаях $b+c \le 10 \Rightarrow \frac{1}{b+c+6} \ge \frac{1}{16} \Rightarrow \lambda \ge 10+\frac{9}{16}(60-c) \ge 10+\frac{9}{16}(60-9)=10+\frac{9\cdot 51}{16}=\frac{619}{16}=38\frac{11}{16}$.
Следовательно, наименьшее отношение равно 36 и достигается для числа 648.

Чтобы найти наибольшее отношение данных чисел к сумме цифр потребуется провести перебор до конца:

$b+c=0 \Leftrightarrow b=c=0$	$\lambda(b,c)=10+9\cdot\frac{60-0}{(0)+6}=100$ для числа 600.

Заметим, что максимальное отношение трёхзначного числа к сумме его цифр, равное 100, достигается для 100,200, …900. ***Творческий вопрос:*** чему равно максимальное отношение трёхзначного числа к сумме его цифр, если в записи числа отсутствует цифра 0 ? Аналогичный вопрос для четырёхзначного числа. Может быть, написать программу для компьютера?

1.48. (ЕГЭ2021). Пусть n-трёхзначное число. А) Может ли отношение числа n к сумме его цифр равняться 28? Б) Может ли отношение числа n к сумме его цифр равняться 88? В)Чему равно наименьшее отношение числа n к сумме его цифр, если старшая цифра равна 8? Ответ: а)да; б)нет; в)37.

1.49. (ЕГЭ2021). Пусть n-трёхзначное число. А) Может ли отношение числа n к сумме его цифр равняться 13? Б) Может ли отношение числа n к сумме его цифр равняться 6? В)Чему равно **наибольшее** отношение числа n к сумме его цифр, если старшая цифра равна 6 и число не делится на 100? Ответ: а) да; б) нет; в)70

1.50. (ЕГЭ2021). Пусть n-трёхзначное число. А) Может ли произведение числа n на сумму его цифр равняться 1105? Б) Может ли произведение числа n на сумму его цифр равняться 1106? В) Какое наименьшее значение может принимать произведение числа n на сумму его цифр, если оно больше 1503? Ответ: а) да; б) нет; в)1507.

Решение. По условию требуется найти трёхзначное натуральное n, такое, что $n\cdot S(n)=1105 \Leftrightarrow (100a+10b+c)(a+b+c)=1105$. Очевидно, что $n \ne 100$.

Левая часть уравнения разложена в произведение натуральных множителей, разложим и правую часть: $(100a+10b+c)(a+b+c)=5\cdot 13\cdot 17$, произведение двух множителей можно получить тремя способами: $65\cdot 17=5\cdot 221=85\cdot 13$, по условию, один из множителей должен быть трёхзначным числом, а второй равен сумме цифр трёхзначного числа, которая может принимать целые значения от 2 до 27. Условию удовлетворяет только $5\cdot 221$, значит, $(100a+10b+c)(a+b+c)=221\cdot 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 100a+10b+c=221 \\ a+b+c=5 \end{cases} \Leftrightarrow n=221$.

Ответ: единственное число, удовлетворяющее требованию задачи, это n=221.

$$n\cdot S(n)=1106 \Leftrightarrow (100a+10b+c)(a+b+c)=2\cdot 7\cdot 79=2\cdot 553=7\cdot 158 \Leftrightarrow$$

Б) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 100a+10b+c=553 \\ a+b+c=2; \end{cases} \\ \begin{cases} 100a+10b+c=158 \\ a+b+c=7; \end{cases} \end{array}\right.$, но ни 553, ни 158 не удовлетворяют второму уравнению системы, следовательно, системы несовместны. **Ответ: нет.**

В) Требуется найти наименьшее значение произведения $n \cdot S(n)$ *или* $(100a+10b+c)(a+b+c)$ при условии, что $(100a+10b+c)(a+b+c) \geq 1504$ (левая часть – всегда натуральное число). Множество значений произведения $n \cdot S(n)$ ограничено снизу числом 1504, поэтому начнём проверку с минимально возможного, далее будем проверять, используя приёмы из п. а) и п. б), последовательно числа 1505,1506 и т.д., пока не найдём первое (оно же и минимальное) число, принимаемое произведением $n \cdot S(n)$.

Решим уравнение $n \cdot S(n) = 1504 \Leftrightarrow (100a+10b+c)(a+b+c) = 1504 = 188 \cdot 8 = 376 \cdot 3 = 752 \cdot 2$. Ни в одном из трёх возможных способов представить 1504 в виде произведения трёхзначного числа на натуральное число, не превосходящее 27, сумма цифр трёхзначного числа не равна второму множителю в произведении. Поэтому $n \cdot S(n) \neq 1504; \quad n \cdot S(n) \geq 1505$.

Решим уравнение $n \cdot S(n) = 1505 \Leftrightarrow (100a+10b+c)(a+b+c) = 1505 = 301 \cdot 5 = 215 \cdot 7$. Ни в одном из двух возможных способов представить 1505 в виде произведения трёхзначного числа на натуральное число, не превосходящее 27, сумма цифр трёхзначного числа не равна второму множителю в произведении. Поэтому $n \cdot S(n) \neq 1505; \quad n \cdot S(n) \geq 1506$.

Решим уравнение $n \cdot S(n) = 1506 \Leftrightarrow (100a+10b+c)(a+b+c) = 1506 = 753 \cdot 2 = 251 \cdot 6 = 502 \cdot 3$. Ни в одном из трёх возможных способов представить 1506 в виде произведения трёхзначного числа на натуральное число, не превосходящее 27, сумма цифр трёхзначного числа не равна второму множителю в произведении. Поэтому $n \cdot S(n) \neq 1506; \quad n \cdot S(n) \geq 1507$.

Решим уравнение $n \cdot S(n) = 1507 \Leftrightarrow (100a+10b+c)(a+b+c) = 1507 = 137 \cdot 11$. Следовательно, при n=137 произведение принимает значение 1507, являющееся, как доказано, наименьшим. Ответ:1507.

1.51. Пусть n-трёхзначное число. А) Может ли произведение числа n на сумму его цифр равняться 8041? Б) Может ли произведение числа n на сумму его цифр равняться 8042? В) Какое наименьшее значение может принимать произведение числа n на сумму его цифр, если оно больше 503? Ответ: а) да,731; б) нет.

1.52. (Л2017.В25.19). Решите уравнение а) $x + S(x) = 2015$**;** **б)** $x + S(x) + S(S(x)) = 2015$**;**

в) $x + S(x) + S(S(x)) + S(S(S(x))) = 2015$, где $S(x)$ обозначает сумму цифр натурального числа x .

Решение. А)Если x-однозначное число, то $S(x) \leq 9$; для двузначного числа $\overline{ab}$ сумма цифр $S(\overline{ab}) \leq 18$; для трёхзначного $\overline{abc}$ сумма цифр $S(\overline{abc}) \leq 27$; $S(\overline{abcd}) \leq 36$. В уравнении $x + S(x) = 2015$ корень x не может быть трёхзначным: $\overline{abc} + S(\overline{abc}) \leq 999 + 27 = 1026$. Даже если $S(\overline{abc}) = 27$, то $x + 27 = 2015 \Leftrightarrow x = 1988$- четырёхзначное число. Итак, искомое x является четырёхзначным, меньшим 2015.

Из **признаков делимости** только два имеют отношение к сумме цифр: признаки делимости на 3 и на 9. Вспомним **признак делимости на 3: число x и его сумма цифр имеют одинаковые остатки при делении на 3**. Например, для трёхзначного числа $\overline{abc} = 100a + 10b + c = (99a + 9b) + (a + b + c)$ первая скобка делится на 3 (и на 9), тогда само число $\overline{abc}$ и его сумма цифр $(a+b+c)$ имеют одинаковые остатки при делении на 3 (и на 9). Иногда признаки формулируют упрощённо, но нам нужна именно такая формулировка. Например, если число x делится на 3, то и сумма его цифр делится на 3, тогда $x + S(x)$ делится на 3, но 2015 не делится на 3, значит корень уравнения не кратен 3. Пусть $x = 3n + 1$, тогда и $S(x) = 3m + 1$ (по признаку делимости),следовательно, $x + S(x) = 3(n+m) + 2 = 2015 = 3 \cdot 671 + 2$, противоречия нет и корень уравнения имеет вид $x = 3n + 1$. Если допустить , что $x = 3n + 2 \Rightarrow S(x) = 3m + 2 \Rightarrow x + S(x) = 3(n+m+1) + 1 \neq 3 \cdot 671 + 2$, нет корней.

(Заметим, что про x можно было аналогично рассуждать по модулю 9, т.е. рассмотреть случаи $x \in \{9n; 9n+1; 9n+2; 9n+3; 9n+4; 9n+5; 9n+6; 9n+7; 9n+8\}$, тогда у суммы $x + S(x)$ остатки будут от 0 до 8;

у 2015 остаток 8: $2015 = 9 \cdot 223 + 8$, значит, корень уравнения имеет вид $x = 9n + 4$, именно в этом случае сумма $x + S(x) = 9n + 4 + S(9n + 4) = 9l + 8$ тоже имеет остаток 8 и перебор втрое более короткий следует делать, начиная с 1993,2002,2011).

Но продолжим рассуждение по модулю 3.

Т.к. $S(1000) = 1; S(1999) = 28 \Rightarrow S(x) \in [1;28] \Rightarrow x \in [1987;2014]$, а в этом отрезке чисел вида $x = 3n + 1$ немного, выпишем их все и проверим, какие удовлетворяют уравнению:

X	1987	1990	1993	1996	1999	2002	2005	2008	2011
$S(x)$	25	19	22	25	28	4	7	10	4
$S(S(x))$	7	10	4	7	10	4	7	1	4
$S(S(S(x)))$	7	1	4	7	1	4	7	1	4
$x + S(x)$	2021	2009	2015	2021	2027	2006	2012	2018	2015

Ответ:1993; 2011.

Б)Согласно признаку делимости на 3 числа $x; S(x); S(S(x))$ имеют одинаковые остатки при делении на 3, но 2015 не делится на 3. Следовательно, уравнение корней не имеет. Ответ: $\varnothing$.

В) Аналогично, показываем, что $x \neq 3n; x \neq 3n + 1;$ проверим $x = 3n + 2$, тогда левая часть уравнения имеет вид $3l + 8 = 3(l + 2) + 2$, и правая часть имеет вид $3 \cdot 671 + 2$, противоречия нет, корень уравнения ищем в виде $x = 3n + 2$. Перебором находим 1991.

1.53. (Я2020,В23.19). На доске было выписано несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 3. а)Может ли сумма всех оставшихся чисел равняться 8, если сначала по одному разу были выписаны числа 3,4, 5,6,7,8,9,10,11,12? б)Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 54, если сначала по одному разу были выписаны все натуральные числа от 200 до 299 включительно? в)Известно, что на доске остались ровно два числа, а сначала по одному разу были выписаны все натуральные числа от 200 до 299 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на другое из них?

Решение: задачу а) можно попытаться решить подбором, группируя данные числа по два так, чтобы суммы двух были кратны 3. Но с первой попытки может и не получиться, тогда возникает проблема: то ли вообще нельзя, то ли мы неудачно группировали и надо продолжать перебор? Можно рассуждать так: предположим, что остались 3 и 5 (из других чисел 8 не получишь), тогда остальные числа были стёрты, причём сумма каждой из 4-х стёртых пар кратна 3, а значит и сумма стёртых чисел кратна 3. Прстой подсчёт показывает, что сумма стёртых чисел равна 67 и на 3 не делится. Следовательно, предположение, что остались 3 и 5, неверно.

Наконец, решая а), можно повысить уровень абстракции и перейти к рассмотрению остатков от деления данных чисел на 3. В первой строке таблицы поместим данные числа, а во второй – остатки от деления их на 3.

3	*4*	***5***	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
0	*1*	***2***	*0*	*1*	*2*	*0*	*1*	*2*	*0*

Группируя числа с остатками 1и2,0и0 (они отмечены одним цветом), получим два числа с неизменными, инвариантными остатками 1и0, которые не могут быть сгруппированы. ***Ответ а): нет.***

Б) Едва ли возможно решить перебором задачу б), тем более в). Поэтому мы начнём рассмотрение остатков чисел. Для обнаружения закономерности проведём численный эксперимент: выпишем данные числа, а под ними остатки от деления на 3.

200	*201*	*202*	*203*	*204*	*205*	*206*	*207*	*208*	*209*	…	*292*	*293*	*294*	*295*	*296*	*297*	*298*	*299*
2	*0*	*1*	*2*	*0*	*1*	*2*	*0*	*1*	*2*		*1*	*2*	*0*	*1*	*2*	*0*	*1*	*2*

Обнаружен период повторяющихся остатков $T_1(012)$из трёх цифр. Этот период повторяется 33 раз и ещё вне периода отдельно цифра 2. Для получения суммы, кратной 3, важны только остатки слагаемых (0+0),(1+2), других вариантов нет. Поэтому безразлично, какие конкретно складываемые числа участвуют в суммировании, имеет значение только их остатки. Если это так, организуем суммирование чисел внутри первого периода с остатками 1и2, останется число с остатком 0, его просто не с чем сложить. Повторив эту операцию в каждом из 33 периодов и стерев числа (в сумме кратные 3), получим 33 нуля и 2. Сгруппируем 33 нуля в 16 пар и, стерев суммы, получим неизменные, ***инвариантные остатки 0 и 2.***

Открытый нами инвариант поможет дорешать задачу б). Проверим, удовлетворяют ли найденному инварианту числа, расстояние между которыми равно 54. Рассмотрим пары чисел, о которых спрашивается в задаче: (200;254), (201;255), (202;256),…(245;299). Для наглядности разместим пары в таблицу, а в строке под ними укажем остатки:

200;254	*201;255*	*202;256*	*203;257*	*204;258*	*205;259*	…	*244;298*	*245;299*
2;2	*0;0*	*1;1*	*2;2*	*0;0*	*1;1*		*1;1*	*2;2*

Наблюдение показывает, что остатки в каждой из 46 пар одинаковые, а согласно инварианту, могли остаться только числа с остатками 0 и 2, следовательно, все эти пары чисел не удовлетворяют необходимому условию. Нет необходимости проверять все 46 пар. Можно провести следующее обоснование замеченной закономерности. Первая пара имеет равные остатки 2 и 2, вторая пара получена из первой прибавлением к каждому числу по 1, это приведёт увеличение каждого остатка на 1, равенство не нарушится, но так как 3 делится на 3 с остатком 0, то у второй пары остатки будут 0 и 0. Третья пара получена из второй прибавлением к каждому числу по 1. Далее процедура повторяется. ***Ответ:*** *на доске не могут остаться ровно два числа, разность между которыми равна 54, если сначала по одному разу были выписаны все натуральные числа от 200 до 299 включительно.*

В) Из данных чисел:200,201,…299 требуется составить максимальную дробь, причём и числитель и знаменатель должны удовлетворять доказанному инварианту. Т.о. дробь должна удовлетворять двум требованиям: максимальности и инвариантности остатков. Будем делить наибольшее число 299 на наименьшее и проверять числитель и знаменатель на инвариантные остатки. Рассмотрим две цепочки строго убывающих дробей, начиная от самой большой дроби:

$\frac{299}{200} > \frac{299}{201} > \frac{299}{202} > \frac{299}{203} > \frac{299}{204} > \ldots$ *и* $\frac{299}{200} > \frac{298}{200} > \frac{297}{200} > \frac{296}{200} > \frac{295}{200} > \ldots$ *Остатки:*

(2;2), ***(2;0),*** *(2;1),(2;2),(2;0)… и (2;2), (1;2),* ***(0;2)****, (2;2), (1;2)… Две дроби* $\frac{299}{201}$ *и* $\frac{297}{200}$ *удовлетворяют требованию инварианта. Проверим, какая из дробей больше. Для сравнения дробей можно поделить уголком числитель на знаменатель.*

Иначе можно решить сравнение так:

$$\frac{299}{201} \vee \frac{297}{200} \Leftrightarrow 299\cdot 200 \vee 297\cdot 201 \Leftrightarrow (297+2)\cdot 200 \vee 297\cdot(200+1) \Leftrightarrow 2\cdot 200 \vee 297 \Leftrightarrow 400 \vee 297 \Leftrightarrow 400 > 297$$

Доказано, $\frac{299}{201} > \frac{297}{200}$. *Ответ:* $\frac{299}{201}$. *Дадим развёрнутый ответ к задаче.*

Отв.а)нет. б)нет, доказан инвариант: остаться могут только два числа с остатками 0и2, а проверяемые кандидаты имеют одинаковые остатки; 3) $\frac{299}{201}$. Использован эвристический «принцип крайнего»: проверены сначала максимальные возможные дроби, а затем выбраны из них те, которые удовлетворяют инварианту.

1.54. (Я2020,В24.19). На доске было выписано несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 3. а)Может ли сумма всех оставшихся чисел равняться 11, если сначала по одному разу были выписаны числа 2,3,4, 5,6,7,8,9,10,11? б)Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 24, если сначала по одному разу были выписаны все натуральные числа от 100 до 151 включительно? в)Известно, что на доске остались ровно два числа, а сначала по одному разу были выписаны все натуральные числа от 100 до 151 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на другое из них?

Отв. а) да. б) нет, доказан инвариант: остаться могут только два числа с остатками 0 и 1, а проверяемые кандидаты не удовлетворяют инварианту; 3)1,5.

1.55. (Я2020,В26.19). На доске было выписано несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 5. а) Может ли сумма всех оставшихся чисел равняться 20, если сначала по одному разу были выписаны числа 2,3,4, 5,6,7,8,9,10,11,12,13? б)Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 45, если сначала по одному разу были выписаны все натуральные числа от 103 до 208 включительно? в) Известно, что на доске остались ровно два числа, а сначала по одному разу были выписаны все натуральные числа от 103 до 208 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на другое из них?

Решение: задачу а) можно решить подбором, группируя данные числа по два так, чтобы суммы двух были кратны 5. Но с первой попытки может и не получиться, тогда возникает проблема: то ли вообще нельзя, то ли мы неудачно группировали и надо продолжать перебор? Ещё сложнее, если вообще возможно, решить перебором задачу б), тем более в). Поэтому мы начнём уже с задачи а) применять общий приём, основанный на рассмотрении остатков чисел. Для обнаружения закономерности проведём численный эксперимент: выпишем данные числа, а под ними остатки от деления на 5.

2	3	4	5	6	**7**	8	9	10	11	12	**13**
2	3	4	0	1	**2**	3	4	0	1	2	**3**

Сумма 20 может получиться при суммировании 7+13, 8+12, 9+11, других вариантов нет. Проверим, например, первый вариант. Группируя числа с остатками 2и3, 4и1, 0и0, 3и2,4и1 и, затем, стирая их, получим оставшиеся числа 7и13. Т.е. сумма оставшихся чисел равна 20.

Аналогично проверяется второй вариант 8+12, для этого группируем числа с остатками 2и3, 4и1, 0и0, 2и3,4и1.

2	3	4	5	6	7	**8**	9	10	11	**12**	13
2	3	4	0	1	2	**3**	4	0	1	**2**	3

Т.е. сумма оставшихся чисел равна 20. Ответ а) да, см. пример.

Б) Проведём численный эксперимент и рассмотрим остатки от деления всех данных 106 чисел на 5 с целью выявления закономерности:

103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	…	201	202	203	204	205	206	207	208
3	4	0	1	2	3	4	0	1	2		1	2	3	4	0	1	2	3

Обнаружен период повторяющихся остатков $T_1(34012)$ *из пяти цифр. Этот период повторяется 21 раз и ещё вне этих периодов отдельно цифра 3. Для получения суммы, кратной 5 важны только остатки слагаемых (0+0),(1+4), (2+3), других вариантов нет. Поэтому безразлично, какие конкретно слагаемые числа участвуют в суммировании, имеет значение только их остатки. Если это так, организуем суммирование чисел внутри первого периода с остатками 3и2, 4и1, останется число с остатком 0, его просто не с чем сложить. Повторив эту операцию в каждом из 21 периодов и стерев числа (в сумме кратные 5), получим 21 ноль и 3.Сгруппируем 21 ноль в 10 пар и, стерев суммы, получим неизменные,* ***инвариантные остатки 0и3.***

Открытый нами инвариант поможет дорешать задачу б). Рассмотрим пары чисел, о которых спрашивается в задаче: (103;148), (104;149),

(105;150),…(163;208). Для наглядности разместим пары в таблицу, а в строке под ними укажем остатки:

103;148	104;149	105;150	106;151	107;152	108;153	…	162;207	163;208
3;3	4;4	0;0	1;1	2;2	3;3		2;2	3;3

Наблюдение показывает, что остатки в каждой из 61-й пары одинаковые, а согласно инварианту, могли остаться только числа с остатками 0 и 3. Нет необходимости проверять все 61 пару. Можно провести следующее обоснование замеченной закономерности. Первая пара имеет равные остатки 3 и 3, вторая пара *получена из первой прибавлением к каждому числу по 1, это приведёт увеличение каждого остатка на1, равенство не нарушится. Третья пара получена из второй прибавлением к каждому числу по 1, но так как 5 делится на 5 с остатком 0, то у третьей пары остатки будут 0 и 0. Далее процедура повторяется.* ***Ответ:*** *на доске не остаться ровно два числа, разность между которыми равна 45, если сначала по одному разу были выписаны все натуральные числа от 103 до 208 включительно.*

В) Из данных чисел:103,104,…208 требуется составить максимальную дробь, причём и числитель и знаменатель должны удовлетворять доказанному инварианту. Т.о. дробь должна удовлетворять двум требованиям: максимальности и инвариантности остатков. Рассмотрим две цепочки строго убывающих дробей, начиная от самой большой дроби:

$\frac{208}{103}>\frac{208}{104}>\frac{208}{105}>\frac{208}{106}>\frac{208}{107}>\ldots$ *и* $\frac{208}{103}>\frac{207}{103}>\frac{206}{103}>\frac{205}{103}>\frac{204}{103}>\ldots$ *Остатки:*

(3;3), (3;4), ***(3;0)****,(3;1),(342)… и (3;3), (2;3), (1;3),* ***(0;3),*** *(4;3)… У двух дробей* $\frac{208}{105}$ *и* $\frac{205}{103}$ *числитель и знаменатель удовлетворяют требованию инварианта. Проверим, какая из дробей больше. Для сравнения дробей можно поделить уголком числитель на знаменатель.*

Иначе можно решить сравнение так:

$$\frac{208}{105}\vee\frac{205}{103}\Leftrightarrow 208\cdot 103\vee 205\cdot 105\Leftrightarrow (205+3)\cdot 103\vee 205\cdot(103+2)\Leftrightarrow 3\cdot 103\vee 205\cdot 2\Leftrightarrow 309\vee 410\Leftrightarrow 309<410$$

Доказано, $\frac{208}{105}<\frac{205}{103}$. *Ответ:* $\frac{205}{103}$.

Отв. а) **да**, см. пример, при этом стёрли числа, остатки которых группируются так 1+4,2+3,0+0. б) нет, доказан инвариант: остаться могут только два числа с остатками 0и3, а проверяемые кандидаты имеют одинаковые остатки; 3) $\frac{205}{103}$. Использован эвристический «принцип крайнего»: проверим сначала максимальные возможные дроби, а затем выберем из них те, которые удовлетворяют инварианту.

1.56. (Я2020,В27.19). На доске было выписано несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 5. а) Может ли сумма всех оставшихся чисел равняться 24, если сначала по одному разу были выписаны числа 3,4, 5,6,7,8,9,10,11,12,13,14? б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 45, если сначала по одному разу были выписаны все натуральные числа от 53 до 158 включительно? в) Известно, что на доске остались ровно два числа, а сначала по одному разу были выписаны все натуральные числа от 53 до 158 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на другое из них?

Отв. а) нет. (Если бы остались 10 и 14, то сумма стёртых чисел равна 78, что не кратно 5. Если бы остались 11 и 13, то сумма стёртых чисел была бы равна 78, что не кратно 5. Иначе можно рассуждать так: если бы остались 10 и 14, то группировка остальных чисел привела к тому, что числам с остатками 0 и3 невозможно сгруппироваться. А, если бы остались 11 и 13, то группировка остальных чисел привела к тому, что числам с остатками 4 и 4 невозможно сгруппироваться). б) нет, доказан инвариант: остаться могут только два числа с остатками 0 и 3, а проверяемые кандидаты имеют одинаковые остатки; 3) $\frac{155}{53}$.

1.57. (ЕГЭ2010.В150). Перед каждым из чисел 14,15, …20 и 6,7,8,9,10 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 35 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге? Отв. 1 и 875. *Подсказка: заметим инвариант: чётность суммы инвариантна относительно изменения знака слагаемых.*

Решение: рассмотрим сумму

$$\begin{aligned}&(\pm14\pm6)+(\pm14\pm7)+(\pm14\pm8)+(\pm14\pm9)+(\pm14\pm10)+\\&+(\pm15\pm6)+(\pm15\pm7)+(\pm15\pm8)+(\pm15\pm9)+(\pm15\pm10)+\\&+(\pm16\pm6)+(\pm16\pm7)+(\pm16\pm8)+(\pm16\pm9)+(\pm16\pm10)+\\&+(\pm17\pm6)+(\pm17\pm7)+(\pm17\pm8)+(\pm17\pm9)+(\pm17\pm10)+\\&+(\pm18\pm6)+(\pm18\pm7)+(\pm18\pm8)+(\pm18\pm9)+(\pm18\pm10)+\\&+(\pm19\pm6)+(\pm19\pm7)+(\pm19\pm8)+(\pm19\pm9)+(\pm19\pm10)+\\&+(\pm20\pm6)+(\pm20\pm7)+(\pm20\pm8)+(\pm20\pm9)+(\pm20\pm10)\end{aligned}$$

Наибольшее значение она примет, если перед всеми числами первой группы поставить «+», а перед всеми числами второй группы поставить «-», тогда сумма равна $5\cdot(14+15+16+17+18+19+20)+7\cdot(6+7+8+9+10)=5\cdot129+280=875$. *Заметим, что это число нечётное. Ранее было доказано, что сумма и разность целых чисел имеет одинаковую чётность, т.е. они одновременно чётны или нечётны. Если в сумме заменить число* a *на* –a*, то сумма изменится на* $2|a|$*, т.е. на чётное число, в результате нечётность суммы сохранится. Нечётность суммы инвариантна относительно изменения знаки слагаемых. Следовательно, расставляя знаки «-» перед некоторыми числами, мы добъёмся уменьшения максимальной суммы 875 на чётное число. А наименьшее нечётное натуральное число – это 1. Выясним, возможно ли расстановкой знаков «+» и «-» перед числами получить в сумме 1?*
Как найти пример такой расстановки знаков«+» и «-» в алгебраической сумме, чтобы она стала равной 1 или -1? Если решать перебором, то для первого набора существует $2^7=128$*, для второго набора* $2^5=32$*, всего 4096 перестановок, конечно, может повезти с первого раза, но может и с со 4096-ого… Чтобы найти закономерности управления этой суммой, поставим численный эксперимент: возьмём, например, простое чередование знаков в первом и втором наборе чисел: -14;+15;-16;+17;-18;+19;-20*
и -6;+7;-8;+9;-10. Образуем 35 чисел, указанных в условии задачи, и сложим их:

$$\begin{aligned}&(-14+6)+(-14-7)+(-14+8)+(-14-9)+(-14+10)+\\&+(+15+6)+(+15-7)+(+15+8)+(+15-9)+(+15+10)+\\&+(-16+6)+(-16-7)+(-16+8)+(-16-9)+(-16+10)+\\&+(+17+6)+(+17-7)+(+17+8)+(+17-9)+(+17+10)+\\&+(-18+6)+(-18-7)+(-18+8)+(-18-9)+(-18+10)+\\&+(+19+6)+(+19-7)+(+19+8)+(+19-9)+(+19+10)+\\&+(-20+6)+(-20-7)+(-20+8)+(-20-9)+(-20+10)=\\&=5(-14+15-16+17-18+19-20)+7(6-7+8-9+10)=\\&=5(-14+15-16+17-18+19-20)-7(-6+7-8+9-10)=\\&=5x-7y.\end{aligned}$$

Здесь через x обозначено значение первого набора чисел с какой-либо выбранной (не обязательно этой) расстановкой знаков, а через y обозначено значение второго набора чисел с какой-либо выбранной (не обязательно этой) расстановкой знаков. С изменением расстановки знаков x, y будут принимать различные значения. Первая скобка при различных расстановках знаков может принимать только нечётные значения, т.к. там три нечётных числа, сумма или разность двух нечётных есть чётное число, осталось одно нечётное и несколько чётных, их алгебраическая сумма есть нечётное число. Итак, x может быть только нечётным. Вторая скобка при различных расстановках знаков может принимать только чётные значения. Итак, y может быть только чётным. По условию задачи должно быть $5x-7y=1$ *или* $5x-7y=-1$. *Эти диофантовы уравнения нужно решить в нечётных x и чётных y. В задаче 1.22.для этих уравнений найдены общие решения и выписаны некоторые частные решения. Для* $5x-7y=1$ *требованию нечетности x и чётности y удовлетворяют, например, такие решения:*

n	*0*	*-2*	*2*

x	***3***	***-11***	***17***
y	***2***	***-8***	***12***

Анализ записанных пар(x,y) показывает, что, хотя y=2 и принадлежит множеству значений выражения $\pm6\pm7\pm8\pm9\pm10$ (см. задачу 1.33.), но соответствующее x=3 не *принадлежит множеству значений выражения* $\pm14\pm15\pm16\pm17\pm18\pm19\pm20$ (в этом можно убедиться аналогично, построив соответствующий граф). Далее проверяем пары x=-11,y=-8, x=-11=-20+19+18+17-16-15-14 (информация взята с соответствующего графа), y=-8=-10+9-8+7-6, получена искомая расстановка знаков:5x-7y=5*(-11)-7*(-8)=1.
Далее проверяем ещё одну пару x=17,y=12, x=17=-20+19+18+17-16-15+14 (информация взята с соответствующего графа), y=12=10+9-8+7-6, получена искомая расстановка знаков:5x-7y=5*(17)-7*(12)=1.

Решения уравнения $5x-7y=1$ *получены при чётных n, т.е.* $\begin{cases} x=14n+3, n\in Z \\ y=10n+2, \end{cases}$ *- это общее решение уравнения* $5x-7y=1$, *удовлетворяющее дополнительным требованиям нечётного x и чётного y. С помощью предложенного приёма можно получать и другие расстановки знаков, для которых в итоге получается 1, т.е. минимальное значение модуля суммы 35 чисел.*
Покажем, например, как этот метод работает для другого уравнения $5x-7y=-1$.
Для уравнения $5x-7y=-1$ *требованию нечетности x и чётности y удовлетворяют, например, такие решения:*

n	*1*	*-1*	*-3*
x	***11***	***-3***	***-17***
y	***8***	***-2***	***-12***

Они получены при нечётных n, т.е. $\begin{cases} x=7(2n-1)+4, n\in Z \\ y=5(2n-1)+3, \end{cases}$ *-это общее решение уравнения* $5x-7y=-1$, *удовлетворяющее требованиям нечётного x и чётного y.*
Решая задачу 1.33. мы получали подходящие расстановки знаков, например, y=-2=+10+9-8-7-6; y=8=+10-9+8-7+6; y=-12=-10-9+8-7+6.Теперь ясно, чему должен быть равен ***первый*** *знакопеременный набор чисел, т.е.для каждого y надо подобрать соответствующий ему x: если y=-2,то x не существует;*
если y=8=+10-9+8-7+6,то x=11=14+15-16+17-18+19-20 , получена искомая расстановка знаков:
5x-7y=5*(11)-7*(8)=-1. Наконец, четвёртая расстановка знаков получается из решения y=-12=*-10-9+8-7+6*, x=-17=*-14+15-16+17-18+19-20*. Вся информация о подходящих расстановках знаков получена из рассмотрения соответствующих графов. Задача описания всех подходящих расстановок знаков, минимизирующих сумму 35 чисел, не ставилась. Ответ: 1 и 875.

1.58. (ЕГЭ2010 В.174). Перед каждым из чисел 6,7,8,9,10 и 12,13, …18 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора **прибавляют** каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 35 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге? Отв. 1 и 805. *Инвариант*: чётность суммы инвариантна относительно изменения знака слагаемых.
Решение. Обозначим $A=\pm6\pm7\pm8\pm9\pm10$ *и* $B=\pm12\pm13\pm14\pm15\pm16\pm17\pm18$, *здесь A обозначает весь граф (всё дерево) с его 32-я значениями, соответствующими конкретным расстановкам знаков «+» и «-». Аналогично, B обозначает весь граф (всё дерево) с его 128-ю значениями, соответствующими конкретным расстановкам знаков «+» и «-». Пусть* $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ *означают какой-либо конкретный путь из рёбер графа, соответствующий выбранной расстановке знаков,* $\tilde{S}_{35}$ *-сумма 35 чисел, соответствующая конкретному выбору знаков* $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ *в первом и втором наборах. Рассмотрим сумму 35 чисел, в общем случае она имеет вид*

$$S_{35}=\begin{array}{l}(\pm6\pm12)+(\pm6\pm13)+(\pm6\pm14)+(\pm6\pm15)+(\pm6\pm16)+(\pm6\pm17)+(\pm6\pm18)+\\(\pm7\pm12)+(\pm7\pm13)+(\pm7\pm14)+(\pm7\pm15)+(\pm7\pm16)+(\pm7\pm17)+(\pm7\pm18)+\\(\pm8\pm12)+(\pm8\pm13)+(\pm8\pm14)+(\pm8\pm15)+(\pm8\pm16)+(\pm8\pm17)+(\pm8\pm18)+\\(\pm9\pm12)+(\pm9\pm13)+(\pm9\pm14)+(\pm9\pm15)+(\pm9\pm16)+(\pm9\pm17)+(\pm9\pm18)+\\(\pm10\pm12)+(\pm10\pm13)+(\pm10\pm14)+(\pm10\pm15)+(\pm10\pm16)+(\pm10\pm17)+(\pm10\pm18)\end{array}$$

Если перед каждым слагаемым взять знак +, то получим максимальное значение $\max S_{35}=\max\left(7\cdot\sum\widetilde{A}+5\cdot\sum\widetilde{B}\right)=7(6+7+8+9+10)+5(12+13+...+18)=$
$7\cdot\frac{6+10}{2}\cdot5+5\cdot\frac{12+18}{2}\cdot7=35\cdot23=805.$

Получили нечётную сумму. Если, например, в А заменить у 6 знак на противоположный, то это приведёт к изменению знаков в 7 слагаемых в $\widetilde{S}_{35}$*, но замена числа а на –а изменяет сумму на чётное число2\a\ в какую-либо сторону (уменьшения или увеличения). Семикратное изменение суммы 805 на 2\a\ не изменит нечётности суммы.*

Наименьший модуль нечётного числа равен 1. Проверим, может ли S_{35} *при каком либо распределении знаков + и - принять значение 1 или -1. Отметим, что ни в Критериях ЕГЭ, ни в пособиях для подготовки к профильному экзамену (Ященко И.В., Лысенко Ф.Ф., Сергеев И.Н., Прокофьев) нет указаний на то, как находить требуемую расстановку знаков, обеспечивающее* $\min|S_{35}|$. *Если при составлении этой задачи предполагался перебор или случайное составление нужной расстановки знаков, то тогда диагностическая ценность этой задачи минимальна; если же предполагалось применение алгоритма, то необходимо его предъявить. Восполним этот пробел.*

Было показано, что $\widetilde{S}_{35}=\left(7\cdot\sum\widetilde{A}+5\cdot\sum\widetilde{B}\right)$. *Требуется, чтобы* $\widetilde{S}_{35}=1$ *или* $\widetilde{S}_{35}=-1$. *Мы получаем два диофантовых уравнения в целых числах:* $7x+5y=1$ *(1) и* $7x+5y=-1$ *(2), где х равен сумме чисел первого набора с конкретным выбором знаков + и -, т.е.* $x=\sum\widetilde{A}$, *аналогично* $y=\sum\widetilde{B}$. *Сделаем два наблюдения: знакопеременная сумма чисел первого набора принимает только чётные значения, т.к. там два нечётных числа, а сумма и разность нечётных чисел есть число чётное, остальные числа там чётные. Второе: знакопеременная сумма чисел второго набора принимает только нечётные значения (там три нечётных числа). Итак, ищем целые решения уравнений (1), (2) (х,у), где х –чётно, у- нечётно. Найдём возможные значения (х,у) для первого уравнения, используя метод остатков при делении на 5.* $7x+5y=1\Leftrightarrow5y=1-7x$ *Левая часть делится на 5, значит и правая должна делиться на 5, рассуждаем про х по модулю 5, т.е. рассматриваем остатки от деления х на 5:* $x\in\{5n;5n+1;5n+2;5n+3;5n+4\}$

$$\begin{cases}x=5n\\5y=1-35n\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing;\begin{cases}x=5n+1\\5y=1-7(5n+1)\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing;\begin{cases}x=5n+2\\5y=1-7(5n+2)\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing;\begin{cases}x=5n+3\\5y=1-7(5n+3)=-20-35n\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x=5n+3\\y=-4-7n\end{cases};n\in Z.\begin{cases}x=5n+4\\y=1-7(5n+4)\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing.$$

Найдено общее решение уравнения (1) $\begin{cases}x=5n+3\\y=-4-7n\end{cases};n\in Z$ *учитывая дополнительно, что х –чётно, у-нечётно, что возможно только при нечётных n=2k-1, получаем:* $\begin{cases}x=5(2k-1)+3=10k-2\\y=-4-7(2k-1)=-14k+3\end{cases};k\in Z$. *Это* ***необходимое*** *условие на (х,у),* ***достаточным*** *условием является принадлежность х множеству значений* $A=\pm6\pm7\pm8\pm9\pm10$, *т.е.* $x\in E(A)$, *и, одновременно,* $y\in E(B)$, *где* $B=\pm12\pm13\pm14\pm15\pm16\pm17\pm18$.
С помощью построения графа А (см.предварительно решённую задачу 1.33) определим множество значений $E(A)=\{\pm2;\pm4;\pm6;\pm8;\pm10;\pm12;\pm14;\pm20;\pm22;\pm24;\pm26;\pm28;\pm40\}$. *Аналогичным построением определяем* $E(B)=$
$\{\pm3;\pm5;\pm7;\pm9;\pm11;\pm13;\pm15;\pm17;\pm19;\pm21;\pm23;\pm25;\pm27;\pm29;\pm35;\pm37;\pm39;\pm41;\pm43;\pm45;\pm47;\pm49;\pm51;\pm53;\pm55;\}\cup$

$\cup\{\pm69;\pm73;\pm75;\pm77;\pm79;\pm81;\pm105\}$. *Пересекаем бесконечное множество пар* $\{10k-2;-14k+3;k\in Z\}$ *с соответствующими множествами* $E(A)$ *и* $E(B)$. *Сколько всего расстановок знаков удовлетворяет условию задачи? Для этого проще всего посчитать, сколько чисел вида* $10k-2;k\in Z$ принадлежат $E(A)$. *Результаты удобно записать в таблицу:*

	k	*0*	*-1*	*1*	*-2*	*2*	*-3*	*3*	*4*

x	10k-2	-2	-12	8	-22	18∅	-32∅	28	38∅
y	-14k+3	3	17	-11	31∅	-25	45	-39	-53

Как видим, ***четыре*** *расстановки знаков минимизируют модуль суммы* S_{35}*, выпишем их* ***все:***

1) x=-2=10+9-8-7-6; y=3=-18-17-16+15+14+13+12;
2) x=8=-6+7+8+9-10; y=-11=-12+13-14-15+16-17+18;
3) x=-12=+6-7+8-9-10; y=17=-12+13+14-15+16-17+18;
4) x=28=-6+7+8+9+10; y=-39=-12-13-14-15+16+17-18.

Уравнение $7x+5y=-1$ *даёт корни, чётные x и нечётные y:*

	k	0	-1	1	-2	2	-3	3	4
x	10k+2	2	-8	12	-18∅	22	-28	32∅	-38∅
y	-14k-3	-3	11	-17	25	-31∅	39	-45	53

которым соответствуют подходящие расстановки знаков; все ***четыре*** *расстановки знаков отличаются от найденных, уже знакомых, противоположными знаками:*

5) x=2=-10-9+8+7+6; y=-3=+18+17+16-15-14-13-12;
6) x=-8=+6-7-8-9+10; y=11=+12-13+14+15-16+17-18;
7) x=12=-6+7-8+9+10; y=-17=+12-13-14+15-16+17-18;
8) x=-28=+6-7-8-9-10; y=39=+12+13+14+15-16-17+18.

Таким образом, дан полный набор ***восьми*** *расстановок знаков, минимизирующих модуль суммы* S_{35}*, и сконструирован алгоритм для нахождения искомых расстановок знаков. В Критериях ЕГЭ, тренировочных пособиях по подготовке к профильному экзамену не обнаруживаются указания к построению искомых расстановок знаков. Предложенный способ восполняет этот пробел.*

1.59. (МЗ). Перед каждым из чисел А: 3,4,5,6,7,8,9,10,11 и В : 13,14,15,16,17 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 45 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге? Каким количеством способов можно реализовать наименьшую по модулю сумму? Отв. 0 ; 990; 8. *Инвариант*: чётность суммы инвариантна относительно изменения знака слагаемых.

Решение. $S_{45}=$

$$=(\pm3\pm13)+(\pm3\pm14)+(\pm3\pm15)+(\pm3\pm16)+(\pm3\pm17)+$$
$$+(\pm4\pm13)+(\pm4\pm14)+(\pm4\pm15)+(\pm4\pm16)+(\pm4\pm17)+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$+(\pm10\pm13)+(\pm10\pm14)+(\pm10\pm15)+(\pm10\pm16)+(\pm10\pm17)+$$
$$+(\pm11\pm13)+(\pm11\pm14)+(\pm11\pm15)+(\pm11\pm16)+(\pm11\pm17)$$

$$\max S_{45}=5(3+4+5+6+7+8+9+10+11)+9(13+14+15+16+17)=5\frac{3+11}{2}\cdot9+9\cdot\frac{13+17}{2}\cdot5=990.$$

$\min S_{45}=5(-3-4-5-6-7-8-9-10-11)+9(-13-14-15-16-17)=-990$. *Но все ли значения из области сумм* $S_{45}\in[-990;990]$ *могут действительно приниматься? Этот вопрос нуждается в дополнительном изучении. Поскольку* $\max S_{45}=990$ *является чётным числом, а мы знаем, что при замене а на –а сумма изменяется на 2|a|, то появляется гипотеза: можно ли, уменьшая сумму на чётные числа, уменьшить её до нуля? Если удастся построить соответствующую расстановку знаков в наборах чисел, то гипотеза будет доказана. Выясним, возможно ли для каких-нибудь конкретных рёбер графов* $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$

$$S_{45}=5\sum\tilde{A}+9\sum\tilde{B}=0\Leftrightarrow 5x+9y=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=9n;n\in Z,x-\text{нечётно.}\\ y=-5n;n\in Z,y-\text{нечётно.}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=9(2k-1)=18k-9;k\in Z,\\ y=-5(2k-1)=-10k+5;k\in Z,\end{cases}$$

	k	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	5
x	18k-9	-9	-27	9	-45	27	-63	45	-81∅	63	-99	81∅
y	-10k+5	5∅	15	-5∅	25∅	-15	35∅	-25∅	45	35∅	55∅	-45

Знаком ∅ отмечены те значения y, которые не принадлежат множеству значений графа В, определили их путём построения графа (дерева:) $E(B)=\{\pm 9;\pm 11;\pm 13;\pm 15;\pm 17;\pm 19;\pm 21;\pm 41;\pm 43;\pm 45;\pm 47;\pm 49\}$.

Легко проверить, что $E(A)\in[-63;63]$, *по этой причине исключены значения x=-81, x=81. Остались только две пары решений диофантова уравнения, они выделены в таблице красным цветом.* $\pm 15\in E(B)$, *осталось проверить, верно ли, что* $\pm 27\in E(A)$? *Построение графа А и, таким образом, множества значений* $E(A)$, *позволит нам утверждать, что* $\pm 27\in E(A)$. *Действительно, все 4 следующие расстановки знаков встречаются в графе А: 27=11+10+9-8+7-6+5-4+3; 27=11+10+9-8-7+6+5+4-3; -27=11-10-9-8+7-6-5-4-3; -27=11-10-9-8-7-6-5+4+3;и ещё четыре расстановки знаков получим, умножив левые и правые части равенств на минус единицу. Итого получим восемь расстановки знаков. Ответ:0;990;8.*

1.60. (ЕГЭ2010). Перед каждым из чисел 10,11, …20 и 4,5,6,7,8 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора **отнимают** каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 55 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге? Отв. 1 и 1155. *Инвариант*: чётность суммы инвариантна относительно изменения знака слагаемых.

1.61. (МЗ). Перед каждым из чисел 11,12, …19 и 6,7,8,9,10 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора **отнимают** каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 45 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге? Каким количеством способов можно получить наименьшую по модулю сумму? Отв. 1 и 1035. *Подсказка: заметим инвариант: чётность суммы инвариантна относительно изменения знака слагаемых.*

1.62. (МЗ). Перед каждым из чисел 11,12, …19 и 3,4,5, 6,7,8,9 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора **прибавляют** каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 63 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге? Каким количеством способов можно получить наименьшую по модулю сумму? Отв. 1 и 1323. *Подсказка: заметим инвариант: чётность суммы инвариантна относительно изменения знака слагаемых.*

1.63. (ЕГЭ2010). Каждое из чисел 4,5, …10 умножают на каждое из чисел 10,11,12,..18 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 63 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге? Отв. 1 и 6174. *Инвариант*: чётность суммы инвариантна относительно изменения знака слагаемых.

1.64. (Предварит. ЕГЭ 2018). На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40 и меньше 100. а) Может ли на доске быть 5 чисел? б) Может ли на доске быть 6 чисел? в) На доске записаны 4 числа; какое наибольшее значение может принимать их сумма? *Отв. а) да, набор 6,7,8,9,10 – единственно возможный; б)6 чисел не может, т.к. расширение ед. набора влево или вправо приводит к нарушению условия 40<a*b<100; в) 7+8+9+10=34.*

1.65. (Я2020,В38.19). Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел -1, 2,4,-6,7,-8,-10,12. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел -1, 2,4,-6,7,-8,-10,12. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают. А)Может ли в результате получиться 0 ? Б) Может ли в результате получиться 1? В)Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Решение. А) Сумма двух чисел равна нулю тогда и только тогда, когда эти числа противоположны. В данном наборе противоположных чисел нет, никакая из восьми сумм не равна 0, следовательно, произведение отлично от нуля. Ответ: нет.

Б) Единицу можно получить только двумя способами, значит, только на двух карточках может получиться 1: -1+2 и 2-1; только на двух карточках может получиться -1: 7-8 и -8+7. Причина в том, что нечётное число 1 или -1 может получиться при сложении только чисел разной чётности. В наборе всего два нечётных числа, поэтому более четырёх указанных способа получить числа по модулю равных 1, нет. Остальные 4 карточки содержат только чётные числа, значит их сумма чётна, произведение 8 сумм чётно. Единица получена быть не может. Ответ б)нет.

1-я сторона карточки	-1	2	4	-6	7	-8	-10	12
2-я сторона карточки	2	-2	-6	4	-8	7	12	-10
сумма	1	1	-2	-2	-1	-1	2	2

В) Как получить произведение, равное 16, ясно из таблицы. Покажем, что получить меньшее произведение 8 сумм невозможно. Допустим, что это возможно, но тогда следует увеличить количество множителей с модулем **1** и одновременно уменьшить количество множителей с модулем, равным **2**. Но это невозможно, см. п.б). Ответ:16.

1.66. (Л2020,В9.19). Имеется 10 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел -2, -3,4,-5,6,-7,-8,9,10,-11. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел-2, -3,4,-5,6,-7,-8,9,10,-11. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные десять сумм перемножают. А) Может ли в результате получиться 0? Б) Может ли в результате получиться отрицательное число? В) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться? Отв. а)нет. б)да. в)25. *Подсказка:*

-2	**-3**	**4**	**-5**	**6**	**-7**	**-8**	**9**	**10**	**-11**
-3	**-2**	**-5**	**4**	**-7**	**6**	**9**	**-8**	**-11**	**10**
-5	**-5**	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**	**1**	**1**	**-1**	**-1**

При «исправлении» первых дух столбцов произведение становится больше 36.

1.67. (Л2020,В10.19). Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел 3,-5,6,-7,-8,9,10,-11. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 3,-5,6,-7,-8,9,10,-11. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают. А) Может ли в результате получиться 0 ? Б) Может ли в результате получиться -1? В) Какое наибольшее целое отрицательное число может в результате получиться? Отв. а) нет; б) нет; в)-8.

1.68. Найдите последнюю цифру числа $1234567891011121314151617^{1920212223242526272831}$.

Решение. Сначала докажем, что n^1 и n^5 оканчиваются на одну и ту же цифру. Это утверждение эквивалентно утверждению о делимости $n^5 - n \vdots 10$. Из разложения на множители $n(n^4-1)=n(n^2-1)(n^2+1)=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)(n^2+1)$ получаем делимость на 2, для доказательства делимости на 5, рассуждаем по модулю 5: в зависимости от остатков при делении на 5 все натуральные числа разбиваются на непересекающиеся классы чисел вида $5k$; $5k+1$; $5k+2$; $5k+3$; $5k+4$. Подставляя поочерёдно числа из каждого класса в разложение $(n-1)\cdot n\cdot(n+1)(n^2+1)$, будем получать множители, кратные 5. Поскольку 2 и 5 взаимно простые, то делимость на 10 доказана, а значит n^1 и n^5 оканчиваются на одну и ту же цифру. Результат можно обобщить в нескольких направлениях: $n^1; n^5; n^9; \ldots n^{1+4k}$ оканчиваются на одну и ту же цифру; $n^2; n^6; n^{10}; \ldots n^{2+4k}$ оканчиваются на одну и ту же цифру; $n^3; n^7; n^{11}; \ldots n^{3+4k}$ оканчиваются на одну и ту же цифру; последняя цифра степени числа периодически повторяется с периодом 4, поэтому для решения задачи важен только остаток от деления показателя степени на 4, в решаемой задаче он равен 3. В основании степени для решения задачи имеет значение только разряд единиц, т.е. цифра 7. На основании доказанных утверждений задача сведена к следующей: на какую цифру оканчивается число 7^3. Ответ:3. (Для решения были использованы задачи БЗ 1,2).

1.69.(Л.2020.В.5.19. Производственное помещение имеет форму прямоугольного параллелепипеда, длины рёбер которого выражаются целыми числами. Это помещение заполняют контейнерами размером 1м*1м*6м так, что грани контейнеров параллельны граням помещения. А) Могло ли случиться так, что помещение объёмом *60м. куб.* невозможно полностью заполнить контейнерами? Б) Могло ли случиться так, что в помещении объёмом *500 куб.м.* невозможно разместить 83 контейнера? В)Какой наибольший процент объёма любого такого помещения, объёмом не менее 700 *куб.м.* гарантированно удастся заполнить контейнерами, при условии, что объём выражается чётным числом кубических метров?

Решение а). В задаче единицей измерения объёма является **контейнер размером 1м*1м*6м, поэтому рассуждаем по модулю 6, т.е. рассматриваем остатки при делении на 6.** Если одно из измерений кратно 6, то заполняемость помещения будет 100%. Если же измерения представляют собой числа $6x + r_x;\ \ 6y + r_y;\ \ 6z + r_z;\ \ r_x, r_y, r_z \in \{0;1;2;3;4;5\}$, где $r_x, r_y, r_z \in \{0;1;2;3;4;5\}$-ненулевые остатки, то появятся «пустоты». Рассмотрим различные разложения числа 60 на три натуральных множителя: $60 = 1\cdot 1\cdot 60 = 1\cdot 30\cdot 2 = 60\cdot 1\cdot 1 = 1\cdot 12\cdot 5 = 1\cdot 6\cdot 10 = 2\cdot 2\cdot 15 = 2\cdot 3\cdot 10$. В первых 5 случаях заполняемость помещения будет 100%, например, в первом случае контейнеры следует разместить так, чтобы наибольшее ребро длиной 6 было параллельно оси аппликат; во втором случае- вдоль оси ординат, в третьем- вдоль оси абсцисс. А в шестом случае контейнеры сможем разместить только вертикально, на первом уровне (в первом слое) уместятся 4 контейнера, на втором уровне – ещё 4 контейнера, всего будет заполнено 48 куб.м., останется незаполненным 12 куб.м., заполняемость составит 80%, а в седьмом случае – 60%. Ответ а) да.

Б) Рассмотрим различные разложения числа 500 на три натуральных множителя: $500 = 1\cdot 1\cdot 500 = 10\cdot 10\cdot 5 = 25\cdot 2\cdot 10 = 1\cdot 50\cdot 10 = 2\cdot 2\cdot 125$. Только в первом случае можно разместить 83 контейнера суммарным объёмом 498 куб.м., расположив из вертикально вдоль оси аппликат, незаполненными останутся 2 куб.м. Во всех остальных случаях объём «пустот» вычисляется, и он будет больше 2куб.м. Ответ: да.

В)Для удобства рассуждения рассмотрим сначала числовой пример, а затем перейдём к общим рассуждениям. Пусть измерения помещения 6;7=6+1; 8=6+2, тогда в плоскости XOY прямоугольник 6на7 плотно упаковывается прямоугольниками 1на6 параллельно оси абсцисс или ординат, второй и последующие слои упаковываются так же; в этом случае заполняемость 100%. Пусть теперь измерения помещения 7=6+1;8=6+2; 9=6+3, тогда в плоскости XOY в прямоугольнике 7на8 при любой упаковке остаётся прямоугольник 1на2, и, соответственно, прямоугольный параллелепипед размером 1на2на1, который невозможно заполнить. После заполнения 9 слоёв над прямоугольником 1на2 вырастет прямоугольный параллелепипед размером 1на2на9, в который поместятся два контейнера, оставив пустыми прямоугольный параллелепипед размером 1на2на3. Заметим, что 1,2,3 – это остатки при делении на 6 измерений исходного помещения. Аналогично, в прямоугольном параллелепипеде с объёмом, равным $(6x + r_x)\bullet\ (6y + r_y)\bullet\ (6z + r_z)$ после заполнения контейнерами останутся «пустоты» с объёмом, равным $r_x \bullet r_y \bullet r_z$, где $r_x, r_y, r_z \in \{0;1;2;3;4;5\}$. По условию, хотя бы один из остатков – чётный, тогда наибольшее значение $r_x \bullet r_y \bullet r_z$ примет при остатках:4,5,5,т.е. 100. Вычислим процент заполнения помещения в этом наихудшем случае, это будет процент наименьшей заполняемости, или нижняя граница заполняемости. Заметим, что по условию, $V = (6x + r_x)\bullet\ (6y + r_y)\bullet\ (6z + r_z) \ge 700 \Rightarrow \frac{1}{V} \le \frac{1}{700}$. Посчитаем долю незаполненных кубометров в помещении: $\frac{r_x \bullet r_y \bullet r_z}{V} \le \frac{100}{700} = \frac{1}{7}$, значит доля заполненных кубометров в помещении больше или равна $\ge 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$, что составляет в процентах $\frac{6}{7} \cdot 100\% = \frac{600}{7}\% = 85\frac{5}{7}\%$.Ответ: $85\frac{5}{7}\%$.

1.70. (Л.2020.В.6.19). Производственное помещение имеет форму прямоугольного параллелепипеда, длины рёбер которого выражаются целыми числами. Это помещение заполняют контейнерами размером 1м*1м*5м так, что грани контейнеров параллельны граням помещения. А) Могло ли случиться так, что помещение объёмом *240м. куб.* невозможно полностью заполнить контейнерами? Б) Могло ли случиться так, что в помещении объёмом *1024 куб.м.* невозможно разместить 200 контейнера?

В)Какой наибольший процент объёма любого такого помещения, объёмом не менее 864 *куб.м.* гарантированно удастся заполнить контейнерами? Отв. а)нет; б)да; в) $92\frac{16}{27}\%$

1.71. (Л2017.В13.19). Все члены последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 9 раз больше, либо в 9 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 19399. А) Может ли последовательность состоять из двух членов? Б) Может ли последовательность состоять из трёх членов? В) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Решение. А) Построим разветвляющийся граф с первым числом x. На втором шаге возможны значения 9x или $\frac{x}{9}$. На третьем шаге от числа 9x отходят две возможности 81x или x; на третьем шаге от числа $\frac{x}{9}$ отходят две возможности x или $\frac{x}{81}$. А)Для последовательности из двух чисел имеем совокупность уравнений $\left[\begin{array}{l} x+9x=19399 \\ x+\frac{x}{9}=19399, \end{array}\right.$ которая не имеет решений в натуральных числах.

б)Для последовательности из трёх чисел имеем совокупность уравнений $\left[\begin{array}{l} x+9x+81x=19399, \\ x+9x+x=19399, \\ x+\frac{x}{9}+x=19399, \\ x+\frac{x}{9}+\frac{x}{81}=19399, \end{array}\right.$ в которой только третье уравнение имеет решение в натуральных числах: $x+\frac{x}{9}+x=19399 \Leftrightarrow \frac{19x}{9}=19399 \Leftrightarrow x=9189$. Ответ: да: 9189, 1021, 9189. В)При фиксированной сумме членов, наибольшее количество членов будет при минимальных значениях самих слагаемых. Минимальное натуральное число 1, следовательно, члены последовательности должны быть как можно ближе к 1, наименее отклоняться от 1. Существуют только две таких последовательности, наименее отклоняющиеся от единицы: 1,9,1,9,….(1) и 9,1,9,1…. (2). Замечая периодичность в чередовании членов последовательности, легко вычислим количество членов, сумма которых равна 19399. Если взять 1939 пар вида $(1+9)$ и прибавить 9, то получится 19399, иначе: $19399 = 1939 \cdot 10 + 9$

$(1+9)+(1+9)+...+(1+9)+9=19399$, всего в левой части равенства стоит $1939\cdot 2+1=3879$ слагаемых последовательности (1) или (2). Ответ: 3879.

1.72. (Л2017.В14.19). Все члены последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 7 раз больше, либо в 7 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 2745. А) Может ли последовательность состоять из двух членов? Б) Может ли последовательность состоять из трёх членов? В) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности? Ответ: а)нет; б)да, 305; в)687.Подсказка: $2745=343\cdot 8+1$

1.73. (Л2017.В15.19). Все члены последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 4раз больше, либо в 4 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 1284. А) Может ли последовательность состоять из двух членов? Б) Может ли последовательность состоять из трёх членов? В) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности? Ответ: а)нет; б)да; в)513.

1.74. (Л2020.В31.19). Имеются два многочлена от целочисленной переменной x: $p(x)=1+x^2+x^4+...+x^{2k}$; $q(x)=1+x+x^2+x^3+...+x^k$. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ также от **целочисленной переменной x, определённую для тех значений x, для которых** $q(x)\neq 0$.

А)Может ли $f(x)$ принимать нецелые значения при k=3?

Б) Может ли $f(x)$ принимать нецелые значения при k=2?

в)При каких натуральных значения k функция $f(x)$ может принимать только целые значения?

Решение **а).** Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ при k=3.

$$f(x)=\frac{1+x^2+x^4+x^6}{1+x+x^2+x^3}=\frac{1+x^2+x^4(1+x^2)}{1+x+x^2(1+x)}=\frac{(1+x^2)(1+x^4)}{(1+x)(1+x^2)}=\frac{(1+x^4)}{(1+x)}=\frac{x^4-1+2}{(1+x)}=(1+x^2)(1+x)+\frac{2}{(1+x)}.$$

Последняя дробь принимает целые значения **только при x=0,x=1**, следовательно $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ принимает целые значения **только при x=0,x=1. При всех остальных целых x кроме x=-1** $f(x)$ принимает нецелые значения. Ответ:да.

Б) Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ при k=2. $f(x)=\dfrac{1+x^2+x^4}{1+x+x^2}=x^2-x+1$, последнее равенство получено путём деления числителя на знаменатель «уголком»; справедливость равенства можно проверить умножением. Многочлен x^2-x+1 принимает только целые значения при целых x, следовательно, $f(x)$ принимает только целые значения. Ответ: нет.

В) Рассмотренный пример позволяет высказать робкую **гипотезу: при чётных k** функция $f(x)$ может принимать только целые значения. Проверим эту гипотезу.

Нам понадобится формула суммы n членов геометрической прогрессии и формула сокращённого умножения: разложение суммы нечётных степеней в произведение (она является обобщением разложения разности кубов, разности четвёртых степеней в произведение). Заметим, что сумма чётных степеней на множители не раскладывается (на множестве действительных чисел).

Рассмотрим при $x\neq\pm 1$ функцию

$$f(x)=\frac{1+x^2+x^4+...+x^{2k}}{1+x+x^2+x^3+...+x^k}=\frac{\dfrac{1(1-x^{2k+2})}{1-x^2}}{\dfrac{1(1-x^{k+1})}{1-x}}=\frac{(1-x^{2k+2})}{(1-x^{k+1})(1+x)}=\frac{(1-x^{k+1})(1+x^{k+1})}{(1-x^{k+1})(1+x)}=\frac{(1+x^{k+1})}{(1+x)};\quad x\neq\pm 1.$$

Согласно формуле сокращённого умножения $\left(1+x^{k+1}\right)$ раскладывается в произведение, если показатель степени (k+1) является нечётным, для этого достаточно чётности k=2n. Ответ: **при чётном k.**

1.75. (Л2020.В32.19). Имеются два многочлена от целочисленной переменной x: $p(x)=1+x^2+x^4+...+x^{2k}$; $q(x)=1-x+x^2-x^3+...+(-x)^k$. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ также от **целочисленной переменной x, определённую для тех значений x, для которых** $q(x)\neq 0$.

А)Может ли $f(x)$ принимать нецелые значения при k=3?

Б) Может ли $f(x)$ принимать нецелые значения при k=4?

в)При каких натуральных значения k функция $f(x)$ может принимать только целые значения?

Ответ: а)да; б)нет; в) **при чётном k.**

1.76. Найдите сумму $1+2\cdot 5+3\cdot 5^2+4\cdot 5^3+...+100\cdot 5^{99}$.

Подсказка: рассмотрите многочлен $q(x)=1+x+x^2+x^3+...+x^k$ при k=100 и найдите его производную.

1.77. (Пробн. ЕГЭ 2021). Имеются бетонные блоки трёх типов: тип А, вес 0,8т, 50 штук; тип В, вес 1т, 60 штук; тип С, вес 1,5т, 60 штук. Для их перевозки имеются 60 5-тонных машин, которые нельзя перегружать. Можно ли при этих условиях а)загрузить все блоки в 60 машин? б) загрузить все блоки в 38 машин? В)какое минимальное количество машин достаточно для перевозки всех блоков?

Решение. Перечислим все способы загрузить одну 5-тонную машину: 6А; 5В; 3С; или 5А+В; 2В+2С; 2А+2С; или 2А+В+С; А+2В+С; А+В+2С (т.е. по одному, по два, по три типа блоков в одной машине).

Анализ показывает, что только три из них: **5В; 5А+В; 2В+2С** загружают машину полностью, без недогруза, т.е.имеют признаки оптимальности. Рассмотрим три эти способа загрузки последовательно.

1) Загрузка по схеме 5В займёт 12 машин без недогруза; останется 50А и 60С, которые можно погрузить ***либо*** комбинированно:2А+2С в 25 машин плюс 4 машины с 3С,3С, 3С, 1С, всего 41 машина; ***либо*** загружать в каждую машину блоки одного типа: по 6А 8 машин плюс по 2А 1 машину, затем по 3С 20 машин, всего 41 машина.
2) Загрузка по схеме 5А+В займёт 10 машин без недогруза; останется 50В и 60С; загрузка по схеме **2В+2С** займёт 25 машин без недогруза; останется 10С, которые по схеме 3С,3С, 3С, 1С займут 4 машины, всего 39 машин. Заметим, что 1-я 2-я погрузки выполнены без недогруза, они оптимальны, их нельзя улучшить; в 5-тонную машину нельзя загрузить более 3С, поэтому для 10С необходимо минимум 4 машины, это количество неуменьшаемо. Следовательно, данная загрузка оптимальна по количеству машин, минимальное количество потребных машин равно 39. 38 машин недостаточно.
3) Загрузка по схеме **2В+2С** займёт 30 машин без недогруза; останется 50А, которые загрузятся в 8 машин по 6А и в 1 машину с 2А, всего 39 машин. Следовательно, данная загрузка тоже оптимальна по количеству машин, минимальное количество потребных машин равно 39. 38 машин недостаточно.

Ответ: а)да; б)нет. В)39.

1.78. (ЕГЭ2023,В314,№18). Из пары натуральных чисел (a,b), где a>b, за один ход получают пару

(a+b;a-b).

А)Можно ли за несколько ходов из пары (150;7) получить пару, большее число в которой равно 600?

Б)Можно ли за несколько ходов получить из пары (150;7) пару (1224;1190)?

В)Какое наименьшее a может быть в паре (a;b), из которой за несколько ходов можно получить пару(1224;1190)?

Отв. а)да;б)нет; в)612.

Решение

А)Выполним небольшой числовой эксперимент, сделав несколько разрешённых в условии шагов, для выявления закономерности и для наглядности поместим результаты в таблицу:

Номер шага	1	2	3	4	5	6	7
Полученная пара	157;143	300;14	314;286	600;28	628;572	1200 ;56	1256;1144
Поиск закономерности	$1\cdot157;1\cdot143$	$2\cdot150;2\cdot7$	$2\cdot157;2\cdot143$	$4\cdot150;4\cdot7$	$4\cdot157;4\cdot143$	$8\cdot150;8\cdot7$	$8\cdot157;8\cdot143$

Таким образом, пара с числом 600 получена. Отв. а) да.

Б)Отыскивая закономерность, замечаем, что за чётное количество шагов (2;4;6;…,2n) получаем пары:

$(2\cdot150;\quad 2\cdot7)\to(4\cdot150;\quad 4\cdot7)\to(8\cdot150;\quad 8\cdot7)\to...(2^n\cdot150;\quad 2^n\cdot7)...$, обе компоненты которых кратны 2^n.

За нечётное количество шагов (2n+1) получаем пары:

$(1\cdot157;\quad 1\cdot143)\to(2\cdot157;\quad 2\cdot143)\to(4\cdot157;\quad 4\cdot143)\to...(2^n\cdot157;\quad 2^n\cdot143)...$, обе компоненты которых кратны 2^n.

Однако, для пары **(1224;1190) это необходимое условие не выполнено.** **Ответ.б) нет.**

В)Нам известно конечное звено цепочки (1224;1190), поэтому применим метод решения задачи «с конца», т.е. метод анализа: из какой пары можно получить пару (1224;1190)? Пусть из пары натуральных чисел (x;y), тогда $\begin{cases}x+y=1224;\\x-y=1190;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=2414;\\2y=34;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1207;\\y=17;\end{cases}$ т.о.найдена пара, предшествующая требуемой паре $(1207;17)\to(1224;1190)$. Но из какой пары следует пара $(1207;17)$? Аналогично, составляя и решая систему в натуральных числах, получим $(612;595)\to(1207;17)\to(1224;1190)$. Можно ли получить пару $(612;595)$ по разрешённому алгоритму из какой-то предшествующей пары?

Предположим, что можно, тогда $\begin{cases}x+y=612;\\x-y=595;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=1207;\\2y=17;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=603{,}5;\\y=8{,}5;\end{cases}x,y\notin N\to\varnothing.$ К отрицательному ответу можно было прийти быстрее, заметив, что по доказанному ранее свойству Б31, сумма и разность натуральных чисел имеют одинаковую чётность, а в нашем случае это не так. Следовательно, наименьшее значение б***о***льшей компоненты в паре, из которой можно получить (1224;1190), это число 612. Отв. $a_{\min}=612.$

1.79. (ЕГЭ2023,В311,№18). Из пары натуральных чисел (a,b), где a>b, за один ход получают пару

(a+b;a-b).

А)Можно ли за несколько ходов из пары (50;9) получить пару, большее число в которой равно 200?

Б)Можно ли за несколько ходов получить из пары (50;9) пару (408;370)?

В)Какое наименьшее а может быть в паре (a;b), из которой за несколько ходов можно получить пару (408;370)?

Отв. а)да;б)нет; в)204.

1.80. (ЕГЭ2023,В310,№18). Из пары натуральных чисел (a,b), где a>b, за один ход получают пару

(a+b;a-b).

А)Можно ли за несколько ходов из пары (100;1) получить пару, большее число в которой равно 400?

Б)Можно ли за несколько ходов получить из пары (100;1) пару (806;788)?

В)Какое наименьшее а может быть в паре (a;b), из которой за несколько ходов можно получить пару (806;788)?

Отв. а)да;б)нет; в)403.

1.81. (ЕГЭ2016,В991,№19). Рассмотрим частное трёхзначного числа $\overline{abc}$, в записи которого нет нулей, и произведения его цифр.

А)Приведите пример числа, для которого это частное равно $\frac{113}{27}$.

Б)Можно ли это частное равняться $\frac{125}{27}$?

В)Какое наибольшее значение может принимать это частное, если оно равно несократимой дроби со знаменателем 27?

Отв. а)339;б)нет; в) $\frac{931}{27}$.

Решение

Заметим, что произведение цифр числа $1 \le a \cdot b \cdot c \le 729$. Рассмотрим частное трёхзначного числа $\overline{abc}$, в записи которого нет нулей, и произведения его цифр: $\frac{\overline{abc}}{a \cdot b \cdot c} = \frac{113}{27}$. По основному свойству дроби дробь $\frac{113}{27}$ можно представить множеством способов: $\frac{113}{27} = \frac{226}{54} = \frac{339}{81} = \frac{452}{108} = \frac{565}{135} = \ldots$, знаменатели образуются по формуле $27 \cdot n; n \in \{1;2;3;\ldots 27\}$, т.е.если искомое отношение существует, то оно находится среди этих 27 дробей, подлежащих проверке. Проверяем, совпадает ли произведение цифр трёхзначного числа в числителе дроби со знаменателем этой дроби, третья проверяемая дробь $\frac{339}{81}$ удовлетворяет требованию задачи. Дальнейшие проверки не продолжаем, т.к. достаточно предъявить одно число.

В случае требования «найти все такие числа» проверку продолжили бы до конца.

В случае требования «найти наибольшее такое число» проверку начали бы не с начала последовательности дробей, с правого конца последовательности дробей (в соответствии с эвристическим «приципом крайнего»). Отв. а)339.

Б)Чтобы найти все трёхзначные числа, подлежащие проверке, достаточно записать четыре равные дроби $\frac{125}{27}=\frac{375}{81}=\frac{625}{135}=\frac{875}{189}$ **и п**роверить, совпадает ли произведение цифр трёхзначного числа в числителе дроби со знаменателем этой дроби. Ни одна дробь не удовлетворяет требованию задачи. Отв.б)нет.

В)Требуется найти $Max\frac{\overline{abc}}{27}$ для всех цифр, отличных от нуля. Ясно, что проверке подлежат все дроби вида $\left\{\frac{111}{27};\frac{112}{27};\frac{113}{27};...;\frac{998}{27};\frac{999}{27}\right\}$, образующие возрастающую последовательность. Если нужно найти наименьшее частное, проверку начинаем слева, с начала последовательности; если нужно найти наибольшее частное, как в данной задаче, проверку начинаем справа, с конца последовательности. Если учесть, что 27 раскладывается в произведение трех натуральных множителейследующим образом: $27=3\cdot3\cdot3=1\cdot3\cdot9$, плюс 6 перестановок чисел 1,3,9, получаем всего 7 трёхзначных чисел, наибольшим является 931, оно удовлетворяет требованию задачи. Отв. в)931.

1.81. Рассмотрим частное трёхзначного числа $\overline{abc}$, в записи которого нет нулей, и произведения его цифр.

А)Приведите пример числа, для которого это частное равно $\frac{191}{42}$.

Б)Можно ли это частное равняться $\frac{193}{42}$?

В)Какое наименьшее, наибольшее значение может принимать это частное, если оно равно несократимой дроби со знаменателем 42? Отв.а)764;б)нет; в) $\frac{167}{42};\frac{761}{42}$.

1.82. **1.82. (Л.2023. В2.18.) Антон выписал четыре подряд идущих трёхзначных натуральных числа, средние цифры которых не равны нулю. Затем каждое из выписанных чисел разделил на его среднюю цифру. Сумма получившихся чисел равна $S_4(n)$, где n-первое из выписанных четырёх натуральных чисел.**

а)Может ли $S_4(n)$ быть равно 2300,5?

б)Может ли $S_4(n)$ быть равно $650\frac{17}{36}$?

в)Найдите наименьшее и наибольшее $S_4(n)$.

Решение а).

1)Начнём с численного эксперимента и вычислим несколько сумм $S_4(n)$ при различных n в поисках закономерности:

$$S_4(110)=\frac{110}{1}+\frac{111}{1}+\frac{112}{1}+\frac{113}{1}=446;\quad S_4(111)=450;\quad S_4(112)=454;\quad S_4(113)=458;$$
$$S_4(116)=\frac{116}{1}+\frac{117}{1}+\frac{118}{1}+\frac{119}{1}=470;$$
$$S_4(117)=\frac{117}{1}+\frac{118}{1}+\frac{119}{1}+\frac{120}{2}=414;$$
$$S_4(118)=\frac{118}{1}+\frac{119}{1}+\frac{120}{2}+\frac{121}{2}=375{,}5;$$
$$S_4(119)=\frac{119}{1}+\frac{120}{2}+\frac{121}{2}+\frac{122}{2}=300{,}5;$$
$$S_4(120)=\frac{120}{2}+\frac{121}{2}+\frac{122}{2}+\frac{123}{2}=243;\quad S_4(121)=245;\quad S_4(122)=247;\quad S_4(123)=249.$$

Наблюдение 1: если число десятков не увеличивается в последовательности четырёх натуральных чисел $\overline{abc};\quad \overline{ab(c+1)};\quad \overline{ab(c+2)};\quad \overline{ab(c+3)}$, то суммы $S_4(n)$ возрастают с ростом n в некотором диапазоне изменения n.

Наблюдение 2: если число десятков увеличивается в последовательности четырёх натуральных чисел $\overline{abc};\quad \overline{ab(c+1)};\quad \overline{ab(c+2)};\quad \overline{ab(c+3)}$, то суммы $S_4(n)$ убывают с ростом n в некотором диапазоне изменения n.

2)Наблюдения приводят к мысли, что последовательности четырёх натуральных последовательных чисел могут быть четырёх существенно различных типов:

-число десятков не меняется;

-число десятков увеличивается в четвёртом числе;

-число десятков увеличивается в третьем числе;

- число десятков увеличивается во втором числе. Понятно, что конкретная четвёрка чисел может принадлежать только одному из перечисленных случаев.

Приходим к формулировке четырёх гипотез относительно последовательности натуральных чисел:

$$Г_1:\overline{abc};\quad \overline{ab(c+1)};\quad \overline{ab(c+2)};\quad \overline{ab(c+3)};\quad b\neq 0;\quad c\in\{0;1;2;3;4;5;6\}.$$

$Г_2:\overline{abc};\quad \overline{ab(c+1)};\quad \overline{ab(c+2)};\quad \overline{a(b+1)0};\quad b\neq 0;\quad c=7;$ поэтому числа имеют вид

$$Г_2:\overline{ab7};\quad \overline{ab8};\quad \overline{ab9};\quad \overline{a(b+1)0};\quad b\neq 0;\quad c=7.$$

$Г_3:\overline{abc};\quad \overline{ab(c+1)};\quad \overline{a(b+1)0};\quad \overline{a(b+1)1};\quad b\neq 0;\quad c=8;$ поэтому числа имеют вид

$$Г_3:\overline{ab8};\quad \overline{ab9};\quad \overline{a(b+1)0};\quad \overline{a(b+1)1};\quad b\neq 0;\quad c=8.$$

$\Gamma_4 : \overline{abc}; \quad \overline{a(b+1)0}; \quad \overline{a(b+1)1}; \quad \overline{a(b+1)2}; \quad b \neq 0; \quad c = 9;$ поэтому числа имеют вид

$\Gamma_4 : \overline{ab9}; \quad \overline{a(b+1)0}; \quad \overline{a(b+1)1}; \quad \overline{a(b+1)2}; \quad b \neq 0; \quad c = 9.$

3)Множество из 807 четвёрок подряд идущих трёхзначных натуральных чисел, средние цифры которых не равны нулю, разбито на 4 непересекающихся класса, каждый из которых соответствует одной из гипотез.

Поэтому решение уравнения $S_4(n) = const$ будет состоять из двух этапов:

-проверка, в каком из четырёх классов последовательностей данная const может быть получена;

- перебор конечного числа вариантов для отыскания конкретного набора n,n+1,n+2,n+3.

4)Проверим, может ли число 2300,5 быть получено с помощью последовательностей, удовлетворяющих 1-ой гипотезе. $S_4(n) = 2300{,}5; \quad n - ?$

$\Gamma_1 : \overline{abc}; \quad \overline{ab(c+1)}; \quad \overline{ab(c+2)}; \quad \overline{ab(c+3)}; \quad b \neq 0; \quad c \in \{0;1;2;3;4;5;6\}.$

$$S_4(\overline{abc}) = \frac{100a + 10b + c}{b} + \frac{100a + 10b + c + 1}{b} + \frac{100a + 10b + c + 2}{b} + \frac{100a + 10b + c + 3}{b} =$$
$$= 40 + \frac{400a + 4c + 6}{b} = 40 + 400 \cdot \frac{a}{b} + \frac{4c + 6}{b} = 2300{,}5.$$

$40 + 400 \cdot \frac{a}{b} + \frac{4c+6}{b} = 2300{,}5 \Leftrightarrow 400 \cdot \frac{a}{b} + \frac{4c+6}{b} = 2260{,}5 \Leftrightarrow 400 \cdot \frac{a}{b} = 2260{,}5 - \frac{4c+6}{b}$, причём, $\frac{2}{3} \leq \frac{4c+6}{b} \leq 30$, тогда $2230{,}5 \leq 400 \cdot \frac{a}{b} \leq 2259{,}8(3) \Leftrightarrow \quad 5{,}57625 \leq \frac{a}{b} \leq 5{,}64958(3)$. Но таких цифр a,b не существует, гипотеза Γ_1 не прошла проверку и должна быть отброшена.

5)Проверим, может ли число 2300,5 быть получено с помощью последовательностей, удовлетворяющих 2-ой или 3-ей гипотезам. $S_4(n) = 2300{,}5; \quad n - ?$

$\Gamma_2 : \overline{ab7}; \quad \overline{ab8}; \quad \overline{ab9}; \quad \overline{a(b+1)0}; \quad b \neq 0; \quad c = 7.$

$$S_4(\overline{abc}) = \frac{100a + 10b + 7}{b} + \frac{100a + 10b + 8}{b} + \frac{100a + 10b + 9}{b} + \frac{100a + 10(b+1)}{b+1} =$$
$$= 40 + \frac{300a + 34}{b} + \frac{100a}{b+1} = 2300{,}5.$$

$$40 + \frac{300a + 34}{b} + \frac{100a}{b+1} = 2300{,}5 \Leftrightarrow \frac{300a + 34}{b} + \frac{100a}{b+1} = 2260{,}5 \Leftrightarrow \frac{300a}{b} + \frac{100a}{b+1} = 2260{,}5 - \frac{34}{b}.$$

Полученное диофантово уравнение в цифрах a,b решаем методом оценки:

$$3,(7)=3\frac{7}{9}=\frac{34}{9}\le\frac{34}{b}\le\frac{34}{1}=34\Rightarrow \qquad 2226{,}5\le 2260{,}5-\frac{34}{b}\le 2256{,}7(2)$$

$$\frac{300a}{b}+\frac{100a}{b+1}=2260{,}5-\frac{34}{b}\Rightarrow \qquad 2226{,}5\le\frac{300a}{b}+\frac{100a}{b+1}\le 2256{,}7(2).$$

Упростим неравенство

$$2226{,}5\le\frac{300a}{b}+\frac{100a}{b+1}\le 2256{,}7(2)\Leftrightarrow 22{,}265\le\frac{3a}{b}+\frac{a}{b+1}\le 22{,}567(2)\Leftrightarrow 22{,}265\le a\cdot\frac{4b+3}{(b+1)b}\le 22{,}567(2)$$

Последнее неравенство ни для каких цифр a,b не выполняется, как видно из таблицы вычислений, гипотеза Γ_2 не прошла проверку и должна быть отброшена. Аналогично проверяется и отбрасывается Γ_3, проделайте это в качестве упражнения.

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{4b+3}{b(b+1)}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{15}{12}$	$\frac{19}{20}$	$\frac{23}{30}$	$\frac{27}{42}$	$\frac{31}{56}$	$\frac{35}{72}$	$\frac{39}{100}$
$a\cdot\frac{4b+3}{(b+1)b};a=1$	3,5	1,8(3)	1,25	0,95	0,7(6)	0,6428	0,5535	0,486(1)	0,39
$a\cdot\frac{4b+3}{(b+1)b};a=2$	7	$\downarrow$							
$a\cdot\frac{4b+3}{(b+1)b};a=3$	10,5	$\downarrow$							
$a\cdot\frac{4b+3}{(b+1)b};a=4$	14	$\downarrow$							
$a\cdot\frac{4b+3}{(b+1)b};a=5$	17,5	$\downarrow$							
$a\cdot\frac{4b+3}{(b+1)b};a=6$	21	11	$\downarrow$						
$a\cdot\frac{4b+3}{(b+1)b};a=7$	24,5	12,8(3)	$\downarrow$						
$a\cdot\frac{4b+3}{(b+1)b};a=8$	28	14,(6)	$\downarrow$						
$a\cdot\frac{4b+3}{(b+1)b};a=9$	31,5	16,5	$\downarrow$						

6)Проверим, может ли число 2300,5 быть получено с помощью последовательностей, удовлетворяющих 4-ой гипотезе. $S_4(n)=2300{,}5;\quad n-?$

$$\Gamma_4:\overline{ab9};\quad \overline{a(b+1)0};\quad \overline{a(b+1)1};\quad \overline{a(b+1)2};\quad b\ne 0;\quad c=9.$$

$$S_4(\overline{abc})=\frac{100a+10b+9}{b}+\frac{100a+10(b+1)}{b+1}+\frac{100a+10(b+1)+1}{b+1}+\frac{100a+10(b+1)+2}{b+1}=$$
$$=40+\frac{100a+9}{b}+\frac{300a+3}{b+1}=2300{,}5.$$

$\frac{100a+9}{b}+\frac{300a+3}{b+1}=2260{,}5; \quad b\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Начнём перебор:b=1, тогда a=9,c=9,

919;920;921;922 – искомая последовательность. Проверка остальных значений b не добавляет решений.

ОТВЕТ а): единственная последовательность, удовлетворяющая требованию задачи-

Это 919;920;921;922.

б)Может ли $S_4(n)$ быть равно $650\frac{17}{36}$?

Проверим, может ли число $650\frac{17}{36}$ быть получено с помощью последовательностей, удовлетворяющих 1-ой гипотезе. $S_4(n)=650\frac{17}{36}; \quad n-?$

$$\Gamma_1:\overline{abc};\quad \overline{ab(c+1)};\quad \overline{ab(c+2)};\quad \overline{ab(c+3)};\quad b\neq 0;\quad c\in\{0;1;2;3;4;5;6\}.$$

$$S_4(\overline{abc})=\frac{100a+10b+c}{b}+\frac{100a+10b+c+1}{b}+\frac{100a+10b+c+2}{b}+\frac{100a+10b+c+3}{b}=$$
$$=40+\frac{400a+4c+6}{b}=40+400\cdot\frac{a}{b}+\frac{4c+6}{b}=650\frac{17}{36}.$$

$400\cdot\frac{a}{b}+\frac{4c+6}{b}=610\frac{17}{36}\Leftrightarrow 400\cdot\frac{a}{b}=610\frac{17}{36}-\frac{4c+6}{b}$; причём, $\frac{2}{3}\leq\frac{4c+6}{b}\leq 30$, тогда

$400\cdot\frac{a}{b}\in[580{,}47(2);609{,}80(5)]\Rightarrow\frac{a}{b}\in[1{,}4511805(5);1{,}524513(8)]$, в этот отрезок попадают только отношения цифр $\frac{9}{6};\frac{6}{4};\frac{3}{2}$, это даёт пары $(a;b):(9;6);(6;4)(3;2)$, где $c\in\{0;1;2;3;4;5;6\}$, с учётом этого получаем числа, соответствующие каждой паре, подлежащие проверке:

$(9;6)\rightarrow$ 960;961;962;963;964;965;966;

$(6;4)\rightarrow$ 640;641;642;643;644;645;646;

$(3;2)\rightarrow$ 320;321;322;323;324;325;326.

Только эти числа (21 число и, соответственно, 21 последовательность) удовлетворяют необходимому условию, т.е. могут быть решением задачи, но предстоит проверить, удовлетворяют ли они требованию задачи, т.е. проверим достаточность:

$S_4(960)=641; S_4(961)=641\frac{2}{3}; S_4(962)=642\frac{1}{3}; S_4(963)=643; S_4(964)=643\frac{2}{3}; S_4(965)=644\frac{1}{3}; S_4(966)=645.$

$S_4(640)=641{,}5; S_4(641)=642{,}5; S_4(642)=643{,}5; S_4(643)=644{,}5; S_4(644)=645{,}5; S_4(645)=646{,}5; S_4(646)=647{,}5.$

$S_4(320)=643; S_4(321)=645; S_4(322)=647; S_4(323)=649; S_4(324)=651; S_4(325)=653; S_4(326)=655.$

Итак, ни одна из последовательностей чисел, удовлетворяющих первой гипотезе, не даёт решения уравнения $S_4(n)=650\frac{17}{36}; \quad n-?$ Аналогично проверяются и отбрасываются вторая, третья, четрёртая гипотезы.

ОТВЕТ б)нет.

в)Проведённый анализ четырёх гипотез подсказывает, где следует искать наименьшее и наибольшее значения $S_4(n)$, так $S_{4\ \min}(n)$ будет находиться среди чисел 190;191;192;193;194;195;196;197;198;199, вычисляем

$S_4(190)=85,(1); S_4(191)=85{,}5; S_4(192)=86; S_4(193)=86,(4); S_4(194)=86,(8); S_4(195)=87\frac{1}{3}; S_4(196)=87,(7).$

Итак, $S_{4\ \min}(n)=S_4(190)=85,(1);$

$S_{4\ \min_{\text{целое}}}(n)=S_4(192)=86.$

Проведённый анализ четырёх гипотез подсказывает, где следует искать наибольшее значение $S_4(n)$, так $S_{4\ \max}(n)$ будет находиться среди чисел 910;911;912;913;914;915;916;917;918;919, вычисляем

$S_4(910)=3646; S_4(911)=3650; S_4(912)=3654; S_4(913)=3658; S_4(914)=3662; S_4(915)=3666; S_4(916)=3670;$
$S_4(917)=3214; S_4(918)=2757{,}5; S_4(919)=2300{,}5.$

Итак, $S_{4\ \max}(n)=S_4(916)=3670.$

ОТВЕТ в) $S_{4\ \min_{\text{целое}}}(n)=S_4(192)=86.$ $\qquad S_{4\ \max}(n)=S_4(916)=3670.$

1.83. (Л.2023. В1.18.) Светлана выписала пять подряд идущих натуральных чисел, последние цифры которых не равны нулю. Затем каждое из выписанных чисел разделила на его последнюю цифру. Сумма получившихся чисел равна $S_5(n)$, где n-первое из выписанных пяти натуральных чисел.

а)Может ли $S_5(n)$ быть равно 34?

б)Может ли $S_5(n)$ быть равно $989\frac{103}{252}$?

в)Найдите наименьшее и наибольшее $S_5(n)$, если каждое из исходных чисел было четырёхзначным.

Решение а).

1)Рассмотрим сразу случай одно-, двух- и трёхзначных чисел и вычислим соответствующие суммы $S_5(n)$ при различных n= $\overline{abc}$

$$\overline{abc};\quad \overline{ab(c+1)};\quad \overline{ab(c+2)};\quad \overline{ab(c+3)};\quad \overline{ab(c+4)};\quad c\in\{1;2;3;4;5\};\quad a,b\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}.$$

$$S_5(\overline{abc})=\frac{100a+10b+c}{c}+\frac{100a+10b+c+1}{c+1}+\frac{100a+10b+c+2}{c+2}+\frac{100a+10b+c+3}{c+3}+\frac{100a+10b+c+4}{c+4}=$$
$$=5+\frac{400a+4c+6}{b}=40+100a\cdot\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{c+3}+\frac{1}{c+4}\right)+10b\cdot\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{c+3}+\frac{1}{c+4}\right)=$$
$$=5+(100a+10b)\cdot\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{c+3}+\frac{1}{c+4}\right)$$

Если n-однозначное число, то $S_5(n)=5$, т.к.a=b=0.

Если n-трёхзначное число, то

$$S_5(n)\geq 5+(100\cdot 1+10\cdot 0)\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right)=5+100\cdot\frac{1879}{2520}\approx 79{,}5663\ldots$$ и, значит $S_5(n)$ не может быть равно 34. Будем искать двузначное число n= $\overline{bc}$.

2) По требованию задачи, $S_5(n)=34$, имеем диофантово уравнение относительно цифр b,c:

$$34=5+(100\cdot 0+10b)\cdot\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{c+3}+\frac{1}{c+4}\right)\Leftrightarrow$$
$$29=(10b)\cdot\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{c+3}+\frac{1}{c+4}\right)\Leftrightarrow$$
$$2{,}9=(b)\cdot\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{c+3}+\frac{1}{c+4}\right)\Leftrightarrow b=\frac{2{,}9}{\frac{1}{c}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{c+3}+\frac{1}{c+4}}.$$

Оценим наименьшее и наибольшее значения суммы дробей при $c\in\{1;2;3;4;5\}$

$$\frac{1879}{2520}=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\leq\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{c+3}+\frac{1}{c+4}\right)\leq\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{137}{60}$$

Следовательно, получаем оценку для b:

$$1{,}2270072993..\approx 1\frac{37}{137}=\frac{174}{137}=\frac{2{,}9\cdot 60}{137}\leq b=\frac{2{,}9}{\frac{1}{c}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{c+3}+\frac{1}{c+4}}\leq\frac{2{,}9\cdot 2520}{1879}=\frac{7308}{1879}=3\frac{1671}{1879}\approx 3{,}88930282\ldots$$

Итак, необходимо, чтобы $b\in\{2;3\}$ при $c\in\{1;2;3;4;5\}$.

Проверим , выполняется для какого-нибудь из десяти 21,22,23,24,25;31,32,33,34,35 чисел требование задачи:

$$S_5(21)=\frac{21}{1}+\frac{22}{2}+\frac{23}{3}+\frac{24}{4}+\frac{25}{5}>34;$$
$$S_5(22)=\frac{22}{2}+\frac{23}{3}+\frac{24}{4}+\frac{25}{5}+\frac{26}{6}=11+\frac{46+26}{6}+6+5=34;$$
$$S_5(23)=\frac{23}{3}+\frac{24}{4}+\frac{25}{5}+\frac{26}{6}+\frac{27}{7}\notin N;$$
$$S_5(24)=\frac{24}{4}+\frac{25}{5}+\frac{26}{6}+\frac{27}{7}+\frac{28}{8}<34;$$
$$S_5(25)<S_5(24);$$

$$S_5(31)=\frac{31}{1}+\frac{32}{2}+\frac{33}{3}+\frac{34}{4}+\frac{35}{5}>34;$$
$$S_5(32)=\frac{32}{2}+\frac{33}{3}+\frac{34}{4}+\frac{35}{5}+\frac{36}{6}>34;$$
$$S_5(33)=\frac{33}{3}+\frac{34}{4}+\frac{35}{5}+\frac{36}{6}+\frac{37}{7}>34;$$
$$S_5(34)=\frac{34}{4}+\frac{35}{5}+\frac{36}{6}+\frac{37}{7}+\frac{38}{8}\approx 31{,}5357\ldots;$$
$$S_5(35)<S_5(34);$$

Итак, предположение искать ответ среди двузначных чисел нашло своё подтверждение –

числа: 22,23,24,25,26 удовлетворяют требоваиям задачи, других последовательностей нет. **В отличие от авторов сборника, нами предложен алгоритм нахождения требуемых последовательностей натуральных чисел, восполнен пробел пособия.**

Решение б; в).

Используя соотношение $S_5(\overline{abc})=5+(100a+10b)\cdot\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{c+3}+\frac{1}{c+4}\right)$

$c\in\{1;2;3;4;5\};\quad a,b\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, оценим наименьшее и наибольшее значения $S_5(\overline{abc})$.

1)При a=0;b=0 $S_5(\overline{abc})=S_5(\overline{c})=5$.

2) При a=0

$$S_5(\overline{abc})=S_5(\overline{bc})=5+(100\cdot 0+10b)\cdot\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{c+3}+\frac{1}{c+4}\right)=$$
$$=5+(10b)\cdot\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{c+3}+\frac{1}{c+4}\right)\in\left[5+10\cdot\frac{1879}{2520};5+90\cdot\frac{137}{60};\right].$$

То есть $S_5(\overline{bc})\in[12{,}45634921\ldots;\ 210{,}5]$, целочисленные значения $S_5(\overline{bc})\in[13;210]$.

Заметим, что $S_5(91)=\frac{91}{1}+\frac{92}{2}+\frac{93}{3}+\frac{94}{4}+\frac{95}{5}=210{,}5$, т.е. $S_{5\ \max}(\overline{bc})=S_5(91)=210{,}5$.

3) Используя соотношение $S_5(\overline{abc})=5+(100a+10b)\cdot\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{c+3}+\frac{1}{c+4}\right)$

$c\in\{1;2;3;4;5\};\quad a,b\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, оценим наименьшее и наибольшее значения $S_5(\overline{abc})$ для трёхзначных чисел.

Ранее были даны оценки наименьшего и наибольшего значений суммы дробей при $c\in\{1;2;3;4;5\}$

$\frac{1879}{2520}=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\le\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{c+3}+\frac{1}{c+4}\right)\le\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{137}{60}$, следовательно,

$$S_{5\max}(\overline{abc})=S_5(991)=5+(100\cdot9+10\cdot9)\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=5+990\cdot\frac{137}{60}=2265{,}5.$$

$$S_{5\min}(\overline{abc})=S_5(105)=5+(100\cdot1+10\cdot0)\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right)=5+100\cdot\frac{1879}{2520}\approx79{,}56349206...$$

Замечаем, что данное число $989\frac{103}{252}$ принадлежит найденному диапазону значений $S_5(n)$

$80<989\frac{103}{252}<2265$ и необходимое условие для разрешимости уравнения $S_5(n)=989\frac{103}{252}$ выполнено. Осталось выяснить, является ли это условие достаточным. Т.е. n можно искать среди трёхзначных чисел.

Выясним, может ли равенство $S_5(n)=989\frac{103}{252}$ выполняться для трёхзначных чисел.

$$S_5(\overline{abc})=5+(100a+10b)\cdot\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{c+3}+\frac{1}{c+4}\right)=989\frac{103}{252}$$

$c\in\{1;2;3;4;5\};\quad a\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\},b\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

$$(100a+10b)\cdot\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{c+3}+\frac{1}{c+4}\right)=984\frac{103}{252}\Rightarrow$$

$$431{,}127911..\approx\frac{248071}{252}\cdot\frac{60}{137}=984\frac{103}{252}\cdot\frac{60}{137}\le100a+10b\le984\frac{103}{252}\cdot\frac{2520}{1879}=\frac{248071}{252}\cdot\frac{2520}{1879}\approx1320{,}228845...$$

Для цифр a,b получаем оценку: $431{,}1\le100a+10b\le1320{,}2$ или

$44\le10a+b\le132\Leftrightarrow44\le10a+b\le99$, т.е. $\overline{ab}\in\{44;45;...99\}$,всего 56 чисел удовлетворяют полученной оценке, а учитывая, что третья цифра c может принимать значения 1,2,3,4,5, проверке подлежат следующие 280 чисел:

441,442,443,444,445;

451,452,453,454,455;

....

991,992,993,994,995.

Проверка 280 случаев, выполненная на компьютере, покажет, может ли трёхзначное число n быть корнем уравнения $S_5(n)=989\dfrac{103}{252}$.

Может быть, четырёхзначное число $n=\overline{abcd}$ является корнем уравнения? Проделаем соответствующие оценки:

$$S_5(\overline{abcd})=5+(1000a+100b+10c)\cdot\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{d+1}+\frac{1}{d+2}+\frac{1}{d+3}+\frac{1}{d+4}\right)$$

$d\in\{1;2;3;4;5\};\quad a,b,c\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, оценим наименьшее и наибольшее значения $S_5(\overline{abcd})$ для четырёхзначных чисел.

Ранее были даны оценки наименьшего и наибольшего значений суммы дробей при $d\in\{1;2;3;4;5\}$

$$\frac{1879}{2520}=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\le\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{d+1}+\frac{1}{d+2}+\frac{1}{d+3}+\frac{1}{d+4}\right)\le\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{137}{60},$$

следовательно,

$$S_{5\max}(\overline{abcd})=S_5(9991)=5+(1000\cdot 9+100\cdot 9+90)\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=5+9990\cdot\frac{137}{60}=22815{,}5.$$

$$S_{5\min}(\overline{abcd})=S_5(1005)=5+(1000\cdot 1+100\cdot 0+0)\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right)=5+1000\cdot\frac{1879}{2520}\approx 750{,}6349206...$$

Как видно из равенства $S_{5\max}(\overline{abcd})=5+9990\cdot\dfrac{137}{60}=5+999\cdot\dfrac{137}{6}$, число $999\cdot\dfrac{137}{6}$ будет целым, когда число десятков $\overline{abc}$ (в нашем случае 999) четырёхзначного числа $\overline{abcd}$ делится на 6, ближайшим будет 996. Тогда $S_{5\max\,\text{целое}}(9996)=5+9990\cdot\dfrac{137}{60}=5+999\cdot\dfrac{137}{6}=5+166\cdot 137=22747.$

Замечаем, что данное число $989\dfrac{103}{252}$ принадлежит найденному диапазону значений $S_5(n)$ для четырёхзначных чисел: $751<989\dfrac{103}{252}<22815$ и необходимое условие для разрешимости уравнения $S_5(n)=989\dfrac{103}{252}$ выполнено. Осталось выяснить, является ли это условие достаточным. Т.е. n можно искать среди четырёхзначных чисел. Проверка гипотезы приводит к значительному количеству переборов, мы не будем здесь рассматривать их. Приведённые оценки для $S_5(\overline{n})$ показывают, что $S_5(n)$ не может быть равно $989\dfrac{103}{252}$ для двузначных, трёхзначных чисел n; в случае четырёхзначных чисел задача свелась к конечному перебору.

Ответ Б)нет.

Отв. в) $S_{5\max}\left(\overline{abcd}\right)=S_5(9991)=22815{,}5.$ $S_{5\min}\left(\overline{abcd}\right)=S_5(1005)=5+1000\cdot\dfrac{1879}{2520}\approx 750{,}6349206...$

$S_{5\max\ целое}(9996)=5+9990\cdot\dfrac{137}{60}=22747.$

БЗ 2. Задача определения вида числа: простое или составное (способы действий: проверка признаков делимости на 2,3,4,5,6,8,9,10,11; проверка условий теоремы: если натуральное число N не делится ни на одно из простых чисел, не превосходящих $\left[\sqrt{N}\right]$, т.е. на $p\le\left[\sqrt{N}\right]$, то число N –простое, применение формул сокращённого умножения, применение метода математической индукци

2.1. (задача Софи Жермен). Докажите, что число n^4+4, $n\in N$ $(n>1)$ - составное.

Софи Жермен (1.04.1776 - 17.06.1831) - французский математик. Состояла в переписке с **Даламбером**, Лагранжем, помогла Гауссу во время французской оккупации Пруссии.

2.2. Число $p>3$ - простое. Докажите, что а) $p = 6k \pm 1$, $k\in N$; б) p^2-1 кратно: 12; 24. *Подсказка: рассуждаем по модулю 6.*

2.3. Докажите, что данное число является составным: а) $2^{18}+7^8$; *подсказка: определите последнюю цифру;*

б) $2^{300}+7^{30}$; в) $2^{48} – 2^{25} + 1$; *подсказка: используйте формулы сокращенного умножения ;*

г) $2^{12}+5^9$ *(ФСУ сумма кубов);*

д) $2^{10}+5^{12}$ *(выделите полный квадрат ПК);*

е) $8n^3-12n^2+6n+63, n\in N$. *Подсказка:теорема о рациональном корне многочлена; теорема Этьена Безу;проверка того, что ни один из множителей не равен 1;*

ж) $n^3-6n^2+12n+117, n\in N$ *;(ФСУ сумма кубов);*

з)$10\cdot1955^2+29\cdot1955\cdot2055+21\cdot2055^2$; и) $10\cdot2023^2+29\cdot2023\cdot2024+21\cdot2024^2$. *Подсказка: используем разложение однородного многочлена второй степени на множители.*

к)Докажите, что число $\left(\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|}-\sqrt{\left|40\sqrt{2}+57\right|}\right)$ *целое и найдите его.*

Подсказка: выделите ПК $40\sqrt{2}+57=\left(a\sqrt{2}+b\right)^2; a,b\in Z$ *(отв.-10).*

Л) Докажите, что число 10^n+35 - составное.

м)Докажите, что число $34^{1990}-19^{10}$ кратно 5.

2.4. Сумма двух целых чисел равна 113, а разность их квадратов является простым числом. Найдите эти числа.

2.5. Дано: числа p и 2p+1 -простые (p>3). Докажите, что число 4p+1 - составное.

Подсказка: рассуждаем по модулю 6, или используем задачу 2.2.

2.6. (задача Евклида) Докажите, что множество простых чисел бесконечно.

Евклид (ок. 340 - ок. 287 до н.э.) - математик эпохи эллинизма. Родился и жил предположительно в Александрии. В «Началах», кроме геометрии, изложены решение квадратных уравнений, теория чисел, классификация квадратичных иррациональностей. Одним из первых начал изучать логические основания математики. Доказал бесконечность множества простых чисел. Ввёл понятие иррационального числа.

2.7. а)При каких a $\overline{a719} \vdots 11$?

б)при каких цифрах a,b число $\overline{454ab}$ делится на 18 и на 7? /45486/;

в) при каких цифрах a,b число $\overline{235ab}$ делится на 2,на 3 и на 11? /23562/;

г) при каких цифрах a,b число $\overline{179ab}$ делится на 5,на 7 и на 9? /17955/;

2.8. Найдите а)наименьшее натуральное число N, такое, что N+1 делится на 3; N+2 делится на 5; N+3 делится на 7;

б)наибольшее трёхзначное натуральное число N, такое, что N+1 делится на 3; N+2 делится на 5; N+3 делится на 7; в)сколько всего таких трёхзначных натуральных чисел N?

Решение. Первому требованию задачи отвечают все числа вида $N = 3l - 1$; второму требованию $N = 5m - 2$, следовательно, $3l - 1 = 5m - 2 \Leftrightarrow m = 5 + 3t;\quad l = 8 + 5t;\quad t \in R.$ Двум первым требованиям удовлетворяют $N = 5(m) - 2 = 5(5 + 3t) - 2 = 15t + 23.$ Третьему требованию удовлетворяют $N = 7p - 3$,следовательно, $15t + 23 = 7p - 3 \Leftrightarrow 7p - 15t = 26 \Leftrightarrow \begin{cases} p = 15l - 7; \\ t = 7l - 5; l \in Z \end{cases}$

Следовательно, $N = 15t + 23 = 15(7l - 5) + 23 = 105l - 52; l \in Z$ - общий вид искомых чисел N, при девяти значениях $l \in \{2;3;...10\}$ числа N являются трёхзначными, $N_{\min} = 53;\ N_{\min\ 3\ знач} = 158;\ N_{\max\ 3\ знач} = 998.$

Отв.53;998;9.

Замечание: задачу можно решить перебором по модулю 105.

2.9. **Найдите а)наименьшее трёхзначное натуральное число N, такое, что N+2 делится на 3; N+4 делится на 5; N+6 делится на 7;**

б)наибольшее трёхзначное натуральное число N, такое, что N+2 делится на 3; N+4 делится на 5; N+6 делится на 7; в)сколько всего таких трёхзначных натуральных чисел N?

Краткий конспект решения. $3n - 2 = 5k - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 + 3t; \\ n = -4 + 5t; \end{cases} \Rightarrow N = 15t - 14; t \in Z.$ *Диофантово уравнение можно решать по общей теореме, если известно частное решение, или методом Пьера Ферма, если частное решение неизвестно.*

$15t - 14 = 7l - 6 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 7s + 1; \\ l = 15s + 1; s \in Z; \end{cases} \Rightarrow N = 105s + 1; s \in Z;$ при $s \in \{1;..9\}$ N является трёхзначным числом.

Отв.106;946;9. Замечание: задачу можно решить перебором по модулю 105.

2.10. Простое или составное число $2^{200} + 3^{200}$?

Подсказка: выведите и воспользуйтесь формулой сокращённого умножения для разложения суммы пятых степеней двух чисел в произведение.

2.11.(Я.2020.21.19). а) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого вторая цифра в 14 раз меньше произведению двух других его цифр? б) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого сумма всех цифр равна 7? в) Найдите наибольшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1,2,3,4,5,6,7, 9. Ответ обоснуйте.

Отв. а)всего два числа 847,748;б)нет; в)97 635 241.

Решение. А) По признаку делимости на 11, число А $\vdots$ 11тогда и только тогда, когда знакочередующаяся сумма его цифр (ЗЧС) $\vdots$ 11. Например, трёхзначное число $\overline{abc}\ \vdots\ 11 \Leftrightarrow (a+c-b)\ \vdots\ 11$. Тогда математическая модель задачи п. а) имеет вид: найти все цифры a,b,c, $a \neq 0$,удовлетворяющие системе $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a+c-b=0 \\ a+c-b=11 \\ a+c-b=-11 \end{array}\right. \\ 14b=ac \end{cases}, \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a+c=b \\ a+c-11=b \\ a+c+11=b \end{array}\right. \\ 14b=ac \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14b=ac \\ \left[\begin{array}{l} 14(a+c)=ac \\ 14(a+c-11)=ac \\ 14(a+c+11)=ac \end{array}\right. \end{cases}$ которая равносильна совокупности трёх систем:

1) $\begin{cases} 14(a+c)=ac \\ 14b=ac \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{14c}{c-14}; \\ 14b=ac \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$ т.к. дробь отрицательна, а цифра а – положительна.

2) $\begin{cases} 14(a+c-11)=ac \\ 14b=ac \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14(c-11)=a(c-14) \\ 14b=ac \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{14(c-14+3)}{(c-14)}=a \\ 14b=ac \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=14+\dfrac{42}{c-14}; \\ 14b=ac \end{cases}$ дробь $\dfrac{42}{c-14}$ принимает целые значения т. и т. тогда, когда с-14 является делителем числа 42, т.е. $(c-14) \in \{\pm1;\pm2;\pm3;\pm6;\pm7;\pm14;\pm21;\pm42\}$, причём положительные делители сразу отбрасываем, т.к. в этом случае к 14 будет прибавляться натуральное число, но число, большее 14 не является цифрой. При с-14 =-1 получаем а=-28, что не является цифрой. При с-14 =-2 а=-7 $\varnothing$. При с-14 =-3 а=0, но $a \neq 0$ $\varnothing$. При с-14 =-6 а=7,с=8, в=4, т.о.748 искомое число. При с-14 =-7 а=8,с=7, в=4, т.о. 847 искомое число. Других чисел нет. Ответ: 748 и 847, других чисел нет.

Б) Математическая модель задачи п.б) имеет вид: найти все цифры a,b,c, $a \neq 0$,удовлетворяющие системе $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a+c-b=0 \\ a+c-b=11 \\ a+c-b=-11 \end{array}\right. \\ a+c+b=7 \end{cases}, \Leftrightarrow$ которая равносильна совокупности трёх систем, которые будем решать сложением:

1) $\begin{cases} a+c-b=0 \\ a+c+b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c-b=0 \\ 2(a+c)=7 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$, т.к. левая часть делится на 2, а правая нет.

2) $\begin{cases} a+c-b=11 \\ a+c+b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c+b=7 \\ 2(a+c)=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c+b=7 \\ (a+c)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$, т.к. a,b,c – положительные цифры.

3) $\begin{cases} a+c-b=-11 \\ a+c+b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c+b=7 \\ 2(a+c)=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c+b=7 \\ (a+c)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$, т.к. a,b,c – положительные цифры.

Ответ б)нет.

В) Наибольшее число из данных цифр - это 97654321.

9	7	6	5	4	3	2	1
-	+	-	+	-	+	-	+

Знакочередующаяся сумма цифр (ЗЧС) этого числа равна: (1+3+5+7)-(2+4+6+9)=16-21=-5 – нечётное число. Не будем изменять и переставлять три старшие цифры 976, чтобы по возможности не сильно уменьшать исходное число. Для управления ЗЧС необходимо **найти закономерности** образования и модификации ЗЧС, можно провести **численный эксперимент** и сделать несколько пробных перестановок цифр, это позволит сделать

три наблюдения:

1)при перестановке цифр, стоящих на позициях одинаковой чётности (т.е. цифр, стоящих только на чётных местах или только на нечётных местах), ЗЧС **не изменяется**, т.к. это приведёт к перестановке слагаемых в одной из скобок ЗЧС; **вывод: ЗЧС инвариантна относительно перестановки цифр, стоящих на позициях одинаковой чётности;**

2) при перестановке цифр, стоящих на позициях разной чётности, ЗЧС **изменяется на чётное число** (отсюда следует, что переставляя цифры, нельзя из -5 получить 0, но получить -11 можно);

3) при перестановке цифр, стоящих на позициях разной чётности, ЗЧС **изменяется на удвоенную разность между переставляемыми цифрами.**

Применим закономерности для управления ЗЧС. ЗЧС (97654321)=-5, её надо уменьшить на 6, следовательно, надо переставлять цифры, разность между которыми равна 3; это 4 и 1; 5 и 2. Проверим первую перестановку

9	7	6	5	1	3	2	4
-	+	-	+	-	+	-	+

Знакочередующаяся сумма цифр (ЗЧС) этого числа равна: (4+3+5+7)-(2+1+6+9)=19-18=1.

Проверим вторую перестановку 5 и 2

9	7	6	2	4	3	5	1
-	+	-	+	-	+	-	+

Знакочередующаяся сумма цифр (ЗЧС) этого числа равна: (1+3+2+7)-(5+4+6+9)=13-24=-11. Число 97624351 делится на 11, используя наблюдение 1, можно увеличить число, не нарушая делимости на11. Для этого переставим цифры 2 и 3; цифры 5 и 4, число увеличилось, дальнейшее увеличение за счёт перестановок цифр невозможно. Ответ: в)97635241.

2.12.(Я.2020.22.19). а) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого вторая цифра равна произведению двух других цифр? б) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого сумма всех цифр равна 5? в) Найдите наименьшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1,2,3,4,5,7,8, 9. Ответ обоснуйте. Решение в). Наименьшее число из данных цифр - это 12345789.

1	2	3	4	5	7	8	9
-	+	-	+	-	+	-	+

Знакочередующаяся сумма цифр (ЗЧС) этого числа равна: (9+7+4+2)-(8+5+3+1)=22-17=5 – нечётное число. Не будем изменять и переставлять две старшие цифры 12, чтобы по возможности не сильно увеличить исходное число. Для управления ЗЧС применяем закономерности 1), 2), 3) образования ЗЧС: требуется увеличить ЗЧС на 6, переставлять надо цифры отличающиеся на 3, таких пар две:4и7; 5и8 (пары 1и4; 2и5 мы договорились не трогать), но они на позициях одинаковой чётности. Если увеличить ЗЧС на 6 не получается, будем её уменьшать на 16. Это можно сделать только поменяв местами цифры 9 и 5 (это уменьшит ЗЧС на 8) и переставив цифры 7 и 3 (это уменьшит ЗЧС на 8), итого 5-8-8=-11, полученное число 12 738 495 делится на 11 но не является наименьшим. Уменьшить его можно, переставляя цифры, стоящие на позициях одинаковой чётности: 3и4, 9и8.

Вот как эти построения выглядят в таблице:

-	+	-	+	-	+	-	+	ЗЧС
1	2	3	4	5	7	8	9	5
1	2	3	4	9	7	8	5	ЗЧС=5-8=-3
1	2	7	4	9	3	8	5	ЗЧС=-3-8=-11
1	2	7	3	9	4	8	5	ЗЧС=-11
1	2	7	3	8	4	9	5	ЗЧС=-11

В последней строке ни одну цифру теперь нельзя переставить, не ухудшая уже достигнутые свойства числа. Полученное число 12 738 495 делится на 11 и по построению является наименьшим.

Отв. а) 242, других чисел нет; б) нет; в)12 738 495.

2.13.(Я.2019.28.19). а) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого вторая цифра в 12 раз меньше произведения двух других цифр? б) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого сумма всех цифр равна 9? в) Найдите наименьшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1,2,3,5,6,7,8,9. Ответ обоснуйте. Ответ: а) да, например, 869; б) нет; в) **12375869**. *Подсказка. а) из системы находим только два числа:968 и 869. В)ЗЧС(**12**35678*9*)=5. Возможны две гипотезы Г1:увеличить ЗЧС на 6;Г2: уменьшить ЗЧС на 16. Проверим Г1: пара цифр 5и8 – единственная, обладающая необходимыми свойствами: ЗЧС(12386759)=11. Для уменьшения числа переставляем цифры 8и7, 6и5.* Получим число **12375869,** кратное11 и наименьшее по построению.

Блез Паскаль (19.06.1623 - 19.08.1662) - французский математик, механик, физик и философ. Открыл метод полной математической индукции. Известен арифметический треугольник Паскаля. В работе «Особенности делимости чисел» Паскаль доказал следующую **теорему:** пусть натуральное число *n>1* записано в *q*-ичной системе счисления: $n = a_k q^k + a_{k-1} q^{k-1} + \ldots + a_1 q + a_0$. Обозначим через r_s остаток от деления q^s на $p > 1$ *(s=1,…,k)* и составим новое число $m = a_k r_k + a_{k-1} r_{k-1} + \ldots + a_1 r_1 + a_0$. Тогда числа *m* и *n* имеют одинаковые остатки при делении на *p*. Из теоремы Паскаля выводятся признаки делимости на любое простое число.

2.14.(Я.2019.29.19). а) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого вторая цифра в 18 раз меньше произведения двух других цифр? б) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого сумма всех цифр равна 7? в) Найдите наибольшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1,2,3,5,6,7,8,9. Ответ обоснуйте. Ответ: а) да, 924, 429 других нет; б) нет; в) 98372615. *Подсказка. В)ЗЧС(**98**765321)=-5. Возможны две гипотезы Г1:увеличить ЗЧС на 16;Г2: уменьшить ЗЧС на 6. Г2 не выполнима из за отсутствия подходящих цифр с разностью 3. Проверим Г1: пары цифр 3и7 ;1и5–и только они, обладающая необходимыми свойствами: ЗЧС(98361725)=11. Для увеличения числа переставляем цифры 6и7, 1и2, стоящие на позициях одинаковой чётности.* Получим число **98372615,** кратное11 и наибольшее по построению.

2.15.(Я.2020.В17.19). В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше, чем 50, а вместе солдат меньше, чем 120. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 7, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов. а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? б) Можно ли построить роту указанным способом по 11 солдат в одном ряду? в) Сколько в роте может быть солдат? Отв. а) например, 54 и 63; или 52 и 65; или 51 и 68; б) нет; в)117 или 119.

Решение. Построим математическую модель задачи: пусть x, y – количество солдат в первом и втором взводах, $50 < x < y$; $x, y \in N$; $x + y < 120$, x,y одновременно делятся на некоторое $n \geq 8$. Найти все пары (x,y) с целыми числами, удовлетворяющие неравенствам. Используем геометрический смысл неравенств: три неравенства $50 < x$; $x < y$; $y < 120 - x$ в плоскости XOY задают три полуплоскости, нарисовав их, получим в пересечении полуплоскостей треугольник А(50;50), В(60;60), С(50;70) с выколотой границей. Все точки (x,y) с целыми координатами внутри треугольника, исключая границу, удовлетворяют всем неравенствам модели (это необходимое условие). Остаётся выбрать из них те точки, абсцисса и ордината которых делятся на какое-то $n \geq 8$(это достаточное условие). Для удобства дальнейшего решения сделаем крупный чертёж.

Перебор начнём с отрезка вертикальной прямой x=51 , расположенного в треугольнике, все абсциссы делятся на 17, проверим, нет ли на этом отрезке точек с ординатой, кратной 17. Одна такая точка (51;68) на отрезке есть; x=51;y=68 является ответом на п.а). В роте может быть 51+68=119 солдат.

Проверим отрезок вертикальной прямой x=52 , расположенного в треугольнике, все абсциссы делятся на 13, проверим, нет ли на этом отрезке точек с ординатой, кратной 13. Одна такая точка (52;65) на отрезке есть; x=52;y=65 является ответом на п.а). В роте может быть 52+68=117 солдат.

Проверяя по графику точки на прямых x=53, x=54,x=55, x=56, x=57, x=59, x=59, мы обнаружим третью, последнюю точку(54;63), удовлетворяющую всем требованиям модели. Найдены все возможные значения x,y.

X	51	52	54
Y	68	65	63
X+y	119	117	117

Поскольку ни одно из чисел x,y не делится на 11, то построить роту указанным способом по 11 солдат в одном ряду невозможно.

Отв. а) например, 54 и 63; или 52 и 65; или 51 и 68; б) нет; в)117 или 119.

2.16.(Я.2018.В17.19). Найдите НОД всех чисел вида p^2-1, где p пробегает множество всех простых чисел от 5 до 2003. Отв.24.

2.17. (ЕГЭ2018). В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в каждой школе. А) Мог ли средний балл в школе №1 уменьшиться в 10 раз?

Б) Средний балл в школе №1 уменьшился на 10%, средний балл в школе №2 тоже уменьшился на 10%. Мог ли первоначальный средний балл в школе №2 равняться 7?

В) Средний балл в школе №1 уменьшился на 10%, средний балл в школе №2 тоже уменьшился на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе №2.

Решение а). Пусть в школе №1 тест писали два ученика А и В, набравшие a и b баллов соответственно, тогда их средний балл равен $\frac{a+b}{2}$, после ухода А, средний балл стал равен b, по условию $10b = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow a = 19b$. Например, если a=19, b=1, то средний балл с 10 уменьшился до 1. Очевидно, при любых парах вида b=n,a=19n, где n – натуральное, требование задачи выполняется. Ответ: да.

Решение б) возможно ограниченным перебором, тест писали суммарно 9 человек, поэтому возможны всего 6 комбинаций, 6 гипотез о количестве учащихся в школах №1 и №2;

оформим эти 6 гипотез в ***таблицу гипотез***:

Количество учащихся школы №1	2	3	4	5	6	7
Количество учащихся школы №2	7	6	5	4	3	2

Проверим *первую гипотезу*, согласно которой количество учащихся в школах равно 2 и 7 соответственно:

$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ...a_7}{7} = 7 \Leftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ...a_7 = 49$. Ученик А перенёс свои a баллов из №1 в №2, средний балл в №2 уменьшился с 7 до 6,3, мат. модель принимает вид:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+...a_7+a}{8}=6{,}3 \Leftrightarrow (a_1+a_2+a_3+a_4+...a_7)+a=8\cdot 6{,}3 \Leftrightarrow 49+a=50{,}4 \Leftrightarrow a=2{,}4 \Leftrightarrow \varnothing,$$

противоречие с условием, что баллы - натуральные числа.

Проверим *вторую гипотезу*, согласно которой количество учащихся в школах равно 3 и 6 соответственно:

$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+...a_6}{6}=7 \Leftrightarrow a_1+a_2+a_3+a_4+...a_6=42.$ Ученик А перенёс свои а баллов из №1 в№2, средний балл в №2 уменьшился с 7 до 6,3, мат. модель принимает вид: $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+...a_6+a}{7}=6{,}3 \Leftrightarrow (a_1+a_2+a_3+a_4+...a_6)+a=7\cdot 6{,}3 \Leftrightarrow 42+a=44{,}1 \Leftrightarrow a=2{,}1 \Leftrightarrow \varnothing,$ противоречие с условием, что баллы - натуральные числа. Аналогично проверяются и отвергаются

гипотезы 3-6. Проверьте самостоятельно. **Ответ: нет.**

Решение в). Доказано, что средний балл в школе №2 не равен 7. Но может быть, он равен 6, или 5, или 4, 3,2,1? Проверим сначала, может ли средний балл в школе №2 равняться 6. Аналогично п.б) будем рассматривать *таблицу гипотез*, проверим, могли средний балл равняться 6:

Проверим *первую гипотезу*, согласно которой количество учащихся в школах равно 2 и 7 соответственно:

$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+...a_7}{7}=6 \Leftrightarrow a_1+a_2+a_3+a_4+...a_7=42$.Ученик А перенёс свои а баллов из №1 в№2, средний балл в №2 уменьшился с 6 до 5,4, мат. модель принимает вид: $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+...a_7+a}{8}=5{,}4 \Leftrightarrow (a_1+a_2+a_3+a_4+...a_7)+a=8\cdot 5{,}4 \Leftrightarrow 42+a=43{,}2 \Leftrightarrow a=1{,}2 \Leftrightarrow \varnothing,$ противоречие с условием, что баллы - натуральные числа.

Проверим *вторую гипотезу*, согласно которой количество учащихся в школах равно 3 и 6 соответственно:

$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+...a_6}{6}=6 \Leftrightarrow a_1+a_2+a_3+a_4+...a_7=36$.Ученик А перенёс свои а баллов из №1 в№2, средний балл в №2 уменьшился с 6 до 5,4, мат. модель принимает вид: $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+...a_6+a}{7}=5{,}4 \Leftrightarrow (a_1+a_2+a_3+a_4+...a_6)+a=7\cdot 5{,}4 \Leftrightarrow 36+a=37{,}8 \Leftrightarrow a=1{,}8 \Leftrightarrow \varnothing,$ противоречие с условием, что баллы- натуральные числа. И так далее по 3,4,5,6-й гипотезам получаем отрицательный результат проверки. Доказано, что средний балл в школе №2 не равен 7, не равен 6. Но, может быть, он равен 5? Проверим это, начиная с *первой гипотезы*:

$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+...a_7}{7}=5 \Leftrightarrow a_1+a_2+a_3+a_4+...a_7=35$.Ученик А перенёс свои а баллов из №1 в№2, средний балл в №2 уменьшился с 5 до 4,5 мат. модель принимает вид: $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+...a_7+a}{8}=4{,}5 \Leftrightarrow (a_1+a_2+a_3+a_4+...a_7)+a=8\cdot 4{,}5 \Leftrightarrow 35+a=36 \Leftrightarrow a=1,$ в соответствии с условием, что баллы - натуральные числа. Итак, первоначальный средний балл в школе №2 может быть равным 5. Осталось проверить, что он не может равняться 4,3,2,1. Эту проверку мы опускаем.

Ответ:5.

Рассмотрим второй способ решения, основанный на иной математической модели.

Б) Примем следующие обозначения и построим мат. модель:

Школа №1	n учащихся в школе №1	А-первоначальный средний балл в школе №1, $n\cdot A$-общая сумма набранных баллов	$\frac{n\cdot A-x}{n-1}=0{,}9\cdot A$

Школа №2	m учащихся в школе №2	В-первоначальный средний балл в школе №2 $m \cdot B$-общая сумма набранных баллов	$\frac{m \cdot B + x}{m+1} = 0{,}9 \cdot B$

Пусть ученик, перешедший из №1 в №2 принёс с собой x баллов, после пересчёта средних баллов в школе №2 получился: $\frac{m \cdot B + x}{m+1} = 0{,}9 \cdot B$, в школе №1 $\frac{n \cdot A - x}{n-1} = 0{,}9 \cdot A$. Из уравнения $\frac{m \cdot B + x}{m+1} = 0{,}9 \cdot B$

следует $m \cdot B + x = 0{,}9 \cdot B(m+1) \Leftrightarrow x = 0{,}9B - 0{,}1mB$,где $x, B, m \in N$, может ли быть В=7? Подставим В=7 в формулу для x, тогда $x = 0{,}9B - 0{,}1mB = 6{,}7 - 0{,}7m = 0{,}7(9-m) = \frac{7}{10} \cdot (9-m)$. Но x –натуральное, значит, $(9-m) \vdots 10$, что, очевидно, неверно. Ответ б): нет.

В) По условию m+n=9, мат. модель:

Школа №1	n учащихся в школе №1	А-первоначальный средний балл в школе №1, $n \cdot A$-общая сумма набранных баллов	$\frac{n \cdot A - x}{n-1} = 0{,}9 \cdot A$ (1)
Школа №2	m учащихся в школе №2	В-первоначальный средний балл в школе №2 $m \cdot B$-общая сумма набранных баллов	$\frac{m \cdot B + x}{m+1} = 0{,}9 \cdot B$ (2)

$x, A, B, m, n \in N; \quad B_{\min} - ?$ Поскольку натуральные числа ограничены снизу единицей, начнём перебор для В с 1. Было получено $x = 0{,}9B - 0{,}1mB \Leftrightarrow 10x = 9B - mB = B(9-m)$, но при В=1 левая часть $10x = (9-m)$ делится на 10, а правая – нет. При В=2 уравнение $10x = B(9-m)$примет вид: $5x = (9-m)$,что возможно только при x=1 (при x=2 л.ч.=10, а пр.ч.<9), тогда m=4 и n=5. Но при x=1 первое уравнение(1) мат. модели примет вид $\frac{n \cdot A - x}{n-1} = 0{,}9 \cdot A \Leftrightarrow 10x = A(9+n) \Leftrightarrow \quad 10 = A(9+n) \Leftrightarrow 10 = A(9+5)$, но 10 не делится на 14.

При В=3 уравнение $10x = B(9-m)$примет вид $10x = 3(9-m)$но правая часть не делится на 10, в отличии от правой.

При В=4 уравнение $10x = B(9-m)$примет вид $10x = 4(9-m) \Leftrightarrow 5x = 2(9-m)$здесь л.ч.делится на 5, следовательно, 9-m=5, m=4, x=2; n=5. Из (1) при n=5, x=2 получаем $10x = A(9+n) \Leftrightarrow 20 = A \cdot 14 \Leftrightarrow \varnothing$

При В=5 уравнение $10x = B(9-m)$примет вид $10x = 5(9-m) \Leftrightarrow 2x = (9-m)$, здесь правая часть делится на 2 только при $m \in \{7;5;3\}$.Если m=7, то x=1,n=2, то $10x = A(9+n) \Leftrightarrow 10 = 11A \Leftrightarrow \varnothing$

Если m=5, то x=2,n=4, то $10x = A(9+n) \Leftrightarrow 20 = 13A \Leftrightarrow \varnothing$

Если m=3, то x=3,n=6, то $10x = A(9+n) \Leftrightarrow 30 = 15A \Leftrightarrow A = 2$, т.е. это возможно, это согласуется с мат. моделью, значит, $B_{\min} = 5$. Ответ В)5.

2.18. (ЕГЭ2018). В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писали 50 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в каждой школе. А) Мог ли средний балл в школе №1 уменьшиться в 2 раза?

Б) Средний балл в школе №1 уменьшился на 2%, средний балл в школе №2 тоже уменьшился на 2%. Мог ли первоначальный средний балл в школе №2 равняться 9?

В) Средний балл в школе №1 уменьшился на 2%, средний балл в школе №2 тоже уменьшился на 2%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе №2.Ответ:а)да; б)нет; в)6.

2.19. (ЕГЭ2018). В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писали 81 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест набрал

натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в каждой школе. А) Мог ли средний балл в школе №1 вырасти в 20 раза?

Б) Средний балл в школе №1 вырос на 20%, средний балл в школе №2 тоже вырос на 20%. Мог ли первоначальный средний балл в школе №2 равняться 1?

В) Средний балл в школе №1 вырос на 20%, средний балл в школе №2 тоже вырос на 20%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе №2.Ответ:а)нет; б)нет; в)4.

2.20. (ЕГЭ2018). В двух гимназиях учащиеся писали тест. Каждый учащийся, писавший тест набрал натуральное количество баллов. Среднее арифметическое баллов учащихся первой гимназии равно 18, а второй - натуральное число. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешёл из первой гимназии во вторую, а средние баллы за тест были пересчитаны в каждой гимназии, оказалось, что они увеличились в обеих гимназиях на 10%. А) Какое количество людей могло учиться в первой гимназии?

Б) Какой максимальный балл мог набрать учащийся первой гимназии?

В) Какое минимальное число учащихся во второй гимназии, если их больше 10?

Ответ: а)6; б)95; в)19.

Решение а). Пусть n учащихся в первой гимназии и они набрали по x_i; $i \in \{1;..;n\}$ баллов. Учащийся с x_n баллами перешёл из №1 в №2, тогда мат.модель задачи запишется в виде: $\begin{cases} \dfrac{x_1 + x_2 ... + x_{n-1} + x_n}{n} = 18 \\ \dfrac{x_1 + x_2 ... + x_{n-1}}{n-1} = 19{,}8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} (x_1 + x_2 ... + x_{n-1}) + x_n = 18n \\ x_1 + x_2 ... + x_{n-1} = 19{,}8(n-1) \end{cases} \Leftrightarrow 19{,}8(n-1) + x_n = 18n \Leftrightarrow x_n = 1{,}8(11-n) = \dfrac{9}{5}(11-n)$.Равенство $x_n = \dfrac{9}{5}(11-n)$означает, что 11-n делится на 5, что возможно только при n=6. Значит, из №1 тест писали 6 человек и $x_6 = 18 \cdot 6 - 19{,}8 \cdot (6-1) = 9$. Ответ: n=6, $x_6 = 9$.

Решение б). ММЗ: $\begin{cases} \dfrac{x_1 + x_2 ... + x_5 + x_6}{6} = 18 \\ \dfrac{x_1 + x_2 ... + x_5}{5} = 19{,}8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 ... + x_5 + x_6 = 108 \\ x_1 + x_2 ... + x_5 = 99 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 ... + x_5 = 99 \\ x_i \in N; x_i \geq 1 \end{cases}$.Согласно «принципу крайнего», x_m максимален, когда остальные четыре x_i минимальны, т.е. равны по 1, тогда $x_{\max} = 95$. Ответ: $x_{\max} = 95$.

Решение в). Пусть m>10 учащихся во второй гимназии и они набрали по a_i; $i \in \{1;..;m\}$ баллов, первоначальный средний балл равен K. Учащийся с $x_6 = 9$баллами перешёл из №1 в №2, тогда ММЗ запишется в виде:

$\begin{cases} \dfrac{a_1 + a_2 ... + a_m}{m} = K \\ \dfrac{a_1 + a_2 ... + a_m + x_6}{m+1} = 1{,}1 \cdot K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 ... + a_m = K \cdot m \\ a_1 + a_2 ... + a_m + x_6 = 1{,}1 \cdot K(m+1) \end{cases} \Rightarrow K \cdot m + x_6 = 1{,}1 \cdot K(m+1)$. Подставим $x_6 = 9$ и умножим уравнение на 10, получим диофантово уравнение с условием m>10: $K \cdot m + x_6 = 1{,}1 \cdot K(m+1) \Leftrightarrow 10K \cdot m + 90 = 11 \cdot K(m+1) \Leftrightarrow 90 = k(m+11)$. Число $(m+11) \geq 22$ является делителем 90, среди 12 делителей числа 90 лишь 90,45,30 удовлетворяют условию $(m+11)\geq 22$.При m+1=90,m=79; при m+1=45, m=34; при m+1=30, m=19. Минимальное m=19 . Ответ:19.

2.21. (ЕГЭ2018.В338). В двух гимназиях учащиеся писали тест. Из каждой гимназии тест писали по крайней мере два учащихся. Каждый учащийся, писавший тест набрал натуральное количество баллов. Среднее арифметическое баллов учащихся первой гимназии – натуральное число, а второй - 14. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешёл из первой гимназии во вторую, а средние баллы за тест были пересчитаны в каждой гимназии, оказалось, что они понизились в обеих гимназиях на 2,5%. А) Какое количество людей могло писать тест во второй гимназии?

Б) Каждый учащийся второй гимназии, писавший тест, набрал больше баллов, чем перешедший в неё учащийся первой гимназии. Какой максимальный балл мог набрать учащийся из второй гимназии?

В) Какое наибольшее число учащихся могло писать тест в первой гимназии?

Ответ: а)19; б)122; в)101.

Решение а). Пусть во второй гимназии m учащихся и они набрали по $a_i;\ \ i\in\{1;..;m\}$ баллов, первоначальный средний балл равен 14. Учащийся с x_n баллами перешёл из №1 в №2, тогда ММЗ для гимназии №2 запишется в виде:

$$\begin{cases}\dfrac{a_1+a_2...+a_m}{m}=14\\ \dfrac{a_1+a_2...+a_m+x_n}{m+1}=13{,}65\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1+a_2...+a_m=14\cdot m\\ a_1+a_2...+a_m+x_n=13{,}65\cdot(m+1)\end{cases}\Rightarrow 14\cdot m+x_n=13{,}65\cdot(m+1)\Leftrightarrow.$$

$$0{,}35m+x_n=13{,}65\Leftrightarrow 20x_n=273-7m\Leftrightarrow 20x_n=7\cdot(39-m)\vdots 7\Rightarrow x_n\vdots 7\Rightarrow x_n\in\{7;14;21...\}.$$

При $x_n=7$ получаем $20\cdot 7=273-7m\Leftrightarrow m=19$. При других значениях $x_n\neq 7$ натуральных решений уравнения $20x_n=273-7m$ нет. Итак, во второй гимназии тест писали 19 человек, а перешедший туда ученик первой гимназии набрал (и принёс с собой) 7 баллов. Ответ:19.

Решение б). Для второй гимназии МатМодельЗадачи: $\begin{cases}a_1+a_2...+a_{19}=14\cdot 19\\ a_i\geq 8;a_1\in N\end{cases}$. Чтобы получить максимальное значение какого-то из a_i, например, a_{19}, надо остальные 18 слагаемых a_i взять по минимуму, т.е.по 8, тогда $\max a_{19}=266-18\cdot 8=122$. Ответ:122.

Решение в). Пусть n учащихся в первой гимназии и они набрали по $x_i;\ \ i\in\{1;..;n\}$ баллов. Учащийся с x_n баллами перешёл из №1 в №2, тогда мат.модель задачи для гимназии №1 запишется в виде: $\begin{cases}\dfrac{x_1+x_2...+x_{n-1}+x_n}{n}=k\\ \dfrac{x_1+x_2...+x_{n-1}}{n-1}=0{,}975\cdot k\end{cases}\Leftrightarrow$, где k-первоначальный средний балл, $0{,}975\cdot k$- новый, пересчитанный средний балл.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x_1+x_2...+x_{n-1})+x_n=k\cdot n\\ x_1+x_2...+x_{n-1}=0{,}975\cdot k(n-1)\end{cases}\Leftrightarrow 0{,}975\cdot k(n-1)+x_n=k\cdot n\Leftrightarrow x_n=0{,}025k\cdot n+0{,}975k.$$

Домножим на 40 обе части уравнения для избавления от дробных коэффициентов: $40x_n=k(n+39)$. Мы знаем из п.а), что $x_n=7$, тогда уравнение примет вид $40x_n=k(n+39)\Leftrightarrow 280=k(n+39)\Rightarrow 280\vdots(n+39),(n+39)\geq 41$. Таких делителей у числа 280 немного: 70,140,280. Если $(n+39)=70 \Rightarrow n=31, k=4.$ Если $(n+39)=140 \Rightarrow n=101, k=2.$ Если $(n+39)=280 \Rightarrow n=131, k=1 \Leftrightarrow \varnothing.$ Наибольшее n=101.

Покажем, что средний балл действительно может быть равным 2, т.е. при $x_n=7; n=101; \dfrac{x_1+x_2...+x_{100}+7}{101}=2 \Leftrightarrow x_1+x_2...+x_{100}=195$ для выполнения равенства достаточно взять 99 единиц и один раз 96.

Ответ:101.

2.22. (ЕГЭ2018.В347). В двух гимназиях учащиеся писали тест. Из каждой гимназии тест писали по крайней мере два учащихся. Каждый учащийся, писавший тест набрал натуральное количество баллов. Среднее арифметическое баллов учащихся первой гимназии – натуральное число, а второй - 42. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешёл из первой гимназии во вторую, а средние баллы за тест были пересчитаны в каждой гимназии, оказалось, что они понизились в обеих гимназиях на 10%. А) Какое количество людей могло писать тест во второй гимназии?

Б) Каждый учащийся второй гимназии, писавший тест, набрал больше баллов, чем перешедший в неё учащийся первой гимназии. Какой максимальный балл мог набрать учащийся из второй гимназии?

В) Какое наибольшее число учащихся могло писать тест в первой гимназии?

Ответ: а)19; б)122; в)101.

2.23.Можно ли сократить дробь $\dfrac{111n+5}{64n+3}; n\in N$? Если можно, то а) на какое натуральное число;

б) при каких значениях n?

Решение. Сначала вспомним простые свойства делимости чисел: если два числа делятся на p, то сумма, разность чисел делятся на p. Более того, любая линейная комбинация этих чисел делится на p: $a \vdots p;\ \ b \vdots p \Rightarrow (\lambda a \pm \mu b) \vdots p$. Пусть дробь сократима на натуральное p>1, это значит, $(111n+5) \vdots p;\ \ (64n+3) \vdots p \Rightarrow (111n+5)=p\cdot d_1;\ \ (64n+3)=p\cdot d_2;\ \ d_1;d_2\in N$, тогда линейная комбинация скобок делится на p, имеем: $111(64n+3)-64(111n+5)=111p\cdot d_2-\ \ 64p\cdot d_1;$ или $13=333-320=p(111\cdot d_2-\ \ 64\cdot d_1);$ получили, что простое число 13 делится на p>1, это возможно только при p=13. Т.е. дробь может сокращаться только на13.

Полученный результат наводит на мысль рассуждать про n по модулю 13: $n=13m+r; r\in\{0;1;2;3;4;...11;12\}.$ Выясним, при каких n дробь сократима? $\dfrac{111n+5}{64n+3}=\dfrac{111(13m+r)+5}{64(13m+r)+3}=\dfrac{111(13m)+(111r+5)}{64(13m)+(64r+3)}; m\in N$. Очевидно, что дробь сократима на 13 только если $(111r+5) \vdots 13$ и $(64r+3) \vdots 13$, где $r\in\{0;1;2;3;4;...11;12\}$.Подставляя значения r в $(64r+3)$, получаем числа $(64r+3)\in\{3;67;131;195;259;323;387;451;515;579\}$из которых только 195 (при r=3) делится на 13. При этом $(111r+5)=333+5=338 \vdots 13$. Итак, только при $n=13m+3; m\in N$ данная дробь сокращается на 13. Ответ: а) на 13; б) при $n=13m+3; m\in N$.

2.24.а) При каких натуральных n дробь $\dfrac{5n^3+2n^2-4n+2}{5n+7}$ принимает целые значения; б) сократима ли дробь и если сократима, то на какое натуральное число? В) при каких значениях n дробь сократима?

Решение. А) Обыкновенная дробь называется неправильной, если её числитель больше или равен знаменателю; обычно в таком случае выделяют целую часть. Аналогично, алгебраическая дробь называется неправильной, если степень многочлена в числителе больше или равна степени многочлена в знаменателе; обычно в таком случае выделяют целую часть.

Алгебраическая дробь $\frac{5n^3+2n^2-4n+2}{5n+7}$ является неправильной, целую часть можно выделить, разделив уголком многочлен третьей степени на линейный двучлен с остатком: $\frac{5n^3+2n^2-4n+2}{5n+7}=n^2-n+\frac{3n+2}{5n+7}$.

Выражение n^2-n принимает целые значения при целых n, числитель дроби $\frac{3n+2}{5n+7}$ при натуральных n меньше знаменателя, поэтому значения дроби меньше единицы, следовательно, исходная дробь не принимает целых значений. Отв. а) ни при каких n.

Б) Вопрос о сократимости исходной дроби переносится на дробь $\frac{3n+2}{5n+7}$.

Пусть эта дробь сократима на натуральное p>1, это значит, $(3n+2)\vdots p;\quad (5n+7)\vdots p \Rightarrow (5n+7)=p\cdot d_1;\quad (3n+2)=p\cdot d_2;\quad d_1;d_2\in N$, тогда линейная комбинация скобок делится на p, имеем: $3(5n+7)-5(3n+2)=3p\cdot d_1-\ 5p\cdot d_2;$ или $11=21-10=p(3\cdot d_1-\ 5\cdot d_2);$ получили, что простое число 11 делится на p>1, это возможно только при p=11. Т.е. **дробь может сокращаться только на11.** **Отв. 11.**

В) Полученный результат наводит на мысль рассуждать про n по модулю 11:
$n=11m+r;r\in\{0;1;2;3;4;...10\}$. Выясним, при каких n сократима дробь

$$\frac{5n^3+2n^2-4n+2}{5n+7}=\frac{5(11m+r)^3+2(11m+r)^2-4(11m+r)+2}{5(11m+r)+7}=\frac{11(...)+(5r^3+2r^2-4r+2)}{11(5m)+(5r+7)}$$, здесь в скобку в числителе вошли все слагаемые, содержащие m , их явный вид нам не нужен, т.к. выражение $11(...)$ очевидно делится на 11. Записанная дробь сокращается на 11 тогда и только тогда, когда $(5r^3+2r^2-4r+2)\vdots 11$ и $(5r+7)\vdots 11$ при $r\in\{0;1;2;3;4;...10\}$. Делая перебор по всем r (лучше начать со второго выражения $(5r+7)$), обнаруживаем, при r=3 $(5r+7)=15+7=22$; и подставляя во второе: $(5r^3+2r^2-4r+2)=(5\cdot 3^3+2\cdot 3^2-4\cdot 3+2)=143=11\cdot 13$, получаем, что дробь сократима на 11.

Итак, только при $n=11m+3;m\in N$ данная дробь сокращается на 11. Ответ: а) нет; б) на 11; б)при $n=11m+3;m\in N$.

2.25.а) При каких натуральных n дробь $\frac{3n^3-8n^2+14n-8}{3n-5}$ **принимает целые значения; б)сократима ли дробь и если сократима, то на какое натуральное число? В) при каких значениях n дробь сократима?** Отв. В) $n=7m+4;m\in N$

2.26.а) При каких натуральных n дробь $\frac{20n^3-19n^2+3n+3}{20n+1}$ **принимает целые значения; б)сократима ли дробь и если сократима, то на какое натуральное число? В) при каких значениях n дробь сократима?** Отв. В) $n=7m+1;m\in N$

2.27. а) Покажите, что числа 16, 1156, 111556, 11115556,…, где последующее получается из предыдущего путём вписывания в середину предыдущего числа 15, являются точными квадратами.

Подсказка: *проводя численные эксперименты, можно увидеть, что* общий член последовательности равен $a_n = 6+5\cdot 10+5\cdot 10^2...+5\cdot 10^{n-1}+10^n+10^{n+1}+...+10^{2n-1}$, или после перегруппировки: $a_n = 1+4\cdot\left(1+10+10^2...+10^{n-1}\right)+\left(1+10+10^2...+10^{n-1}+10^n+10^{n+1}+...+10^{2n-1}\right)$. Суммируя геометрические прогрессии, получим: $a_n = 1+4\cdot\dfrac{10^n-1}{9}+\dfrac{10^{2n}-1}{9}=\dfrac{10^{2n}+4\cdot 10^n+4}{9}=\left(\dfrac{10^n+2}{3}\right)^2$.

Число $\dfrac{10^n+2}{3}$ является целым, числитель делится на 3 по признаку делимости на 3, т.к.сумма цифр числа $\left(10^n+2\right)$ равна 3. Следовательно, a_n является квадратом целого числа.

Б) **Покажите, что числа 49, 4489, 444889, …, где последующее получается из предыдущего путём вписывания в середину предыдущего числа 48, являются точными квадратами.**

2.28.(Л.2013.В.15.С6). Известно, что многочлен $p_{50}(x)=a_{50}x^{50}+a_{49}x^{49}+a_{48}x^{48}+...+a_1x^1+a_0$ **можно представить в виде** $p_{50}(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_{50})$**, где все** x_i **-целые числа.**

А)Найдите $a_{50}+a_{49}+a_{48}+...+a_1+a_0$, если $x_{47}=1$.

Б)Если $a_{50}+a_{49}+a_{48}+...+a_1+a_0=24$,то может ли $p_{50}(8)=0$?

В)Определите, какое максимальное количество различных корней может иметь многочлен $p_{50}(x)$, если $a_{50}+a_{49}+a_{48}+...+a_1+a_0=-60$?

Решение. А) Так как $x_{47}=1$- корень многочлена, то $p_{50}(1)=a_{50}1^{50}+a_{49}1^{49}+a_{48}1^{48}+...+a_1 1^1+a_0=0$. Отв.0.

Б) **По условию** $p_{50}(1)=24$, подставляя x=1 в тождество

$$p_{50}(x)=a_{50}x^{50}+a_{49}x^{49}+a_{48}x^{48}+...+a_1x^1+a_0=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_{50}),$$ **получим:**

$p_{50}(1)=a_{50}+a_{49}+a_{48}+...+a_1+a_0=24=(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)...(1-x_{50})$. **Надо выяснить, может ли** $x_i=8$ **какой-то корень равняться 8, т.е.** $24=(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_i)...(1-x_{50})$. Проверим гипотезу, что $x_i=8$**, тогда** $24=(1-x_1)(1-x_2)...(1-8)...(1-x_{50})\Rightarrow 24\vdots 7\Leftrightarrow\varnothing$. Источник противоречия – предположение, что $x_i=8$**, значит, это неверно. Ответ: нет.**

В)Если $p_{50}(1)=a_{50}+a_{49}+a_{48}+...+a_1+a_0=-60=1\cdot 2\cdot(-2)\cdot 3\cdot 5=(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)...(1-x_{50})$

Максимальное количество различных целых множителей, на которые раскладывается -60, равно пяти. Получена совокупность из четырёх уравнений: $\left[\begin{array}{l}(1-x_1)=1\\(1-x_2)=2\\(1-x_3)=-2\\(1-x_4)=3\\(1-x_5)=5\end{array}\right.$, пять различных корней $x_i\in\{-4;-2;-1;0;3\}$**. Отв.5.**

2.29. Известно, что многочлен $p_{50}(x)=a_{50}x^{50}+a_{49}x^{49}+a_{48}x^{48}+...+a_1x^1+a_0$ **можно представить в виде** $p_{50}(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_{50})$**, где все** x_i **-целые числа.**

А)Найдите $a_{50}-a_{49}+a_{48}-...-a_1+a_0$, если $x_{46}=-1$.

Б)Если $a_{50}+a_{49}+a_{48}+...+a_1+a_0=36$,то может ли $p_{50}(8)=0$?

В)Определите, какое максимальное количество различных корней может иметь многочлен $p_{50}(x)$, если $a_{50}+a_{49}+a_{48}+...+a_1+a_0=-210$? Отв.а)0; б)нет; в)6.

2.30. Известно, что многочлен $p_{100}(x)=x^{100}+a_{99}x^{99}+a_{98}x^{98}+...+a_1x^1+a_0$ **можно представить в виде** $p_{100}(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_{100})$, **где все** x_i **-целые числа и** $x_1\le x_2\le x_3\le ...x_{100}$. **Найдите максимально возможное значение** x_{100} в каждом из следующих случаев.

А) Все коэффициенты ограничены $|a_i|\le 100$.

Б) Если .

В) $|a_{100}+a_{99}+a_{98}+...+a_1+a_0|\le 100, p(1)\ne 1.$

Подсказка. А) Докажем, что $x_{100}\le 100$. По условию x_{100}- корень, $|a_i|\le 100$ следовательно, $x_{100}{}^{100}+a_{99}x_{100}{}^{99}+a_{98}x_{100}{}^{98}+...+a_1x_{100}{}^{1}+a_0=0\Leftrightarrow$

$$x_{100}{}^{100}=-a_{99}x_{100}{}^{99}-a_{98}x_{100}{}^{98}-...-a_1x_{100}{}^{1}-a_0\le 100\left(x_{100}{}^{99}+x_{100}{}^{98}+...+x_{100}{}^{1}+1\right)=100\cdot\frac{x_{100}{}^{100}-1}{x_{100}{}^{1}-1}$$

Мы хотим доказать, что $x_{100}\le 100$; предположим противное: что $x_{100}>100\Rightarrow x_{100}\ge 101$, т.к. x_{100}- целое число. Тогда $x_{100}-1\ge 100\Rightarrow\frac{1}{x_{100}-1}\le\frac{1}{100}$. Следовательно, $100\cdot\frac{x_{100}{}^{100}-1}{x_{100}{}^{1}-1}\le x_{100}{}^{100}-1$. Сопоставляя начало и конец выкладки, получаем

$$x_{100}{}^{100}=-a_{99}x_{100}{}^{99}-a_{98}x_{100}{}^{98}-...-a_1x_{100}{}^{1}-a_0\le 100\left(x_{100}{}^{99}+x_{100}{}^{98}+...+x_{100}{}^{1}+1\right)=100\cdot\frac{x_{100}{}^{100}-1}{x_{100}{}^{1}-1}\le x_{100}{}^{100}-1 \text{или}$$

$x_{100}{}^{100}\le x_{100}{}^{100}-1$, что неверно. Источник противоречия - предположение противного, значит гипотеза неверна и $x_{100}\le 100$. Для завершения доказательства осталось показать, что x_{100} может принимать значение 100. Отв. а)100; б)99; в)101.

2.31. При каких целых значениях n дробь $\frac{19n+17}{7n+11}$ **является целым числом?**

Решение.Часть ответа можно найти путём преобразований дроби, выделяя целую часть: $\frac{19n+17}{7n+11}=\frac{(14n+22)+5n-5}{7n+11}=2+\frac{5n-5}{7n+11}$ **или** $\frac{19n+17}{7n+11}=\frac{(21n+33)-2n-16}{7n+11}=3-\frac{2n+16}{7n+11}$, **находим часть ответа, что при** $n\in\{-8;1\}$ **дробные части обнуляются и дробь** $\frac{19n+17}{7n+11}$ **является целым числом.**

Для нахождения полного ответа используем математический аппарат нахождения НОД числителя и знаменателя дроби на основе алгоритма Евклида:

$$НОД(19n+17;7n+11)=НОД(12n+6;7n+11)=НОД(5n-5;7n+11)=$$
$$НОД(5n-5;2n+16)=НОД(n+53;n-37)=НОД(90;n-37).$$

Для сократимости дроби до целого числа необходимо, чтобы знаменатель дроби $7n+11$ при каком-то n совпал с делителем 90. Проверим, при каких целых n выполняется соотношение $(7n+11)\in\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm5;\pm6;\pm9;\pm10;\pm15;\pm18;\pm30;\pm45;\pm90\}$.

Уравнения $7n+11=\pm3; 7n+11=\pm10; 7n+11=\pm18; 7n+11=\pm45$ имеют целочисленные решения $n\in\{-8;-3;-2;1\}$. Отв. при $n\in\{-8;-3;-2;1\}$ дробь $\dfrac{19n+17}{7n+11}$ является целым числом.

2.32.(Л.2013.В28.С6). **При каких целых значениях n дробь** $\dfrac{n^4-3n+14}{n^2+2n+3}$ **является целым числом?**

Решение. Алгебраическая дробь неправильная, поэтому выделяем целую и дробную части (деля уголком), имеем:

$\dfrac{n^4-3n+14}{n^2+2n+3}=n^2-2n+1+\dfrac{n+11}{n^2+2n+3}$. Нас интересует, при каких целых n последовательность $\dfrac{n+11}{n^2+2n+3}$ принимает целые значения. Значение n=-11 очевидно. Эта последовательность сходится к нулю, поэтому, начиная с некоторого n будет ограниченной, ограничена, например единицей и тогда уже не примет целых значений. Поэтому выясним, когда $\left|\dfrac{n+11}{n^2+2n+3}\right|\ge1$, это будет необходимое условие на n. Решим неравенство на множестве целых чисел

$$\left|\frac{n+11}{n^2+2n+3}\right|\ge1\Leftrightarrow|n+11|\ge|n^2+2n+3|\Leftrightarrow|n^2+2n+3|^2-|n+11|^2\le0\Leftrightarrow(n^2+3n+14)(n^2+n-8)\le0$$

последнее неравенство справедливо на отрезке $n\in\left[\dfrac{-1-\sqrt{33}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{33}}{2}\right]\Leftrightarrow n\in\{-3;-2;-1;0;1;2\}$, т.к. n-целое.

Проверим достаточность найденного условия:

n	-3	-2	-1	0	1	2	-11
$\dfrac{n+11}{n^2+2n+3}$	$\dfrac{8}{6}$	$\dfrac{9}{3}=3$	$\dfrac{10}{-2}=-5$	$\dfrac{11}{3}$	$\dfrac{12}{6}=2$	$\dfrac{13}{11}$	0
	$\varnothing$			$\varnothing$		$\varnothing$	

Ответ:-11;-2;-1;1.

2.33. (Л.2013.В.29.С6). **Является ли квадратом натурального числа**

А) четырёхзначное число 5776? Восьмизначное число 12345679?

Б) шестизначное число вида $\overline{abcabc}$, где a,b,c-цифры, $a\ne0$.

В) число вида 111…1, составленное из n единиц, $n\ge2$?

Г) выражение $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$?

Решение. А) Извлекая по алгоритму квадратный корень, получим: $\sqrt{5776}=76$; $3513<\sqrt{112345679}<3514$.

Б) $\overline{abcabc}=\overline{abc}\cdot1001=\overline{abc}\cdot7\cdot11\cdot13$ не равно квадрату натурального числа, т.к. трёхзначное число $\overline{abc}$ не может содержать три множителя 7, 11, 13. Отв. нет.

В)Как известно, квадраты чисел могут оканчиваться 0,1, 4,5,6,9. Из квадратов на единицу оканчиваются числа вида $\overline{ab1}$ или $\overline{ab9}$, квадраты которых, например,

$\overline{ab1}=(100a+10b+1)^2=10000a^2+100b^2+1+2000ab+200a+20b$ содержат в десятичной записи не только единицы. Отв. нет.

Г) Преобразуем, перемножив первый множитель с четвёртым и выделив полный квадрат трёхчлена: $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1=(n^2+3n+1)^2$.

Отв. да, является квадратом.

2.34. (Л.2013.В.30.С6). **Является ли квадратом натурального числа**

А) какое-либо число, сумма цифр которого равна 10? Может ли это число быть однозначным; двузначным; трёхзначным; n-значным (при каких n ?)

Б) число $2024^{2023}+2$?

В) числовое выражение $2024^2+2024^2 2025^2+2025^2$?

Отв. а)да; б)нет; в)да.

2.35.(ЕГЭ2023.В406.№18). На столе лежат три карточки, на каждой из которых написана одна цифра. Ваня составил из написанных на карточках цифр трёхзначное число А. Петя выбрал две из этих карточек, составил из написанных на них цифр двузначное число В и вернул карточки на место. Коля тоже выбрал две из этих карточек, составил из написанных на них цифр двузначное число С (возможно, то же самое, что и Петя).

А)Может ли быть верным равенство A=B+C, если A>150 ?

Б) Может ли быть верным равенство A=B+C, если числа B и C делятся на 9?

В)Найдите наименьшее число А, для которого может быть верным равенство A=B+C.

Отв. а)да;б)нет;в)109.

Решение.

В эвристике есть правило или «принцип крайнего», предполагающий рассмотрение экстремальных, граничных, максимальных или минимальных случаев. Применим его в данной задаче.

Трёхзначное число A=B+C, равное сумме двух двузначных, может принимать наименьшее значение 100 и наибольшее значение 99+99=198, т.е. $A\in\{100;101;...198\}$, всего 99 чисел; однако, не все из них удовлетворяют требованию задачи: раскладываются в сумму двух двузначных, составленных из цифр трёхзначного числа. Например, **из цифр числа 100 можно составить только два двузначных числа**:10 и 10, но их сумма не равна 100. Попробуем найти минимальное трёхзначное число, удовлетворяющее требованию задачи.

Начнём перебор :101;102;103;…, 109;110;…

100	10,10.	$10+10\neq 100$
101	10,11	$10+11\neq 100$
102	10,20,112,21	$\sum\neq 100$
103	10.30,31,13	$\sum\neq 100$
104	10,40,14,41	$\sum\neq 100$
105	10,50,15,51	$\sum\neq 100$
106	10,60,16,61	$\sum\neq 100$
107	10,70,17,71	$\sum\neq 100$

108	10,80,18,81	
109	10,90,19,91	90+19=109

Дальнейший перебор не продолжаем, т.к. **минимальное число 109 найдено**. Поставим вопрос (в соответствии с принципом краайнего) о наибольшем трёхзначном числе, удовлетворяющем требованию задачи. Тогда перебор начнём справа, с наибольшего возможного числа:198;197;196;195;194;193;192;191;190;189;188;…Легко убедиться, что числа 198-190 не удовлетворяют требованию задачи (убедитесь самостоятельно), 189=91+98. Дальнейший перебор не продолжаем, т.к. **максимальное число 189 найдено**. Отв.а)да;в)109.

Б) Пусть **числа В и С делятся на 9, тогда число А делится на 9.** $A=\overline{abc}\vdots 9 \Leftrightarrow a+b+c\vdots 9$**.**

Если $\overline{ab}\vdots 9 \quad и \quad \overline{bc}\vdots 9 \Rightarrow (a+2b+c)\vdots 9 \Rightarrow b\vdots 9 \Rightarrow b\in\{0;9\}$;

Аналогично, если $\overline{ab}\vdots 9 \quad и \quad \overline{ac}\vdots 9 \Rightarrow (2a+b+c)\vdots 9 \Rightarrow a\vdots 9 \Rightarrow a\in\{0;9\}$;

если $\overline{bc}\vdots 9 \quad и \quad \overline{ac}\vdots 9 \Rightarrow (a+b+2c)\vdots 9 \Rightarrow c\vdots 9 \Rightarrow c\in\{0;9\}$; то есть в **числах А, В, С одна из цифр 0 или 9**.

Таким образом число А составлено из цифр $\{a;b;0\}$ или $\{a;b;9\}$.

Если число А составлено из цифр $\{a;b;0\}$, то $(a+b)\vdots 9$, пары (a,b) цифр a,b могут принимать следующие значения

1	2	3	4
8	7	6	5

Доказано, что максимальное значение А равно 189, значит одна из цифр всех чисел 1, но из цифр 0,1,8 **невозможно** составить два требуемых числа (см. таблицу: 10,80,18,81).

Если число А составлено из цифр $\{a;b;9\}$, то $(a+b)\vdots 9$, пары (a,b) цифр a,b могут принимать следующие значения

1	2	3	4
8	7	6	5

Доказано, что максимальное значение А равно 189, значит одна из цифр всех чисел 1, из цифр 1,8,9 **можно** составить единственную пару требуемых чисел (см. таблицу: 91;98), ни одно из которых не делится на 9. Полученное противоречие, доказывает, что гипотеза неверна. Отв. б)нет.

2.36 .(ЕГЭ2023.В401.№18). На столе лежат три карточки, на каждой из которых написана одна цифра. Ваня составил из написанных на карточках цифр трёхзначное число А. Петя выбрал две из этих карточек, составил из написанных на них цифр двузначное число В и вернул карточки на место. Коля тоже выбрал две из этих карточек, составил из написанных на них цифр двузначное число С (возможно, то же самое, что и Петя).

А)Может ли быть верным равенство А=В+С, если А<150 ?

Б) Может ли быть верным равенство А=В+С, если числа В и С делятся на 3?

В)Найдите наибольшее число А, для которого может быть верным равенство А=В+С.

Отв. а)да;б)нет;в)189.

2.37. **Найдите трёхзначное число $A=\overline{abc}$, обладающее двумя свойствами: сумма цифр А делится на 10; сумма цифр числа (А+8) делится на 10. Сколько таких чисел? Найдите их.**

Решение. Сумма цифр числа $A=\overline{abc}$ кратна 10, т.е., следовательно, $\left[\begin{array}{l} a+b+c=10; \\ a+b+c=20. \end{array}\right.$.

Если $A=\overline{abc}$, то как выразить цифры числа $A+8=\overline{abc}+8$? При сложении чисел в десятичной системе счисления имеет место процесс «перехода через десяток», когда при сложении двух цифр одного разряда полученная сумма равна 10, 11, .., 18, тогда в более старший разряд переносится единица.

1)Если цифра $c\in\{0;1\}$, то «перехода через десяток» нет, $A+8=\overline{abc}+8=\overline{ab(c+8)}$ и сумма цифр увеличивается на 8: $S\left(\overline{ab(c+8)}\right)=10+8=18$ и делимости на 10 нет, такие числа не удовлетворяют требованию задачи.

2)Рассмотрим сначала случай одного «перехода через десяток» из разряда единиц в разряд десятков, для этого потребуем, чтобы $b\neq 9; c\in\{2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Рассмотрим эти восемь случаев $c\in\{2;3;4;5;6;7;8;9\}$ последовательно.

$A+8=\overline{ab2}+8=\overline{a(b+1)0}\Rightarrow S\left(\overline{a(b+1)0}\right)=a+b+1; S\downarrow 1$, т.е. сумма цифр уменьшилась на 1, стала равной 9 и делимости на 10 нет. Такие числа не удовлетворяют требованию задачи.

$A+8=\overline{ab3}+8=\overline{a(b+1)1}\Rightarrow S\left(\overline{a(b+1)1}\right)=a+b+2; S\downarrow 1$, т.е. сумма цифр уменьшилась на 1 и делимости на 10 нет. Такие числа не удовлетворяют требованию задачи.

$A+8=\overline{ab4}+8=\overline{a(b+1)2}\Rightarrow S\left(\overline{a(b+1)2}\right)=a+b+3; S\downarrow 1$, т.е. сумма цифр уменьшилась на 1, стала равной 9 или 19 и делимости на 10 нет. Такие числа не удовлетворяют требованию задачи.

$A+8=\overline{ab5}+8=\overline{a(b+1)3}\Rightarrow S\left(\overline{a(b+1)3}\right)=a+b+4; S\downarrow 1$, т.е. сумма цифр уменьшилась на 1, стала равной 9 или 19 и делимости на 10 нет. Такие числа не удовлетворяют требованию задачи.

...

$A+8=\overline{ab9}+8=\overline{a(b+1)7}\Rightarrow S\left(\overline{a(b+1)7}\right)=a+b+8; S\downarrow 1$, т.е. сумма цифр уменьшилась на 1, стала равной 9 или 19 и делимости на 10 нет. Такие числа не удовлетворяют требованию задачи.

3)Рассмотрим теперь случай двойного «перехода через десяток» из разряда единиц в разряд десятков, затем в разряд сотен, для этого потребуем, чтобы $b=9; c\in\{2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Рассмотрим эти восемь случаев $c\in\{2;3;4;5;6;7;8;9\}$ последовательно.

$A+8=\overline{a92}+8$, a+9+2=20 это возможно только при a=9, но 992+8=1000, сумма цифр не кратна 10. Такие числа не удовлетворяют требованию задачи.

$A+8=\overline{a93}+8=\overline{(a+1)01}\Rightarrow S\left(\overline{(a+1)01}\right)=a+2; S\downarrow 10$, т.е. сумма цифр уменьшилась на 10, это возможно только при a=8, делимость на 10 есть. Число 893 удовлетворяют требованию задачи, 893+8=901.

$A+8=\overline{a94}+8=\overline{(a+1)02}\Rightarrow S\left(\overline{(a+1)02}\right)=a+3; S\downarrow 10$, т.е. сумма цифр уменьшилась на 10, это возможно только при a=7, делимость на 10 есть. Число 794 удовлетворяют требованию задачи, 794+8=802.

$A+8=\overline{a95}+8=\overline{(a+1)03}\Rightarrow S\left(\overline{(a+1)03}\right)=a+4; S\downarrow 10$, т.е. сумма цифр уменьшилась на 10, это возможно только при a=6, делимость на 10 есть. Число 695 удовлетворяют требованию задачи, 695+8=703.

$A+8=\overline{a96}+8=\overline{(a+1)04}\Rightarrow S\left(\overline{(a+1)04}\right)=a+5; S\downarrow 10$, т.е. сумма цифр уменьшилась на 10, это возможно только при а=5, делимость на 10 есть. Число 596 удовлетворяют требованию задачи, 596+8=604.

$A+8=\overline{a97}+8=\overline{(a+1)05}\Rightarrow S\left(\overline{(a+1)05}\right)=a+6; S\downarrow 10$, т.е. сумма цифр уменьшилась на 10, это возможно только при а=4, делимость на 10 есть. Число 497 удовлетворяют требованию задачи, 497+8=505.

$A+8=\overline{a98}+8=\overline{(a+1)06}\Rightarrow S\left(\overline{(a+1)06}\right)=a+7; S\downarrow 10$, т.е. сумма цифр уменьшилась на 10, это возможно только при а=3, делимость на 10 есть. Число 398 удовлетворяют требованию задачи, 398+8=406.

$A+8=\overline{a99}+8=\overline{(a+1)07}\Rightarrow S\left(\overline{(a+1)07}\right)=a+8; S\downarrow 10$, т.е. сумма цифр уменьшилась на 10, это возможно только при а=2, делимость на 10 есть. Число 299 удовлетворяют требованию задачи, 299+8=307.

Отв.требуемых чисел всего семь, $A\in\{893;794;695;596;497;398;299\}$.

2.38. **Найдите трёхзначное число $A=\overline{abc}$, обладающее двумя свойствами: сумма цифр А делится на 11; сумма цифр числа (А+7) делится на 11. Сколько таких чисел? Найдите их.**

Отв. Отв.требуемых чисел всего пять, $A\in\{895;796;697;598;499\}$.

2.39. Светлана написала число 2025 и разделила его на 7, оказалось, что число не делится. Тогда она приписала справа ещё раз 2025 и снова разделила на 7. Сколько раз будет написано число 2025, чтобы полученное число всё-таки разделилось на 7?

Решение. Воспользуемся признаком делимости на 7: $\overline{abcde}\,\vdots\,7\Leftrightarrow\overline{abcd}-2e\,\vdots\,7$ (проверьте его на примерах, попробуйте обосновать).

Заметим, что числа, получаемые Светланой 20252025; 202520252025; 2025202520252025;…, оказывается, можно разложить на множители:

$20252025=2025\cdot 10001$; $202520252025=2025\cdot 100010001$; $2025202520252025=2025\cdot 1000100010001$; …
Поскольку 2025 не делится на 7, то делимость получаемых чисел определяется делимостью чисел 10001; 100010001; 1000100010001; …Применим к ним признак делимости на 7:

$$10001\,\vdots\,7\Leftrightarrow 1000-2=998\,\vdots\,7\Leftrightarrow 99-16=83\,\vdots\,7\Leftrightarrow 8-6=2\,не\,\vdots\,7\Rightarrow 10001\,не\,\vdots\,7.$$

Проверим делимость на 7 числа 100010001, вычисления разместим в таблицу

1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	9	9	8	
1	0	0	0	0	8	3		
1	0	0	0	0	2			
	9	9	9	6				
	9	8	7					
	8	4						

Число 84 делится на 7, следовательно, и верхнее число в таблице делится на 7, а значит $202520252025=2025\cdot 100010001$ делится на 7. Отв. 3 раза.

2.40. Антоша написал число 1983 и разделила его на 7, оказалось, что число не делится. Тогда он приписал слева ещё раз 1983 и снова разделила на 7. Сколько раз будет написано число 1983, чтобы полученное число всё-таки разделилось на 7?

2.41. Ева написала число 2026 и разделила его на 11, оказалось, что число не делится. Тогда она приписал справа ещё раз 2026 и снова разделила на 11. Сколько раз будет написано число 2026, чтобы полученное число всё-таки разделилось на 11? Отв. 11 раз.

Краткий конспект решения.

По признаку делимости на 11 знакочередующаяся сумма (ЗЧС) цифр числа (2026)… равная (-2+0-2+6)=(4), должна быть кратна 11, значит, период из 2026 должен повториться 11 раз, тогда ЗЧС впервые станет кратна 11 (4*11=44). Отв.11 раз.

2.42. Сколько раз надо написать подряд число а)2021; б)2022;в)2023;г)2024 чтобы полученное число всё-таки разделилось на 11? Отв. а)11 раз;б)11;в)11;г)1раз.

2.43. Олеся написала число 1955 и разделила его на 13, оказалось, что число не делится. Тогда она приписала справа ещё раз 1955 и снова разделила на 13. Сколько раз будет написано число 1955, чтобы полученное число всё-таки разделилось на 13?

Решение. Воспользуемся признаком делимости на 13: $\overline{abcde}\,\vdots\,13 \Leftrightarrow \overline{abcd}+4e\,\vdots\,13$ (проверьте его на примерах, попробуйте обосновать).

Заметим, что числа, получаемые Олесей 19551955; 195519551955; 1955195519551955;…, можно разложить на множители:

$19551955=1955\cdot 10001$; $195519551955=1955\cdot 100010001$; $1955195519551055=1955\cdot 1000100010001$; … Поскольку 1955 не делится на 13, то делимость получаемых чисел определяется делимостью чисел 10001; 100010001; 1000100010001; …Применим к ним признак делимости на 13:

$$10001\,\vdots\,13 \Leftrightarrow 1000+4=1004\,\vdots\,13 \Leftrightarrow 116\,\vdots\,13 \Leftrightarrow 35\,не\,\vdots\,13 \Rightarrow 10001\,не\,\vdots\,13.$$

Проверим делимость на 13 числа 100010001, вычисления разместим в таблицу

1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	4	
1	0	0	0	1	1	6		
1	0	0	0	3	5			
1	0	0	2	3				
1	0	1	4					
1	1	7						
3	9							

Число 39 делится на 13, следовательно, и верхнее число в таблице делится на 13, а значит $195519551955=1955\cdot 100010001$ делится на 13. Отв. 3 раза.

2.44. Сколько раз надо написать подряд число а)1945; б)1941;в)1937;г)1950 чтобы полученное число всё-таки разделилось на 13? Отв. а)3 раза; б)3; в)1; г)1раз.

2.45. Ирина написала число 2029 и разделила его на 17, оказалось, что число не делится. Тогда она приписала справа ещё раз 2029 и снова разделила на 17. Сколько раз будет написано число 2029, чтобы полученное число всё-таки разделилось на 17?

Решение. Воспользуемся признаком делимости на 17: $\overline{abcde}\,\vdots\,17 \Leftrightarrow \overline{abcd}+12e\,\vdots\,17$ (проверьте его на примерах, попробуйте обосновать).

Заметим, что числа, 20292029; 202920292029; 2029202920292029;…, можно разложить на множители:

$20292029=2029\cdot 10001$; $202920292029=2029\cdot 100010001$; $2029202920292029=2029\cdot 1000100010001$; … Поскольку 2029 не делится на 17, то делимость получаемых чисел определяется делимостью чисел 10001; 100010001; 1000100010001; …Применим к ним признак делимости на 17:

$$10001\,\vdots\,17 \Leftrightarrow 1000+12=1012\,\vdots\,17 \Leftrightarrow 125\,\vdots\,17 \Leftrightarrow 72\,не\,\vdots\,17 \Rightarrow 10001\,не\,\vdots\,17.$$

Проверим делимость на 17 числа 100010001, вычисления разместим в таблицу

1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	2	
1	0	0	0	1	2	5		
1	0	0	0	7	2			
1	0	0	3	1				
1	0	1	5					
1	6	1						
2	8							

Число 28 не делится на 17, значит не делится на 17 и 100010001. Проверим делимость на 17 следующего числа 1000100010001. Чтобы воспользоваться построенной таблицей, припишем **слева** от числа 100010001 число 1000

1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	2	
1	0	0	0	1	0	0	0	1	2	5		
1	0	0	0	1	0	0	0	7	2			
1	0	0	0	1	0	0	3	1				
1	0	0	0	1	0	1	5					
1	0	0	0	1	6	1						
1	0	0	0	2	8							
1	0	0	9	8								
1	1	0	5									
1	7	0										

Число 170 делится на 17, следовательно, и верхнее число в таблице 1000100010001 делится на 17, а значит $2029202920292029 = 2029 \cdot 1000100010001$ делится на 17. Отв. 4 раза.

2.46. Сколько раз надо написать подряд число а)2006; б)2007;в)2023;г)2025 чтобы полученное число всё-таки разделилось на 17? Отв. а)1 раз; б)4; в)1; г)4раз.

2.47. Евгений написал число 2029 и разделил его на 19, оказалось, что число не делится. Тогда он приписала справа ещё раз 2029 и снова разделил на 19. Сколько раз будет написано число 2029, чтобы полученное число всё-таки разделилось на 19?

Решение. Воспользуемся признаком делимости на 19: $\overline{abcde}\,\vdots\,19 \Leftrightarrow \overline{abcd} + 2e\,\vdots\,19$ (проверьте его на примерах, попробуйте обосновать).

1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	2	
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	4		
1	0	0	0	1	0	0	0	1	8			
1	0	0	0	1	0	0	1	7				
1	0	0	0	1	0	1	5					
1	0	0	0	1	1	1						
1	0	0	0	1	3							
1	0	0	0	7								
1	0	1	4									
1	0	9										
2	8											

Чтобы воспользоваться построенной таблицей, припишем **слева** от числа 1000100010001 число 1000

								1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
								1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	2	

								1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	4		
								1	0	0	0	1	0	0	0	1	8			
								1	0	0	0	1	0	0	1	7				
								1	0	0	0	1	0	1	5					
								1	0	0	0	1	1	1						
								1	0	0	0	1	3							
								1	0	0	0	7								
								1	0	1	4									
								1	0	9										
				1	0	0	0	2	8											
				1	0	0	1	8												
				1	0	1	7													
				1	1	5														
				2	1															
1	0	0	0	2	1															
1	0	0	0	4																
1	0	0	8																	
1	1	6																		
2	3																			

На данном этапе установлено, что число 1000100010001000100001 не делится на 19. Продолжая процесс проверки делимости числа на 19, установим, что число 1000100010001000100010001000100010001 разделится на 19 (закончите вычисления самостоятельно), следовательно, число 2029 надо написать 9 раз, чтобы полученное 36-значное число разделилось на 19.

Отв. 9 раз.

2.48. Докажите делимость числа методом математической индукции:

2.48.1. $\left(6^n+20n+24\right)\vdots 25$

2.48.2. $(5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1})\vdots 23$

2.48.3. $(11^{n+2}+12^{2n+1})\vdots 133$

2.48.4. $(7^{n+2}+8^{2n+1})\vdots 57$

2.48.5. $(2^{n+5}\cdot 3^{4n}+5^{3n+1})\vdots 37$

2.48.6. $(5\cdot 2^{3n+1}+3^{3n+2})\vdots 19$

2.48.7. $(3^{2n+2}-8n-9)\vdots 64$

2.48.8. $(6^{2n}+3^{n+2}+3^n)\vdots 11$

2.48.9. $(2^{5n+3}+5^n\cdot 3^{n+2}+)\vdots 17$

2.48.10. $(4^n+15n-1)\vdots 9$

2.48.11. $(9^n+56n-1)\vdots 64$

2.48.12. $(3^n+2n+3)\vdots 4$

2.48.13. $(3^{2n+1}+40n-67)\vdots 64$

2.48.14. $(4^{2n+1}+6^{3n-1})\vdots 10$

2.48.15. $(5^n+12n-1)\vdots 16$

2.48.16. $(2^{n+2}\cdot 3^n+5n-4)\vdots 5$

2.48.17. $(4^n+15n-1)\vdots 3$

2.48.18. $(3^{2n+3}-24n+37)\vdots 8$

2.48.19. $(8^n-7n-1)\vdots 7$

2.48.20. $(6^n-5n+24)\vdots 16$

2.48.21. $(7^n - 6n + 35) \vdots 6$

2.48.22. $(27 \cdot 3^{2n} - 24n + 37) \vdots 64$

2.48.23. $(4 \cdot 2^{5n+1} + 5^n \cdot 3^{n+2}) \vdots 17$

2.48.24. $(3^{2n+2} \cdot 5^{2n} - 3^{3n+2} \cdot 2^{2n}) \vdots 1053$

2.49. Сколько раз надо написать число а)2052;

Б)2053;

В)2054, чтобы полученное число разделилось на 19?

2.50.(НЗ). Решите в целых числах уравнение $19451945 = x^2 + y^2$**.**

Покажем, как сложную задачу можно разложить в целесообразную последовательность относительно более простых задач.

Подготовительная задача1. Простые числа 5 и 13 представимы в виде суммы двух квадратов $5 = 1^2 + 2^2$; $13 = 2^2 + 3^2$; их произведение $5 \cdot 13 = (1^2 + 2^2)(2^2 + 3^2) = 65 = 1^2 + 8^2$ тоже представимо в виде суммы двух квадратов. Второй способ $5 \cdot 13 = (1^2 + 2^2)(2^2 + 3^2) = 65 = 4^2 + 7^2$, причём, оба представления в виде суммы квадратов можно получить, используя основания степеней: $5 \cdot 13 = (1^2 + 2^2)(2^2 + 3^2) = (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3)^2 + (1 \cdot 3 - 2 \cdot 2)^2 = 8^2 + 1^2$; аналогично

$$5 \cdot 13 = (1^2 + 2^2)(2^2 + 3^2) = (1 \cdot 2 - 2 \cdot 3)^2 + (1 \cdot 3 + 2 \cdot 2)^2 = 4^2 + 7^2.$$

Возникает Гипотеза: если два натуральных числа представимы в виде суммы двух квадратов, то их **произведение** представимо в виде **суммы** двух квадратов, т.е. если $a = u^2 + v^2$ и $b = s^2 + t^2$, то $a \cdot b = (u^2 + v^2)(s^2 + t^2)$ представимо в виде **суммы** двух квадратов.

Впервые гипотезу сформулировал и доказал Диофант Александрийский (родился в 200 г.), получив формулу

$$(u^2 + v^2)(s^2 + t^2) = (s \cdot u + tv)^2 + (t \cdot u - sv)^2 = (t \cdot v - su)^2 + (sv + tu)^2,$$

формула Диофанта

которая носит его имя. Формула доказывается путём раскрытия скобок, причём, это можно сделать как слева-направо, так и справа-налево. Проделайте самостоятельно. Почувствуйте себя Диофантом.

Подготовительная задача 2. Представьте произведение 5*389 в виде суммы двух квадратов целых чисел.

Используем формулу Диофанта $5 \cdot 389 = (1^2 + 2^2)(10^2 + 17^2) = (1 \cdot 10 + 2 \cdot 17)^2 + (1 \cdot 17 - 2 \cdot 10)^2 = 44^2 + 3^2$ или

$$5 \cdot 389 = (1^2 + 2^2)(10^2 + 17^2) = (1 \cdot 10 - 2 \cdot 17)^2 + (1 \cdot 17 + 2 \cdot 10)^2 = 24^2 + 37^2$$

Подготовительная задача 3. Представьте произведение 5*389*10001 в виде суммы двух квадратов целых чисел.

Используем формулу Диофанта $(5 \cdot 389) \cdot 10001 = (44^2 + 3^2)(100^2 + 1^2) = (44 \cdot 100 + 3 \cdot 1)^2 + (44 \cdot 1 - 3 \cdot 100)^2 = 4403^2 + 256^2$ или

$$(5 \cdot 389) \cdot 10001 = (44^2 + 3^2)(100^2 + 1^2) = (44 \cdot 100 - 3 \cdot 1)^2 + (44 \cdot 1 + 3 \cdot 100)^2 = 4397^2 + 344^2;$$

или $(5 \cdot 389) \cdot 10001 = (24^2 + 37^2)(100^2 + 1^2) = (24 \cdot 100 + 37 \cdot 1)^2 + (24 \cdot 1 - 37 \cdot 100)^2 = 2437^2 + 3676^2;$

или $(5\cdot 389)\cdot 10001=(24^2+37^2)(100^2+1^2)=(24\cdot 100-37\cdot 1)^2+(24\cdot 1+37\cdot 100)^2=2363^2+3724^2.$

Подготовительная задача 4. Разложите на множители число 19451945.

Число делится на 5, следовательно, $19451945=5\cdot 3890389$, но 3890389 очевидно делится на 389, получаем $19451945=5\cdot 3890389=5\cdot 389\cdot 10001$, получены три простые множителя, каждый из которых раскладывается в сумму квадратов единственным образом (теорема Эйлера).

Основная задача: **Решите в целых числах уравнение** $19451945=x^2+y^2$**.**

Учитывая, что неизвестные x и y входят симметрично и в чётной степени, то из каждой пары (x;y) получаем по восемь решений, т.е. всего 32 решения:

$(\pm 4403;\pm 256);\quad (\pm 256;\pm 4403);$

$(\pm 4397;\pm 344);\quad (\pm 344;\pm 4397);$

$(\pm 2437;\pm 3676);\quad (\pm 3676;\pm 2437);$

$(\pm 2363;\pm 3724);\quad (\pm 3724;\pm 2363).$

2.51.(М2020). Натуралльное число N представимо двумя разными способами в виде сумм квадратов двух натуральных чисел: $N=48149=185^2+118^2=25^2+218^2.$ **Разложите число N на множители.**

Решение.

Пусть $N=x_1^{\,2}+y_1^{\,2}=x_2^{\,2}+y_2^{\,2}\Leftrightarrow x_1^{\,2}-x_2^{\,2}=y_2^{\,2}-y_1^{\,2}\Leftrightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2)=(y_2-y_1)(y_2+y_1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x_1-x_2)}{(y_2-y_1)}=\dfrac{(y_2+y_1)}{(x_1+x_2)}=\dfrac{u}{v}$,где $\dfrac{u}{v}$ - значение равных дробей после сокращения, до сокращения на наибольший общий делитель дроби имели вид $\dfrac{(x_1-x_2)}{(y_2-y_1)}=\dfrac{s\cdot u}{s\cdot v}$ и $\dfrac{(y_2+y_1)}{(x_1+x_2)}=\dfrac{t\cdot u}{t\cdot v}$, здесь $НОД((x_1-x_2);(y_2-y_1))=s;\quad НОД((x_1+x_2);(y_2+y_1))=t$. Имеем систему четырёх уравнений $\begin{cases} x_1-x_2=s\cdot u;\\ y_2-y_1=s\cdot v;\\ y_2+y_1=t\cdot u;\\ x_1+x_2=t\cdot v;\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{1}{2}(s\cdot u+tv);\\ x_2=\dfrac{1}{2}(t\cdot v-su);\\ y_1=\dfrac{1}{2}(t\cdot u-sv);\\ y_2=\dfrac{1}{2}(sv+tu);\end{cases}$ тогда $N=\dfrac{1}{4}\left((s\cdot u+tv)^2+(t\cdot u-sv)^2\right)=\dfrac{1}{4}\left(((t\cdot v-su))^2+(sv+tu)^2\right)$ и далее по формуле Диофанта $(s\cdot u+tv)^2+(t\cdot u-sv)^2=((t\cdot v-su))^2+(sv+tu)^2=(u^2+v^2)(s^2+t^2)$

(докажите её самостоятельно: 1-ый способ- слева направо; 2-ой способ – справо налево).

$$N=\frac{1}{4}\left((s\cdot u+tv)^2+(t\cdot u-sv)^2\right)=\frac{1}{4}\left(((t\cdot v-su))^2+(sv+tu)^2\right)=\frac{1}{4}\left(u^2+v^2\right)\left(s^2+t^2\right).$$

В нашем случае :

$$\frac{(x_1-x_2)}{(y_2-y_1)}=\frac{s\cdot u}{s\cdot v}=\frac{185-25}{218-118}=\frac{160}{100}=\frac{20\cdot 8}{20\cdot 5}=\frac{8}{5}\Rightarrow s=20; u=8; v=5.$$

$$\frac{(y_2+y_1)}{(x_1+x_2)}=\frac{t\cdot u}{t\cdot v}=\frac{218+118}{25+185}=\frac{336}{210}=\frac{42\cdot 8}{42\cdot 5}=\frac{8}{5}\Rightarrow t=42; u=8; v=5.$$

$$N=\frac{1}{4}\left(u^2+v^2\right)\left(s^2+t^2\right)=\frac{1}{4}\left(8^2+5^2\right)\left(20^2+42^2\right)=\frac{1}{4}(89)(400+1764)=89\cdot 541.$$

2.52.(М2020). Натураллльное число N представимо двумя разными способами в виде сумм квадратов двух натуральных чисел: $N=1000009=235^2+972^2=1000^2+3^2$. **Разложите число N на множители. Отв.293*3413.**

2.53.(М2020). Натураллльное число N представимо двумя разными способами в виде сумм квадратов двух натуральных чисел: $N=53293=178^2+147^2=42^2+227^2$. **Разложите число N на множители. Отв.137*389.**

2.54.(НЗ). Натураллльное число N представимо двумя разными способами в виде сумм квадратов восьми натуральных чисел: $N=13717421=761^2+7\cdot 1370^2=439^2+7\cdot 1390^2$. **Разложите число N на множители. Отв.3803*3607.**

БЗ№3. Задача приведения натурального числа N к каноническому виду $N=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots p_k^{\alpha_k}$ **(способы действий разложение на множители, применение основной теоремы арифметики, гарантирующей единственность разложения с точностью до порядка множителей).**

3. 1. Реконструкция ВАЗа проходила в четыре этапа, каждый из которых продолжался целое число месяцев и сопровождался падением производства. Ежемесячное падение производства на первом этапе составило 4%, на втором – 12,5%, на третьем - $\frac{100}{7}\%$; на четвёртом - $\frac{50}{3}\%$. В результате по окончании реконструкции первоначальный объём продукции сократился на 64%. Определите продолжительность каждого этапа реконструкции.

Решение. Пусть a,b,c,d месяцев – продолжительности этапов, S – первоначальный объём продукции, $a,b,c,d\in N$. Основное уравнение имеет вид: $S\left(1-\frac{4}{100}\right)^a\left(1-\frac{12{,}5}{100}\right)^b\left(1-\frac{100}{7\cdot 100}\right)^c\left(1-\frac{50}{3\cdot 100}\right)^d=S\left(1-\frac{64}{100}\right)$. После упрощений получим: $\left(\frac{24}{25}\right)^a\left(\frac{7}{8}\right)^b\left(\frac{6}{7}\right)^c\left(\frac{5}{6}\right)^d=\frac{9}{25}$, приводим степени к основаниям 2, 3, 5, 7

$$2^{3a-3b+c-d}\cdot 3^{a+c-d}\cdot 5^{-2a+d}\cdot 7^{b-c}=2^0\cdot 3^2\cdot 5^{-2}\cdot 7^0\Leftrightarrow$$
$$2^{3a-3b+c-d}\cdot 3^{a+c-d-2}\cdot 5^{-2a+d+2}\cdot 7^{b-c}=2^0\cdot 3^0\cdot 5^0\cdot 7^0$$

и, пользуясь основной теоремой арифметики о единственности разложения натурального числа на простые множители, получим систему: $\begin{cases} 3a-3b+c-d=0 \\ a+c-d-2=0 \\ -2a+d+2=0 \\ b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \\ c=2 \\ d=2 \end{cases}$.

Ответ: каждый из 4-х этапов длился по два месяца.

3. 2. Найдите наибольшее натуральное число n, такое, что $2009! \vdots 2^n$

Решение. Выясним, каков показатель степени двойки в каноническом разложении числа $2009!$ Числа 2,4, …2008 содержат как минимум одну степень двойки, а таких чисел среди сомножителей будет $\left[\frac{2009}{2}\right]$. Числа 4, 8, 12, …,2008 содержат как минимум две степени двойки, одна из которых уже учтена, таких чисел среди сомножителей будет $\left[\frac{2009}{2^2}\right]$. Числа 8, 16, 24 …,2008 содержат как минимум три степени двойки, две из которых уже учтены, таких чисел среди сомножителей будет $\left[\frac{2009}{2^3}\right]$. Продолжая рассуждения, получим сумму $\left[\frac{2009}{2}\right]+$ $\left[\frac{2009}{2^2}\right]+\left[\frac{2009}{2^3}\right]+\left[\frac{2009}{2^4}\right]+\left[\frac{2009}{2^5}\right]+\left[\frac{2009}{2^6}\right]+\left[\frac{2009}{2^7}\right]+\left[\frac{2009}{2^8}\right]+\left[\frac{2009}{2^9}\right]+\left[\frac{2009}{2^{10}}\right]$=2001, которая равна показателю степени простого числа 2 в каноническом разложении числа $2009!$ Использованы БЗ 3,1.

3. 3. Каким количеством нулей оканчивается десятичная запись числа $2009!$ **?**

Решение. Выясним, каков показатель степени пятёрки в каноническом разложении числа $2009!$ Числа 5,10, …2005 содержат как минимум одну степень пятёрки, а таких чисел среди сомножителей будет $\left[\frac{2009}{5}\right]$. Числа 25, 50, 75, …,2000 содержат как минимум две степени пятёрки, одна из которых уже учтена, таких чисел среди сомножителей будет $\left[\frac{2009}{5^2}\right]$. Числа 125, 250, 750 …,2000 содержат как минимум три степени пятёрки, две из которых уже учтены, таких чисел среди сомножителей будет $\left[\frac{2009}{5^3}\right]$. Продолжая рассуждения, получим сумму $\left[\frac{2009}{5}\right]+\left[\frac{2009}{5^2}\right]+\left[\frac{2009}{5^3}\right]+\left[\frac{2009}{5^4}\right]$=500, которая равна показателю степени простого числа 5 в каноническом разложении числа $2009!$ Использованы БЗ3,1.Имеющаяся на данный момент информация позволяет записать каноническое разложение $2009!$ в виде $2009! = 2^{2001} \cdot 3^b \cdot 5^{500} \cdot 7^d \cdot \ldots \cdot 2003$ Показатели степени 3, 7 и других простых оснований вычисляются аналогично (сделайте это самостоятельно). Группируя 2 и 5 попарно, можем получить 500 таких пар, которые дадут 500 нулей в конце десятичной записи числа $2009!$

3.4. Каким количеством нулей оканчивается десятичная запись числа $2023!$ (произведение натуральных чисел от 1 до 2023) ? Ответ:503.

3.5.(ЗЗ). Дмитрий Анатольевич положил в банк 96 000 рублей. Несколько лет ему начислялись то 5% то 10% процентов годовых, а за последний год начислили 25% годовых. Проценты начислялись в конце года и добавлялись к сумме вклада. В результате его вклад стал равным 160 083 рублям. Сколько лет пролежал вклад в банке? (Отв. 5).

3.6.(МЗ). Дмитрий Анатольевич положил в банк 96 000 рублей. Несколько лет ему начислялись от 5% до 10% целочисленных процентов годовых, а за последний год начислили 25% годовых. Проценты начислялись в конце года и добавлялись к сумме вклада. В результате его вклад стал равным 160 083 рублям. Сколько лет пролежал вклад в банке? (Отв. 5).

Решение. Пусть a,b,c,d,e,g - количество лет, в течение которых продолжались этапы с фиксированными ставками годовых, S – первоначальный вклад=96000Р, $a,b,c,d,e,g \in N \cup \{0\}$. Основное уравнение (Мат.Модель Задачи) имеет вид диофантова уравнения :

$S\left(1+\frac{5}{100}\right)^a\left(1+\frac{6}{100}\right)^b\left(1+\frac{7}{100}\right)^c\left(1+\frac{8}{100}\right)^d\left(1+\frac{9}{100}\right)^e\left(1+\frac{10}{100}\right)^g\left(1+\frac{25}{100}\right)=160083$. Заметим, что $160083=3^3\cdot 7^2\cdot 11^2$; $96000=2^8\cdot 3\cdot 5^3$. После упрощений основного уравнения получим:

$\left(\frac{21}{20}\right)^a\left(\frac{53}{50}\right)^b\left(\frac{107}{100}\right)^c\left(\frac{27}{25}\right)^d\left(\frac{109}{100}\right)^e\left(\frac{11}{10}\right)^g\frac{5}{4}=\frac{3^3\cdot 7^2\cdot 11^2}{2^8\cdot 3\cdot 5^3}$. Раскладываем основания степеней в левой части на простые множители 2,3,5,7,11,53, 107,109; приводим в правой части степени к основаниям 2,3,5,7

$$(3)^a(7)^a(2)^{-2a}(5)^{-a}\left(\frac{53}{50}\right)^b\left(\frac{107}{100}\right)^c(3)^{3d}(5)^{-2d}\left(\frac{109}{100}\right)^e(11)^g(2)^{-g}(5)^{-g}5\cdot 2^{-2}=2^{-8}\cdot 3^2\cdot 7^2\cdot 11^2\cdot 5^{-3}$$

В силу единственности канонического разложения в произведение степеней простых чисел (ОТА) и равенства левой и правой частей, утверждаем, что b=c=e=0, т.к. им соответствуют простые основания 53, 107,109, отсутствующие в правой части уравнения; имеем:

$(3)^a(7)^a(2)^{-2a}(5)^{-a}(3)^{3d}(5)^{-2d}(11)^g(2)^{-g}(5)^{-g}5\cdot 2^{-2}=2^{-8}\cdot 3^2\cdot 7^2\cdot 11^2\cdot 5^{-3}$. Приравняем показатели степени слева и справа при равных основаниях:

Основание степени	Равенство показателей степени	Решение уравнений
3	a+3d=2	d=0
5	-a-2d-g+1=-3	g=2
7	a=2	a=2
2	-2a-g-2=-8	**Ответ: a+g+1=5**

Ответ: два этапа длились по два года, один этап – год, всего вклад пролежал 5 лет.

3.7. Анатолий Сергеевич положил в банк 200 000 рублей. Несколько лет ему начислялись то 4% то 8% годовых, а за последний год начислили 25% годовых. Проценты начислялись в конце года и добавлялись к сумме вклада. В результате его вклад стал равным 292 032 рублям. Сколько лет пролежал вклад в банке? (Отв. 4).

3.8.(МЗ). Анатолий Сергеевич положил в банк 200 000 рублей. Несколько лет ему начислялись от 4% до 8% целочисленных процентов годовых, а за последний год начислили 25% годовых. Проценты начислялись в конце года и добавлялись к сумме вклада. В результате его вклад стал равным 292 032 рублям. Сколько лет пролежал вклад в банке? (Отв. 4).

3.9 Два индивидуальных предпринимателя занимались изготовлением зеркал. В течение ряда лет первый предприниматель изготавливал одно и то же количество зеркал в год (но не более 210). Второй предприниматель в это период изготавливал 90% от того количества зеркал, которое производил первый предприниматель. После обновления оборудования второй предприниматель стал изготавливать в год на 80% больше, чем он изготавливал до обновления, и более, чем 244 зеркала. Какое количество зеркал в год стал выпускать второй предприниматель после обновления оборудования? Каждый предприниматель в год изготавливает целое число зеркал. (Отв.324).

3.10. Магазин Кулинария за одну неделю продал 46 килограммовых пачек пельменей категорий А, Б и В. При этом пельменей категории А продано меньше, чем пельменей категории В, а пельменей категории Б продано в 10 раз больше, чем пельменей категории В. Сколько пачек пельменей категории А было продано за неделю? (Отв.2).

3.11. Найдите наибольшее простое число n, такое, что число $2009!$ **делится на** n^n **.**

Решение. Применив неоднократно подсчёт показателей степеней простых оснований, выполнив соответствующие вычисления, получим $2009!=2^{2001}\cdot 3^{1000}\cdot 5^{500}\cdot 7^{333}\cdot 11^{199}\cdot 13^{165}\cdot 17^{124}\cdot 19^{110}\cdot 23^{90}\cdot 29^{71}\cdot 31^{66}\cdot 37^{55}\cdot 41^{50}\cdot 43^{47}\cdot 47^{42}\cdot\ldots\cdot 1999\cdot 2003$

Рассмотрим последовательность показателей степени: 2001, 1000, 500, 333, …1,1. Она убывает от 2001 до 1. Рассмотрим последовательность оснований степени: 2, 3, 5, 7, …1999,2003. Она возрастает от 2 до 2003. Наблюдение показывает, что в окрестности оснований 43 и 47 происходит любопытное изменение: если до этого момента показатели степени были больше соответствующего основания, то, начиная с 47 показатели становятся меньше своих оснований и продолжают уменьшаться. Причина убывания последовательности показателей кроется в способе их вычисления и простой арифметической закономерности: чем на бóльшее делим, тем ме́ньшее получаем. В силу различной монотонности последовательностей, ситуация, аналогичная той, которая сложилась в окрестности оснований 43 и 47 больше не повторится. Тогда ясно, что если n пробегает множество всех простых чисел от 2 до 43, то n^n является делителем числа $2009!$ Наибольшим из n является число 43. Использованы БЗ 1,3.

3.12. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 792 и а)пять; б) четыре; в)три из них образуют геометрическую прогрессию?

Отв. $792=2^3\cdot 3^2\cdot 11$ а) нет, т.к. произведение всех пяти равнялось бы $792=b_1^5\cdot q^{10}\Rightarrow b_1\cdot q^2=\sqrt[5]{792}\notin N$; б)нет. Рассмотрим все различные разложения 792 в 5-ки различных натуральных чисел: $1\cdot 2\cdot 4\cdot 9\cdot 11=1\cdot 2\cdot 3\cdot 11\cdot 12=1\cdot 2\cdot 3\cdot 6\cdot 22$, вычёркивая поочерёдно по одной цифре получим различные четвёрки натуральных чисел, ни одна из которых не образует геометрическую прогрессию; в) да:1,2,4.

3.13. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 312 и а) пять; б) четыре; в) три из них образуют геометрическую прогрессию?

Отв. $312=2^2\cdot 3\cdot 13$ а) нет; б) нет; в) да:1,2,4.

3.14. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 672 и а)пять; б) четыре; в)три из них образуют геометрическую прогрессию?

Отв. $672=2^5\cdot 3\cdot 7$ а) нет; б) нет; в) да:1,2,4.

3.15. Найдите наибольшее натуральное n, для которого число 1000! делится на каждое из чисел k^k при $k\in\{1;2;3;\ldots n\}$. Отв. 36.

3.16. (Я.2022.В14.18.50). а) Можно ли в выражении ln8 * ln9 * ln10 * ln11 * ln18 * ln20 * ln22 вместо всех знаков * так расставить знаки + или -, чтобы в результате получисля нуль?

б) Можно ли в выражении ln7 * ln8 * ln16 * ln24 * ln28 * ln32 * ln56 вместо всех знаков * так расставить знаки + или -, чтобы в результате получисля нуль?

В) Какое наибольшее количество попарно различных чисел можно выбрать из набора ln9, ln10, ln11, ln12,… ln20 и расставить перед ними знаки + или – так, чтобы их сумма стала равна нулю?

Решение. а) По правилам комбинаторики всего $2^6=64$ способа расстановки знаков + или -. Очевидно, что если взять все знаки +, то получится $\ln(8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 18\cdot 20\cdot 22)$, а если взять все знаки -, то получится $-\ln(8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 18\cdot 20\cdot 22)$. Согласно свойствам логарифмов $\ln x+\ln y=\ln(xy)$; $\ln x-\ln y=\ln(x/y)$, поэтому выбирать знаки следует так, чтобы под знаком логарифма данные натуральные числа взаимно сокращались в числителе и знаменателе. Избегая механического перебора 64 вариантов, проведём анализ данных натуральных чисел с точки зрения **основной теоремы арифметики (ОТА).** Для наглядности используем таблицу.

Данные числа		8	9	10	11	18	20	22
Разложение по ОТА		2^3	3^2	$2^1\cdot 5^1$	11^1	$2^1\cdot 3^2$	$2^2\cdot 5^1$	$2^1\cdot 11^1$

Показатель степени При простом Основании:	При основании 2	3	0	1	0	1	2	1
	При основании 3	0	2	0	0	2	0	0
	При основании 5	0	0	1	0	0	1	0
	При основании 11	0	0	0	1	0	0	1

Для каждой степени простого основания должно быть обратное число; все множители должны разбиваться на пары чисел, стоящих в числителе и в знаменателе и допускающие взаимное сокращение; так числа 11 и 22 (только они содержат в разложении простое число 11) располагаем по разные стороны от дробной черты, соответственно, перед числами ln11, ln22 берём противоположные знаки.

Среди оставшихся чисел выделяем 10 и 20, в разложении которых содержится степень 5, понятно, что эти числа располагаем по разные стороны от дробной черты, соответственно, перед числами ln10, ln20 ставим противоположные знаки.

Числа 9 и 18, как содержащие в своем разложении степень 3, должны быть по разные стороны от дробной черты, соответственно, перед числами ln9, ln18 расставляем противоположные знаки.

Суммируя сказанное, получаем дробь $\frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{18\cdot 20\cdot 22}=1$, удовлетворяющую требованиям задачи, а соответствующая расстановка знаков: +++---. **Ответ: да**, +++---. **ln8+ln9+ln10+ln11-ln18-ln20-ln22=0**

Заметим, что если бы знак * стоял и перед ln8, то требованию задачи удовлетворяла бы и дробь $\frac{18\cdot 20\cdot 22}{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}=1$.

Б)Применим наш табличный (матричный) анализ данных натуральных чисел 7,8,16,24,28,32,56 с точки зрения основной теоремы арифметики (ОТА).

Данные числа		7	8	16	24	28	32	56
Разложение по ОТА		7^1	2^3	2^4	$2^3\cdot 3^1$	$2^2\cdot 7^1$	2^5	$2^3\cdot 7^1$
Показатель степени При простом Основании:	При основании 2	3	0	1	0	1	2	1
	При основании 3	0	2	0	0	2	0	0
	При основании 5	0	0	1	0	0	1	0
	При основании 11	0	0	0	1	0	0	1

Анализ степеней простых чисел приводит к двум наблюдениям:

1) суммарный показатель степени семёрки равен трём и ни при каком расположении чисел 7, 28, 56 относителльно дробной черты семёрка не сократится;

2)тройка входит в разложение только одного множителя и ей просто не с чем сократиться (иначе: тройка входит с нечетным показателем степени, поэтому не сократится).

Любого из этих двух фактов достаточно, чтобы дробь не была сократимой до единицы. **Ответ: нет**.

В)Разложим все 12 данных чисел в произведение степеней простых чисел:
3^2; $2^1\cdot 5^1$; 11^1; $2^2\cdot 3^1$; 13^1; $2^1\cdot 7^1$; $3^1\cdot 5^1$; 2^4; 17^1; $2^1\cdot 3^2$; 19^1; $2^2\cdot 5^1$,заметим, что простые

числа 7,11,13,17,19 встречаются по одному разу и им не с чем будет сокращаться, поэтому необходимо их вычеркнуть.

Проведём матричный анализ оставшихся семи чисел с точки зрения основной теоремы арифметики:

Данные числа		9	10	12	15	16	18	20
Разложение по ОТА		3^2	$2^1\cdot5^1$	$2^2\cdot3^1$	$3^1\cdot5^1$	2^4	$2^1\cdot3^2$	$2^2\cdot5^1$
Показатель степени При простом Основании:	При основании 2	0	1	2	0	4	1	2
	При основании 3	2	0	1	1	0	2	0
	При основании 5	0	1	0	1	0	0	1

Анализ степеней простых чисел приводит к важному наблюдению: пятёрка входит в разложение трёх множителей с нечётным суммарным показателем, следовательно, её не удастся сократить. Поэтому один из трёх множителей, содержащих степень пятёрки необходимо убрать.

Рассмотрим три варианта: 1)если убрать $2^1\cdot5^1$, то нечётной станет сумма показателей степени 2, этот вариант отпадает;

2) если убрать $3^1\cdot5^1$, то нечётной станет сумма показателей степени 3, этот вариант отпадает;

3) если убрать $2^2\cdot5^1$, то сумма показателей степени 2 останется чётной, а сумма показателей степени 5 станет чётной, этот вариант подходит. Вычёркиваем $2^2\cdot5^1$.

Выясним, можно ли расставить оставшиеся 6 чисел в числитель или знаменатель дроби множителями так, чтобы после сокращения дроби получить 1? Начинаем с чисел, содержащих степень 5:

$\frac{2^1\cdot5^1}{3^1\cdot5^1}\cdot\frac{2^1\cdot3^2}{3^2}\cdot\frac{2^2\cdot3^1}{2^4}=1$, что соответствует такой расстановке знаков перед логарифмами:

- ln9+ ln10+ ln12-ln15-ln16+ ln18. Так как дробь, обратная построенной, тоже равна 1, требованию задачи удовлетворяет и такая расстановка знаков: ln9- ln10- ln12+ln15+ln16- ln18. Итак, доказано, что ни одно количество данных чисел от 12 до 7 не удовлетворяет требованию задачи, а для шести чисел построен пример, удовлетворяющий требованию. Значит, **наибольшее количество попарно различных чисел, которые можно выбрать из набора ln9, ln10, ln11, ln12,… ln20 и расставить перед ними знаки + или – так, чтобы их сумма стала равна нулю, рано 6.** Ответ: 6.

3.17. (Я.2022.В13.18.50). а) Можно ли в выражении ln7 * ln9 * ln10 * ln12 * ln18 * ln20 * ln21 вместо всех знаков * так расставить знаки + или -, чтобы в результате получисля нуль?

б) Можно ли в выражении ln3 * ln6 * ln7 * ln8 * ln9 * ln16 * ln21 вместо всех знаков * так расставить знаки + или -, чтобы в результате получисля нуль?

В) Какое наибольшее количество попарно различных чисел можно выбрать из набора ln5, ln6, ln7, ln8,… ln15 и расставить перед ними знаки + или – так, чтобы их сумма стала равна нулю?

Ответ: а) ln7+ ln9+ln10+ln12-ln18-ln20-ln21=0.

Ответ: б) суммарный показатель степени тройки равен 5, поэтому дробь нельзя сократить до 1. НЕТ.

Ответ: в) $\frac{5^1}{2^1\cdot5^1}\cdot\frac{2^1\cdot7}{7^1}\cdot\frac{2^1\cdot3}{2^3}\cdot\frac{2^2\cdot3^1}{3^2}=1$ и обратная ей дробь. ln5+ ln6- ln7- ln8-ln9-ln10+ln12+ln14=0 , а также сумма с противоположными знаками.

БЗ№4. Задача нахождения НОК, НОД двух и более чисел (способы действий: использование основной теоремы арифметики, алгоритма Евклида). Обратная задача: по НОК, НОД двух и более чисел определить эти числа.

Теорема 1. Пусть $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_k^{\alpha_k}$ и $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots p_k^{\beta_k}$, тогда $НОД(x,y) = p_1^{\min\{\alpha_1;\beta_1\}} \cdot p_2^{\min\{\alpha_2;\beta_2\}} \cdot \ldots p_k^{\min\{\alpha_k;\beta_k\}}$;

$НОК(x,y) = p_1^{\max\{\alpha_1;\beta_1\}} \cdot p_2^{\max\{\alpha_2;\beta_2\}} \cdot \ldots p_k^{\max\{\alpha_k;\beta_k\}}$.

Рассмотрим несколько примеров. 1) $НОД(4,20) = 4,\ НОК(4,20) = 20, \Rightarrow НОК(4,20) = 5НОД(4,20)$.
2) $НОД(a,\lambda a) = a,\ НОК(a,\lambda a) = \lambda a, \Rightarrow НОК(a,\lambda a) = \lambda НОД(a,\lambda a)$. Покажем, что верно и обратное:
3) $НОК(a,b) = \lambda НОД(a,b) \Rightarrow a = \lambda b \vee b = a\lambda$. Докажем методом от противного, пусть $НОК(a,b) = \lambda НОД(a,b)$, но $a = \bar{\lambda} b \vee b = a\bar{\lambda},\quad \lambda \neq \bar{\lambda}$. Тогда $НОД(a,\bar{\lambda} a) = a,\ НОК(a,\bar{\lambda} a) = \bar{\lambda} a$, следовательно, $НОК(a,b) = \bar{\lambda} НОД(a,b)$, противоречие. Источник его в предположении противного. Итак, доказана **Теорема 2:** $НОК(a,b) = \lambda НОД(a,b) \Leftrightarrow a = \lambda b \vee b = a\lambda$.

Следствие из Т1: Частное от деления НОК(x,y):НОД(x,y) является натуральным числом.

Теорема 3: $НОД(m,n) = НОД(m \pm n, n), m > n$. Доказательство. Пусть $d = НОД(m,n) \Rightarrow m = dm_1; n = dn_1, m_1 > n_1,\ m_1;\ n_1$ не имеют общего делителя. $m \pm n$ и n имеют общий делитель d. $НОД(m \pm n, n) = НОД(d(m_1 \pm n_1); dn_1) = dНОД(m_1 \pm n_1; n_1) = d \cdot 1$, так как $m_1 \pm n_1$ и n_1 взаимно просты, имеют только один общий делитель - единицу. Из теоремы 3 получаем алгоритм Евклида:

Теорема 4. Пусть $m > n$, разделим m на n с остатком: $m = cn + r$, тогда $НОД(m,n) = НОД(cn + r, n) = НОД(r,n) = НОД(n,r)$

4.1. Решите уравнение в целых числах: НОК(x;55)=715.

4.2. Мальчик и девочка измерили одно и то же расстояние в 143 м шагами. Так как длины их шагов различны, то их следы совпали 21 раз. Шаг девочки 55 см. Найдите длину шага мальчика. Ответ:65. Исп. БЗ1,2,4.

4.3. Докажите, что НОД(5083;3553)=17. Решение. НОД(5083;3553)= НОД(1*3553+1530;3553)= НОД(3553;1530)= НОД(2*1530+493;1530)= НОД(1530; 493)= НОД(1530-3*493; 493)= НОД(493;51)= НОД(493-9*51;51)= НОД(51;34)=17. Использован алгоритм Евклида.

4.4. Найдите: а) НОД(6859;4104); б)НОД(6494;6303); в)НОД(3953;871); Отв.а) 19; б)191;в)67.

4.5. Решите систему уравнений в целых числах: НОД(x;y)=13; НОК(x;y)=1989.
Отв. (117;221),(1989;117),(1989;221).

4.6. Найдите НОК и НОД чисел $2^3 \cdot 3^5 \cdot 7^{11}$ и $2^2 \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7^6$. Сколько делителей имеет НОК? Сколько делителей имеет НОД?

4.7. Пусть x,y – натуральные числа, удовлетворяющие уравнению 7x=16y-73. а) Может ли $\dfrac{НОК(x,y)}{НОД(x,y)}$ быть равным 204? б) Может ли $\dfrac{НОК(x,y)}{НОД(x,y)}$ быть равным 2? в)Найдите наименьшее значение $\dfrac{НОК(x,y)}{НОД(x,y)}$.

Отв. а)да. б)нет. в) 5-минимум.

Решение. Найдём все натуральные (x,y), удовлетворяющие диофантовому уравнению. Используем метод остатков (ещё можно применять метод спуска, теорему об общем виде решения уравнения вида ax+by+c=0). Левая часть уравнения делится на 7, значит должна делиться и правая, рассуждаем про y по модулю 7, т.е. рассмотрим остатки при делении на 7, $y \in \{7n; 7n+1; 7n+2; 7n+3; 7n+4; 7n+5; 7n+6\}$. Рассмотрим поочерёдно 7 случаев: $\begin{cases} y = 7n; n \in Z \\ 7x = 16 \cdot 7n - 73 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing;$ $\begin{cases} y = 7n+1; n \in Z \\ 7x = 16 \cdot (7n+1) - 73 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing;$ $\begin{cases} y = 7n+2; n \in Z \\ 7x = 16 \cdot (7n+2) - 73 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing;$

$\begin{cases} y=7n+3; n\in Z \\ 7x=16\cdot(7n+3)-73 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing; \begin{cases} y=7n+4; n\in Z \\ 7x=16\cdot(7n+4)-73 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing;$

$\begin{cases} y=7n+5; n\in Z \\ 7x=16\cdot(7n+5)-73 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7n+5; n\in Z \\ 7x=16\cdot(7n)+80-73 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7n+5; n\in Z \\ x=16n+1. \end{cases}; \begin{cases} y=7n+6; n\in Z \\ 7x=16\cdot(7n+6)-73 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$

Натуральные решения уравнения $x=16n+1$; $y=7n+5$; будут при $n\in N\cup\{0\}$. Проведём числовой эксперимент и рассмотрим несколько первых значений параметра n:

n	$x=16n+1$	$y=7n+5;$	$НОД(x,y)$	$НОК(x,y)$	$\frac{НОК(x,y)}{НОД(x,y)}$
0	1	5	1	5	5
1	17	12	1	204	204
2	33	19	1	33*19=627	627
3	49	26	1	49*26=1127	1127
4	65	33	1	2145	2145

Поскольку

$$\frac{НОК(x,y)}{НОД(x,y)}=\frac{p_1^{\max\{\alpha_1;\beta_1\}}\cdot p_2^{\max\{\alpha_2;\beta_2\}}\cdot\ldots p_k^{\max\{\alpha_k;\beta_k\}}}{p_1^{\min\{\alpha_1;\beta_1\}}\cdot p_2^{\min\{\alpha_2;\beta_2\}}\cdot\ldots p_k^{\min\{\alpha_k;\beta_k\}}}=p_1^{\max\{\alpha_1;\beta_1\}-\min\{\alpha_1;\beta_1\}}\cdot p_2^{\max\{\alpha_2;\beta_2\}-\min\{\alpha_2;\beta_2\}}\cdot\ldots p_k^{\max\{\alpha_k;\beta_k\}-\max\{\alpha_k;\beta_k\}}$$

то $\frac{НОК(x,y)}{НОД(x,y)}$ является не дробным, а натуральным числом. Множество натуральных чисел ограничено снизу. Наименьшим натуральным числом является 1. Уже известно, что $\frac{НОК(1,5)}{НОД(1,5)}=5$, осталось проверить, может ли при $n\in N\cup\{0\}$ дробь $\frac{НОК(16n+1,7n+5)}{НОД(16n+1,7n+5)}$ принимать значения 1;2; 3;4 или нет.

Если $\frac{НОК(x,y)}{НОД(x,y)}=1$, то это значит (Т2), что x=y, но пара (x,y) не удовлетворяет исходному диофантову уравнению.

Если $\frac{НОК(x,y)}{НОД(x,y)}=2$, то это значит (Т2), что x=2y или y=2x, но пары (x,2x), (2x,x) не удовлетворяют исходному диофантову уравнению.

Если $\frac{НОК(x,y)}{НОД(x,y)}=3$, то это значит (Т2), что x=3y или y=3x, но пары (x,3x), (3x,x) не удовлетворяют исходному диофантову уравнению.

Если $\frac{НОК(x,y)}{НОД(x,y)}=4$, то это значит (Т2), что x=4y или y=4x, но пары (x,4x), (4x,x) не удовлетворяют исходному диофантову уравнению. Следовательно, $\min\frac{НОК(16n+1,7n+5)}{НОД(16n+1,7n+5)}=5$.

4.8. Пусть x,y – натуральные числа, удовлетворяющие уравнению 3x=8y-29. а) Может ли $\frac{НОК(x,y)}{НОД(x,y)}$ быть равным 170? б) Может ли $\frac{НОК(x,y)}{НОД(x,y)}$ быть равным 2? в)Найдите наименьшее значение $\frac{НОК(x,y)}{НОД(x,y)}$. Отв.а)x=8t+1;y=3t+4, $t\in N\cup\{0\}$, $\frac{НОК(17,10)}{НОД(17,10)}=170$**. б)нет. в)** $\frac{НОК(1,4)}{НОД(1,4)}=4$ -минимум.

4.9.

$НОД\left(\underbrace{111\ldots1}_{100\,единиц},\ \underbrace{222\ldots2}_{50\,двоек}\right)=?$ $НОК\left(\underbrace{111\ldots1}_{150\,единиц},\ \underbrace{333\ldots3}_{50\,двоек}\right)=?$

4.10. При каком наименьшем *n* произведение *n* подряд идущих натуральных чисел делится на 242? Отв.n=22.

4.11. Произведение *n* подряд идущих натуральных чисел не делится на 111. При каком наибольшем *n* это возможно?

4.12. Пусть $\sum$-сумма всех чисел, получающихся из числа 12345 перестановкой цифр. На какую наибольшую степень тройки делится $\sum$?

4.13. (Л.2016.В13.19). Дан набор из n>7 различных натуральных чисел $\{x_1,x_2,\ldots x_8,..\}$, НОК всех чисел равно 330 и для любых двух чисел их НОД больше 1. Сумма всех чисел набора рана755. А) Принадлежит ли данному набору хотя бы одно из чисел 2 или 3? Б) Принадлежит ли данному набору число 10? В) Укажите все числа данного набора.

Решение. По условию $НОК(x_1,x_2,\ldots x_8,..)=330=2\cdot3\cdot5\cdot11, НОД(x_i,x_j)>1$. Это обратная задача БЗ№4: найти все числа, для которых НОК известно и равно 330. Все числа из набора $\{x_1,x_2,\ldots x_8,..\}$ являются делителями числа 330, всего делителей по БЗ№5 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)(\alpha_k+1)=(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)=16$. Четыре делителя – это 2,3,5,11; ещё шесть ($C_4^2=\frac{4\cdot3}{1\cdot2}=6$) получим, группируя и перемножая делители по два:6,10,15,22,33,55; ещё четыре ($C_4^3=\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}=4$) получим, группируя и перемножая делители по три: 30,66,110,165; ещё один – 330, наконец, 16-ый делитель это 1, он по условию не принадлежит набору $\{x_1,x_2,\ldots x_8,..\}$. **А) Проверим, верно ли, что $2\in\{2,3,5,11,6,10,15,22,33,55,30,66,110,165,330\}$,при условиях:** $x_1+x_2+\ldots+x_8+\ldots=755$ и $НОД(x_i,x_j)>1$? Но НОД числа 2 и любого нечётного числа из этого набора равно1, вычёркивая все нечётного числа из этого набора, получим $\{2,6,10,22,30,66,110,330\}$, сумма которых <755. Вывод: 2 не принадлежит набору.

Проверим, верно ли, что $3\in\{3,5,11,6,10,15,22,33,55,30,66,110,165,330\}$,при условиях: $x_1+x_2+\ldots+x_8+\ldots=755$ и $НОД(x_i,x_j)>1$? Удаляем из набора все числа, не кратные 3, остаётся $\{3,6,15,33,30,66,,165,330\}$, сумма которых <755. Вывод: 3 не принадлежит набору. Ответ: нет. Б) **Проверим, верно ли, что $10\in\{5,11,6,10,15,22,33,55,30,66,110,165,330\}$,при условиях:** $x_1+x_2+\ldots+x_8+\ldots=755$ и $НОД(x_i,x_j)>1$? На основании доказанного, числа 2,3 удалены из набора. Из набора надо удалить числа, не имеющие в своём каноническом разложении ни 2 ни 5: $\{5,6,10,15,22,55,30,66,110,165,330\}$**.** Условию НОД>1 не удовлетворяют пары 5и6, 15и22, 30и66, значит, какие-то из этих чисел должно удалить. Удаляя 6,22,66, получим набор чисел, сумма которых меньше 755. Вывод: 10 не принадлежит исходному набору. Ответ: нет.

В)Рассмотрим множество делителей 330 без 1,2,3,10, как не удовлетворяющих условиям задачи. Это множество $\{5,6,11,15,22,33,55,30,66,110,165,330\}$содержит взаимно простые 5и6, какое из них удалить?

Если удалить 6, то последует удаление 11,22,33,66, оставшиеся числа из $\{5,15,55,30,110,165,330\}$в сумме меньше 755. Значит, удалять следует не 6.

Если удалить 5, то последует удаление 11,22, а сумма оставшихся $\{6,15,33,55,30,66,110,165,330\}$равна 810, что на 55 больше требуемого. Остаётся удалить 55 и оставшиеся 8 делителей удовлетворяют всем требованиям задачи.

4.14. (Л.2016.В14.19). Дан набор из n>7 различных натуральных чисел $\{x_1,x_2,\ldots x_8,..\}$, НОК всех чисел равно 210 и для любых двух чисел их НОД больше 1. Произведение всех чисел набора делится на 1920 и не является квадратом целого числа. А) Принадлежит ли данному набору число 3? Б) Принадлежит ли данному набору число 2? В) Укажите все числа данного набора. Ответ: А) нет; б) нет; в) 6,10,14,30,42,70,105,210. Решение.

Решение. По условию $НОК(x_1, x_2, ...x_8, ..) = 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $НОД(x_i, x_j) > 1$. Это обратная задача БЗ№4: найти все числа, для которых НОК известно и равно 210. Все числа из набора $\{x_1, x_2, ...x_8, ..\}$ являются делителями числа 210, всего делителей по БЗ№5 $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)(\alpha_k + 1) = (1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 16$. Четыре делителя – это 2,3,5,7; ещё шесть($C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$) получим, группируя и перемножая делители по два:6,10,15,14,35,21; ещё четыре ($C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$) получим, группируя и перемножая делители по три: 70,105,42,30; ещё один – 210, наконец, 16-ый делитель это 1, он по условию не принадлежит набору $\{x_1, x_2, ...x_8, ..\}$. Набор из 15 делителей числа 210 имеет вид $\{2,3,5,7, \quad 6,15,35,10,21,14, \quad 105,70,42,30,210\}$, последние 5 чисел удовлетворяют условию $НОД(x_i, x_j) > 1$, их оставляем в наборе; первые четыре числа попарно взаимно просты, условию $НОД(x_i, x_j) > 1$не удовлетворяют, часть из них подлежит вычёркиванию; в средней группе чисел попарно взаимно просты 6и35;14и15; 10 и 21как минимум одно из пары должно быть удалено. Заметим, что каноническое разложение числа 1920 имеет вид $1920 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5$. Если решено оставить $105,70,42,30,210$, а произведение их содержит лишь 2^4, то добрать недостающие три степени двойки можно лишь включив три или четыре из чисел: $2,6,10,14$.

В средней группе чисел $6,15,35,10,21,14$ попарно взаимно просты 6 и 35; 14 и15; 10 и 21 понятно, что из каждой пары должно вычеркнуть числа, не содержащие степень двойки, т.е.35,15,21.Прореженный набор делителей имеет вид: $\{2,3,5,7, \quad 6,10,14, \quad 105,70,42,30,210\}$.Произведение 8 последних чисел из второй и третьей групп кратно 1920 и не является квадратом, как это следует из канонического разложения этого произведения в произведение степеней простых чисел. Набор $\{6,10,14, \quad 105,70,42,30,210\}$удовлетворяет всем требованиям задачи. Можно ли в него добавить какое-нибудь из чисел $\{2,3,5,7\}$? Если включить в набор 2, то придётся вычеркнуть 105,так как $НОД(2,105) = 1$ а произведение чисел в наборе $\{2;6,10,14, \quad ,70,42,30,210\} = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^4 = (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2)^2$ равно квадрату, следовательно, 2 не принадлежит набору делителей. Ответ: нет.

Если включить в набор 3, то придётся вычеркнуть 10,14,70,т.к. $НОД(3,10) = 1$, $НОД(3,14) = 1$ а произведение чисел в наборе $\{3;6, \quad ,42,30,210\} = 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^2$ не кратно 1920, следовательно, 3 не принадлежит набору делителей. Ответ: нет.

Ответ: набор $\{6,10,14, \quad 105,70,42,30,210\}$удовлетворяет всем требованиям задачи.

4.15. (Л.2016.В15.19). Дан набор из n>7 различных натуральных чисел $\{x_1, x_2, ...x_8, ..\}$, НОК всех чисел равно 510 и для любых двух чисел их НОД больше 1. Сумма всех чисел набора равна 864. А) Принадлежит ли данному набору чисел чётное число? Б) Принадлежит ли данному набору число 5? В) Принадлежит ли данному набору число 30? Отв. а) да; б) нет; В) да.

4.16. (Л.2016.В16.19). Дан набор из n>7 различных натуральных чисел $\{x_1, x_2, ...x_8, ..\}$, НОК всех чисел равно 570 и для любых двух чисел их НОД больше 1. Сумма всех чисел набора равна 1220. А) Принадлежит ли данному набору число 2? Б) Принадлежит ли данному набору число 38? В) Укажите все числа данного набора. Ответ: а) нет; б) нет; в) 6,10,15,30,114,190,285,570.

4.17. (Л.2017.В29.19). Существуют ли такие восемь различных натуральных чисел $\{x_1, x_2, ...x_8\}$, что их среднее арифметическое больше их НОД А) ровно в 6 раз? Б) ровно в 5 раз? В) ровно в 4 раза? Ответ: а) да; б)да; в) нет.

Решение. А)Пусть $x_1 < x_2 < ... < x_8$ -какие-то различные натуральные числа, такие, что $\frac{x_1 + x_2 + ... + x_8}{8} = 6 \cdot НОД(x_1; x_2; ...x_8)$(*), наша задача подобрать соответствующие 8 чисел или доказать, что их не существует. Рассмотрим сначала для простоты (принцип крайнего) первые восемь натуральных чисел:1,2,3,4,5,6,7,8, их НОД равен 1, равенство (*) примет вид: 36=48, это неверно, но легко, увеличив одно из слагаемых, кроме 1, на 12, получить верное равенство: $\frac{1+14+3+4+5+6+7+8}{8}=6\cdot НОД(1;14;3;4;5;6;7;8)$, здесь 2 заменена на 14, можно было другое слагаемое увеличить на 12 и соотношение (*) было бы верно. Ответ: да, см. пример.

Б) Аналогично, надо подобрать соответствующие 8 чисел или доказать, что их не существует $\frac{x_1+x_2+...+x_8}{8}=5\cdot НОД(x_1;x_2;...x_8)$ (**). Проверим первые восемь натуральных чисел:1,2,3,4,5,6,7,8, их НОД равен 1, равенство (**) примет вид: 36=40, это неверно, но легко, увеличив одно из слагаемых, кроме 1, например,8, на 4, получить верное равенство (**) $\frac{1+2+3+4+5+6+7+12}{8}=5\cdot НОД(1;2;3;4;5;6;7;12)$.Ответ: да, см.пример.

В) $\frac{x_1+x_2+...+x_8}{8}=4\cdot НОД(x_1;x_2;...x_8)(***)\Leftrightarrow x_1+x_2+...+x_8=32\cdot НОД(x_1;x_2;...x_8)$, если среди чисел есть 1, то правая часть равна 32, т.к. НОД=1, а левая, даже при наименьших натуральных числах больше или равна 36 и уменьшить её нельзя. Для увеличения НОД откажемся от 1 и от взаимно простых чисел, пусть d-наибольший их общий делитель, тогда наименьшие натуральные числа с НОД=d имеют вид: d;2d;3d;4d;5d;;6d;7d;8d,т.е. $x_1\ge d; x_2\ge 2d;...x_8\ge 8d\Rightarrow\frac{x_1+x_2+...+x_8}{8}\ge\frac{36d}{8}=4{,}5d$. Но по проверяемой гипотезе (***) $\frac{x_1+x_2+...+x_8}{8}=4\cdot НОД(x_1;x_2;...x_8)=4d$.Полученное противоречие имеет своим источником гипотезу (***), значит она неверна и должна быть отвергнута. Ответ: нет.

4.18. (Л.2017.В30.19). Существуют ли такие восемьсот различных натуральных чисел $\{x_1,x_2,...x_{800}\}$, что их среднее арифметическое больше их НОД А) ровно в 500 раз? Б) ровно в 400 раз? В) Найдите наименьшее возможное натуральное число, равное отношению среднего арифметического этих чисел к их НОД. Ответ: а) да; б)нет; в) 401.

4.19. (Я.2022.36.В3.18). Известно, что числа a,b,c,d,e,f – это различные, расставленные в некотором, возможно ином порядке, числа 2,3,4,5,6,16. А) Может ли выполняться равенство $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=6$? б) Может ли выполняться равенство $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{961}{240}$? В) Какое наименьшее значение может принимать сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$?

Решение. в)Чтобы получить наименьшую сумму трёх дробей, берём дроби с наибольшими знаменателями $\frac{1}{5}>\frac{1}{6}>\frac{1}{16}$. Оставшиеся три числа 2,3,4 распределяем в числители дробей так: наибольшее – 4 – в числитель наименьшей дроби: $\frac{4}{16}$; среднее – 3- в числитель средней по величине дроби $\frac{3}{6}$; наименьшее – 2 – в числитель наибольшей дроби - $\frac{2}{5}$. Тогда $\min\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{4}{16}+\frac{3}{6}+\frac{2}{5}=\frac{5+10+8}{20}=\frac{23}{20}=1{,}15$. Ответ:1,15.

Аналогично, чтобы получить наибольшую сумму трёх дробей, берём дроби с наименьшими знаменателями $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$. Оставшиеся три числа 4,5,16 распределяем в числители дробей так:

наибольшее – 16 – в числитель наибольшей дроби: $\frac{16}{2}$; среднее – 5- в числитель средней по величине дроби $\frac{6}{3}$; наименьшее – 5 – в числитель наименьшей дроби - $\frac{5}{4}$. Тогда $\max\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{16}{2}+\frac{6}{3}+\frac{5}{4}=\frac{96+24+15}{12}=\frac{135}{12}=11{,}25$.

А) Замечаем, что в условиях задачи 16 можно делить на 4,5,6,делить на другие числа нецелесообразно, т.к. получится сумма больше 6. Зафиксируем дробь $\frac{16}{4}=4$, из оставшихся четырёх чисел надо образовать две дроби с суммой 2, рассмотрение вариантов приводит к мысли поставить числа 3 и 6 в знаменатели дробей $\frac{16}{4}+\frac{2\textit{или}5}{6}+\frac{2\textit{или}5}{3}$; перебор двух вариантов даёт $\frac{16}{4}+\frac{2}{6}+\frac{5}{3}=\frac{96+8+40}{24}=6$. Интересно, что решение можно было получить и другим путём: $6=\frac{1440}{НОК(2,3,4,5,6,16)}=\frac{960+80+400}{240}=\frac{16}{4}+\frac{2}{6}+\frac{5}{3}$. Ответ: да.

Б)Предположим, что $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{961}{240}$, тогда общий знаменатель дробей равен $НОК(2,3,4,5,6,16)$, следовательно, среди знаменателей дробей есть числа 3,5,16 или 6,5,16. В первом случае в числителях будут стоять оставшиеся числа 2,4,6, которые смогут образовать максимальную сумму $\frac{6}{3}+\frac{4}{5}+\frac{2}{16}=2{,}925<3<\frac{961}{240}$. Во втором случае сумма дробей будет ещё меньше. Ответ: нет.

4.20. (Я.2022.36.В4.18). Известно, что числа a,b,c,d,e,f – это различные, расставленные в некотором, возможно ином порядке, числа 2,3,4,6,7,16. А) Может ли выполняться равенство $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=11$? б) Может ли выполняться равенство $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{1345}{336}$? В) Какое наибольшее и наименьшее значения может принимать сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$?

Решение. в) Чтобы получить наибольшую сумму трёх дробей, берём дроби с наименьшими знаменателями $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$. Оставшиеся три числа 6,7,16 распределяем в числители дробей так: наибольшее – 16 – в числитель наибольшей дроби: $\frac{16}{2}$; среднее – 7- в числитель средней по величине дроби $\frac{7}{3}$; наименьшее – 6 – в числитель наименьшей дроби - $\frac{6}{4}$. Тогда $\max\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{16}{2}+\frac{7}{3}+\frac{6}{4}=11\frac{5}{6}$

Аналогично, $\min\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{4}{16}+\frac{3}{7}+\frac{2}{6}=\frac{61}{84}$.

А)Для небольшого уменьшения максимального значения до 11 не будем менять наибольшее слагаемое 8 (в противном случае нам будет недостаточно оставшихся двух дробей, чтобы их сумма «дотянула» до 11). Для оставшихся чисел 3,4,6,7 перебором устанавливаем нужную комбинацию, добавляющую недостающую тройку: $\frac{7}{3}+\frac{4}{6}=\frac{9}{3}=3$.

Б) Может ли выполняться равенство $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{1345}{336}$? Заметим, что для заданных чисел

НОК(2,3,4,6,7,16)= $2^4\cdot 3^1\cdot 7=336$. Поэтому, чтобы общий знаменатель трёх дробей $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$ из данных чисел был равен 336, необходимо, чтобы в знаменателях дробей стояли числа 16,7,3 (или 6). Если взять три дроби с такими знаменателями $\frac{x}{3}+\frac{y}{7}+\frac{z}{16}$, то при расстановке в числителях оставшихся чисел 2,4,6 можно максимально получить сумму $\frac{6}{3}+\frac{4}{7}+\frac{2}{16}=\frac{112+32+7}{56}=\frac{151}{56}=\frac{906}{336}<\frac{1345}{336}$. Если же взять три дроби со знаменателями $\frac{x}{6}+\frac{y}{7}+\frac{z}{16}$,то сумма будет ещё меньше. Ответ: нет.

4.21. (Я.2022.36.В7.18). Для действительного числа x обозначим через [x] наименьшее целое число, не превосходящее x. Например, [11,25]=11, [0,37]=0. [x] называется *целой частью x*.

А)Существует ли такое натуральное n,что $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{7}\right]=n$?

Б) Существует ли такое натуральное n,что $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]=n+2$?

в) Сколько существует различных натуральных n, для которых $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{9}\right]+\left[\frac{n}{17}\right]=n+1945$?

Решение. Для тренировки и в качестве подготовительной задачи можно предложить построить графики функций $y=[x]$; $y=\left[\frac{x}{2}\right]$; $y=\left[\frac{x}{4}\right]$; $y=\left[\frac{x}{7}\right]$; $y=\left[\frac{x}{17}\right]$; $y=\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{9}\right]+\left[\frac{x}{17}\right]$; где $x\in R$; а также график функции $y=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{9}\right]+\left[\frac{n}{17}\right]$, где $n\in N$.

А) По определению целой части [x] справедливы неравенства: $\left[\frac{n}{2}\right]\le\frac{n}{2}$; $\left[\frac{n}{4}\right]\le\frac{n}{4}$; $\left[\frac{n}{7}\right]\le\frac{n}{7}$. Складывая эти неравенства почленно, получим: $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{7}\right]\le\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\frac{n}{7}=\frac{25}{28}n<n$.Это неравенство допускает начлядную интерпретацию: в системе координат NOY график функции $y=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{7}\right]$расположен в основном ниже графика функции $y=\frac{25}{28}n$ и совпадает с ним в точках 28,56,…,т.е. в точках, кратных НОК(2,4.7)=28. В свою очередь график функции $y=\frac{25}{28}n$ расположен всегда ниже графика функции $y=n$, таким образом, из неравенства $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{7}\right]\le\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\frac{n}{7}=\frac{25}{28}n<n$ следует что таких натуральных n, что $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{7}\right]=n$ не существует.

Ответ: нет.

Б) По определению целой части [x] справедливы неравенства: $\frac{n}{2}-1<\left[\frac{n}{2}\right]\le\frac{n}{2}$; $\frac{n}{3}-1<\left[\frac{n}{3}\right]\le\frac{n}{3}$; $\frac{n}{4}-1<\left[\frac{n}{4}\right]\le\frac{n}{4}$. Складывая эти неравенства почленно, получим: $\frac{13}{12}n-3<\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]\le\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{4}=\frac{13}{12}n$. График функции $y=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]$расположен не выше графика функции $y=\frac{13}{12}n$, совпадая с ним в точках 12,24,…т.е. в точках, кратных НОК (2,3,4)=12. График функции $y=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]$ расположен строго выше графика функции $y=\frac{13}{12}n-3$, т.е. он расположен в полосе между двумя параллельными прямыми $y=\frac{13}{12}n$ и $y=\frac{13}{12}n-3$. В свою очередь функция $y=\frac{13}{12}n$ растёт быстрее, чем функция $y=n+2$ и графики пересекутся $\frac{13}{12}n=n+2$ в точке **n=24**. Образно говоря, прямая $y=\frac{13}{12}n$ «заходит» в полосу при n=24, а «выходит» из полосы при n=60, т.к. $\frac{13}{12}n-3=n+2$. Уравнение $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]=n+2$ справедливо при **n=24**, действительно: $\left[\frac{24}{2}\right]+\left[\frac{24}{3}\right]+\left[\frac{24}{4}\right]=24+2$ (верно). Решив неравенство $\frac{13}{12}n-3<n+2\le\frac{13}{12}n$, найдем все значения n, при которых может выполняться уравнение $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]=n+2$, это необходимое условие: $n\in\{24;25;...;60\}$. Выполнив проверку, находим все 12 корней уравнения $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]=n+2$. Это числа $n\in\{24;28;30;32;33;34;37;38;39;41;43;47\}$ Ответ: да

Мы дополнительно выяснили, сколько натуралльных чисел удовлетворяют этому уравнению.

В) Применяя наш метод двойных оценок для выражения с целыми числами, можно аналогично показать, что

$\frac{307}{306}n-4<\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{9}\right]+\left[\frac{n}{17}\right]\le\frac{307}{306}n$, а решив затем неравенство $\frac{307}{306}n-4<n+1945\le\frac{307}{306}n$, получить необходимое условие на n, т.е. диапазон возможных корней уравнения $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{9}\right]+\left[\frac{n}{17}\right]=n+1945$, это 1224 натуральных числа $n\in\{595170;...;596395\}$.Можно доказать, что лишь 306 из них являются корнями данного уравнения.

4.22. а)Докажите тождество Диофанта Александрийского $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ тремя пособами: 1)раскрыв все скобки и получив верное равенство; 2)справа-налево, раскрыв скобки справа, выноса общий множитель и разложив правую часть на множители; 3) слева-направо, раскрыв скобки в левой части, добавив и отняв удвоенное произведение $abcd$ и выделив полные квадраты.

б)Натуральное число N представимо в виде суммы двух квадратов двумя способами $N=48149=185^2+118^2=25^2+218^2$**. Разложите N на множители.**

Решение.

Если применять формулу Диофанта справа-налево, то для отыскания чисел a,b,c,d получаем две диофантовы системы из двух уравнений с четырмя неизвестными $\begin{cases}ac+bd=185;\\ad-bc=118;\end{cases}$ или $\begin{cases}ac+bd=218;\\ad-bc=25.\end{cases}$

Решение этих систем проблематично.

Изберём другой способ, использующий понятие наибольшего общего делителя.

По условию $N=48149=x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$; **где** $x_1=185; x_2=25; y_1=118; y_2=218$.

Преобразуем $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2\Leftrightarrow x_1^2-x_2^2=y_2^2-y_1^2\Leftrightarrow(x_1-x_2)(x_1+x_2)=(y_2-y_1)(y_2+y_1)\Leftrightarrow$

$\frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} = \frac{y_2 + y_1}{x_1 + x_2}$, первую дробь по основному свойству дроби сократим на НОД числителя и знаменателя, который обозначим s, вторую дробь по основному свойству дроби сократим на НОД числителя и знаменателя, который обозначим t. Тогдат после сокращения дроби примут вид: $\frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} = \frac{s \cdot u}{s \cdot v} = \frac{u}{v}$; $\frac{y_2 + y_1}{x_1 + x_2} = \frac{t \cdot u}{t \cdot v} = \frac{u}{v}$; получаем систему из четырёх уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 = s \cdot u; \\ y_2 - y_1 = s \cdot v; \\ y_2 + y_1 = t \cdot u; \\ x_1 + x_2 = t \cdot v; \end{cases}$

которую решаем, поочерёдно складывая и вычитая первое уравнение с последним, а затем второе уравнение с третьим: $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(s \cdot u + t \cdot v); \\ x_2 = \frac{1}{2}(t \cdot v - s \cdot u); \\ y_2 = \frac{1}{2}(s \cdot v + t \cdot u); \\ y_1 = \frac{1}{2}(t \cdot u - s \cdot v); \end{cases}$

По условию $N = 48149 = x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 =$
$= \frac{1}{4}\left((s \cdot u + t \cdot v)^2 + (t \cdot u - s \cdot v)^2\right) = \frac{1}{4}\left((t \cdot v - s \cdot u)^2 + (s \cdot v + t \cdot u)^2\right) = \frac{1}{4}(t^2 + s^2)(u^2 + v^2)$; **последнее равенство получено по формуле Диофанта.**

В нашем случае $\frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} = \frac{s \cdot u}{s \cdot v} = \frac{u}{v} = \frac{185 - 25}{218 - 118} = \frac{160}{100} = \frac{20 \cdot 8}{20 \cdot 5} = \frac{8}{5}; \Rightarrow НОД = s = 20; \quad u = 8; \quad v = 5.$

Аналогично, $\frac{y_2 + y_1}{x_1 + x_2} = \frac{t \cdot u}{t \cdot v} = \frac{u}{v} = \frac{218 + 118}{25 + 185} = \frac{336}{210} = \frac{42 \cdot 8}{42 \cdot 5} = \frac{8}{5}; \Rightarrow НОД = t = 42; \quad u = 8; v = 5.$

По формуле Диофанта $N = \frac{1}{4}\left((s \cdot u + t \cdot v)^2 + (t \cdot u - s \cdot v)^2\right) = \frac{1}{4}(t^2 + s^2)(u^2 + v^2) = \frac{1}{4}(42^2 + 20^2)(8^2 + 5^2) = \frac{1}{4} \cdot (2164) \cdot (89) = 541 \cdot 89.$

4.23.(Мирошин В.В. 2020, В10№19). Натуральное число N представимо в виде суммы двух квадратов двумя способами $N = 1000009 = 235^2 + 972^2 = 1000^2 + 3^2$. **Разложите N на множители. Отв.** $293 \cdot 3413$.

4.24.Натуральное число N представимо в виде суммы двух квадратов двумя способами $N = 53293 = 178^2 + 147^2 = 42^2 + 227^2$. **Разложите N на множители. Отв.** $137 \cdot 389$.

4.25. (Мирошин В.В. 2020, В13№19). Натуральное число N представимо в виде двух сумм квадратов чисел $N = 8381 = 91^2 + 5 \cdot 10^2 = 44^2 + 5 \cdot 37^2$. **Разложите N на множители. Отв.** $17 \cdot 17 \cdot 29$.

4.25. (Мирошин В.В. 2020, В14№19). Натуральное число N представимо в виде двух сумм квадратов чисел $N = 13717421 = 761^2 + 7 \cdot 1370^2 = 439^2 + 7 \cdot 1390^2$. **Разложите N на множители.**
Отв. $3803 \cdot 3607$.

БЗ№5. Задача нахождения числа делителей $d(N) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)\ldots(\alpha_k + 1)$ **произвольного**

натурального числа $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_k^{\alpha_k}$. Способы действий: применение основной теоремы арифметики, правила умножения (принципа произведения). Обратная задача: определение числа N по количеству его делителей.

5.1. Выяснить, сколько делителей имеет число:

1) а) 72; б) 125; в) p^{2n}; г) 10!; д) $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3}$; е) $m = p_1^{\alpha}1 \cdot p_2^{\alpha}2 \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha}k$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ - попарно различные простые числа, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ - неотрицательные числа.

2) Найдите произведение всех делителей числа а)72; б)125; в) p^{2n}; г) 10!; д) $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3}$.

3) Какое трёхзначное число имеет наибольшее количество делителей?

4) Решите уравнение $d(n) = n$.

Отв.1)а)12;Б)4;в)2n+1;г)270; 4)1;2.

5.2.(Л.2020.В.15.19).а) Сколько различных натуральных делителей имеет число 80? Б) Сколько различных натуральных делителей имеет число 9216000? В) Какое наименьшее натуральное число имеет ровно 30 различных натуральных делителей?

Решение. А)По базовой задаче №3 $80 = 2^4 \cdot 5^1$.По базовой задаче №5 количество делителей числа 80 равно $d(80) = (4+1)(1+1) = 10$.

б) Аналогично, 9216000==$2^{13} \cdot 3^2 \cdot 5^3$. Количество делителей числа 9216000 равно $d(9216000) = (13+1)(2+1)(3+1) = 168$.

в) Разложим 30 в произведение натуральных множителей, каждый из которых больше единицы: $2 \cdot 3 \cdot 5 = 5 \cdot 6 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 30$.

По БЗ№5 каждый из пяти случаев соответствует одному из пяти канонических разложений искомого числа в произведение степеней простых оснований по БЗ№3:

Каноническая запись числа n	$n = p_1^1 \cdot p_2^2 \cdot p_3^4$	$n = p_1^4 \cdot p_2^5$	$n = p_1^1 \cdot p_2^{14}$	$n = p_1^2 \cdot p_2^9$	$n = p_1^{29}$
Количество делителей $d(n)$	$2 \cdot 3 \cdot 5$	$5 \cdot 6$	$2 \cdot 15$	$3 \cdot 10$	30

Наименьшее из чисел n будем искать среди наименьших простых оснований p_1; p_2 ; p_3 :2;3;5. Для минимальности n в большие степени подставляем меньшие основания:

Каноническая запись числа n	$n = p_1^1 \cdot p_2^2 \cdot p_3^4$	$n = p_1^4 \cdot p_2^5$	$n = p_1^1 \cdot p_2^{14}$	$n = p_1^2 \cdot p_2^9$	$n = p_1^{29}$
Минимальное n	$n = 5^1 \cdot 3^2 \cdot 2^4 = 720$	$n = 3^4 \cdot 2^5 = 2592$	$n = 3^1 \cdot 2^{14} = 49152$	$n = 3^2 \cdot 2^9 = 4608$	$n = 2^{29} =$ 536870912

Отв.720.

5.3.(Л.2020.В.15.19).а) Сколько различных натуральных делителей имеет число 54? Б) Сколько различных натуральных делителей имеет число 8505000? В)Какое наименьшее натуральное число имеет ровно 16 различных натуральных делителей? Отв. а)8. б)240. в)120.

5.4. Найдите натуральное число n, имеющее ровно 6 делителей, сумма которых равна 3500.

Решение. Согласно БЗ5 число делителей произвольного числа $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_k^{\alpha_k}$ равно

$d(N)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\ldots(\alpha_k+1)$, здесь каждый из множителей больше или равен 2. В условиях задачи это произведение равно 6, которое только двумя способами (с точностью до перестановки множителей) представимо в соответствующем виде $(5+1)$ или $(1+1)(2+1)$, откуда получаем две возможные структуры искомого числа: гипотеза первая 1) $N=p_1^5$; гипотеза вторая 2) $N=p_1^2\cdot p_2$
Рассмотрим первый случай: сумма шести делителей равна 3500: $1+p+p^2+p^3+p^4+p^5=3500$; суммируя прогрессию, приведём уравнение относительного простого p к виду $p^6-1=3500(p-1); p\in\{2;3;5;7;\ldots\}$. Проведём численный эксперимент, подставляя поочерёдно простые p, при этом левая часть уравнения меньше правой при 2,3, а при p=5 левая больше правой части. Так как функции в обеих частях уравнения непрерывны, то на интервале $(3;5)$ есть корень уравнения (теорема о корне Б. Больцано), можно доказать, что он единственный. Но так как на интервале нет простых чисел, то решаемое уравнение не имеет корней на множестве простых чисел. Первая гипотеза опровергнута. Значит структура искомого числа будет $N=p_1^2\cdot p_2$. Сумма шести делителей равна 3500: $1+p_1+p_2+p_1p_2+p_1^2+p_1^2p_2=3500$, преобразуем к виду $(p_1+p_2)+p_1(p_2+p_1+p_1p_2)=3499$. Далее рассуждаем по модулю 2, т.е. рассмотрим все возможные комбинации чётных и нечётных $p_1;p_2$. Случай 1: $p_1;p_2$ оба чётны- невозможен, т.к. нет двух простых чётных чисел. Случай 2: $p_1-\textit{нечётно}; p_2-\textit{чётно}$, в этом случае оба слагаемых левой части уравнения $(p_1+p_2)+p_1(p_2+p_1+p_1p_2)=3499$ нечётны, сумма их чётна, а правая часть уравнения нечётна, противоречие. Случай 3: $p_1-\textit{чётно}; p_2-\textit{нечётно}$, нарушения чётности нет, подставляя вместо p_1 единственное чётное простое число 2, получим, что $p_2=499$, $N=p_1^2\cdot p_2=2^2\cdot 499=1996$. Случай 4, когда оба простых основания нечётны, можно не рассматривать, т.к. по условию искомое число единственно и оно найдено.

5.3. 1) Найдите натуральное число n, имеющее ровно 6 делителей, сумма которых равна 3528. Ответ: 2012.

2) У натурального числа n ровно 6 натуральных делителей, сумма которых равна 104. Найдите это число. Ответ: 63.

3) У натурального числа n ровно 9 натуральных делителей, сумма которых равна 741. Найдите это число. Ответ: 441.

4) У натурального числа n ровно 9 натуральных делителей, сумма которых равна 1281. Найдите это число. Ответ: 676.

5) У натурального числа n ровно 7 натуральных делителей, сумма которых равна 19531. Найдите это число. Ответ: 15625.

5.4. Найдите все натуральные числа n, последняя десятичная цифра которых 0, и которые имеют ровно 15 различных натуральных делителей. Ответ: 2500, 400.

5.5. Найдите все натуральные числа, которые делятся на 42 и имеют ровно 42 различных натуральных делителя, включая единицу и само число.

Решение. Искомое число ищем в виде $N=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots p_k^{\alpha_k}$, **где** основания степени – простые числа, показатели степени положительные, целые числа. Число делителей $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\ldots(\alpha_k+1)=42$ по условию. Поскольку 42=2*3*7, то последнее уравнение примет вид $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)=42$, т.е. в каноническом разложении числа N только три различных простых основания, а т.к. N делится на 42, то эти простые основания есть 2,3,7. *Значит* $N=2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 7^{\alpha_3}$. Число перестановок из трёх элементов $\{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3\}$ равно 6, то рассмотрим 6 случаев, для удобства расположим их таблице.

α_1+1	α_2+1	α_3+1	N
2	3	7	$2^1\cdot 3^2\cdot 7^6$

2	7	3	$2^1\cdot 3^6\cdot 7^2$
3	2	7	$2^2\cdot 3^1\cdot 7^6$
3	7	2	$2^2\cdot 3^6\cdot 7^1$
7	2	3	$2^6\cdot 3^1\cdot 7^2$
7	3	2	$2^6\cdot 3^2\cdot 7^1$

В правой колонке таблицы записан **ответ.**

5.6.Сумма делителей числа равна $\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$ **. Найдите это число.** **Ответ:** 3^n **.**

Диофант (ок. 250) – древнегреческий математик. Жил и работал в Александрии. Сохранились 2 его сочинения: «Арифметика» и «О многоугольных числах». Ему принадлежит постановка и решение задач, сводимых к неопределённым уравнениям и их системам с рациональными коэффициентами, решения которых отыскиваются в целых или рациональных числах. Такие уравнения называются *диофантовыми*. Его работы в области теории чисел послужили основанием для дальнейших исследований Ферма и Эйлера. Именно на полях «Арифметики» Диофанта Ферма впоследствии записал свою Великую теорему: ***уравнение*** $x^n+y^n=z^n$ ***не имеет целых положительных решений*** x,y,z ***при натуральных*** $n>2$**.**

5.7. (Л.2014.В5,С6).**Решите уравнение а)** $d\left((N!)^2\right)=194119451812$**; б) Решите уравнение** $d\left((N!)^2\right)=105$**; в) Решите уравнение** $d\left(2^N\cdot (N!)^2\right)=108$**.**

Решение. а) $d\left((N!)^2\right)=(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)(2\alpha_3+1)\ldots(2\alpha_k+1)$- произведение нечётных чисел - нечётно, оно не равно 19411945182 чётному. Ответ: $\varnothing$.

Б) $d\left((N!)^2\right)=105=3\cdot 5\cdot 7=(2+1)(4+1)(6+1)\Rightarrow (N!)^2=p_1^2\cdot p_2^4\cdot p_3^6\Leftrightarrow N!=p_1^1\cdot p_2^2\cdot p_3^3$. Осталось выяснить, есть ли такое N, факториал которого имеет такой канонический вид. Проверим $N\in\{2,3,4,5,6,7\}$:

2!	3!	4!	5!	6!	7!
1*2	2*3	$2^3\cdot 3$	$2^3\cdot 3\cdot 5$	$2^4\cdot 3^2\cdot 5^1$	$2^4\cdot 3^2\cdot 5^1\cdot 7$

Как видно из перебора, такого N не существует. Ответ: нет.

В) Проверим $N\in\{1;2,3,4,5,6,7\}$:

N	1	2	3	4	5
$d\left(2^N\cdot (N!)^2\right)$	$d\left(2^1\cdot (1!)^2\right)=$ $d\left(2^1\cdot (1!)^2\right)=2$	$d\left(2^2\cdot (2!)^2\right)=$ $d\left(2^4\right)=5$	$d\left(2^3\cdot (3!)^2\right)=$ $d\left(2^3\cdot (3!)^2\right)=$ $d\left(2^5\cdot 3^2\right)=$ $6\cdot 3=18$	$d\left(2^4\cdot (4!)^2\right)=$ $d\left(2^4\cdot 24^2\right)=$ $d\left(2^{10}\cdot 3^2\right)=$ $11\cdot 3=33$	$d\left(2^N\cdot (N!)^2\right)=$ $d\left(2^5\cdot (5!)^2\right)=$ $d\left(2^5\cdot 120^2\right)=$ $d\left(2^{11}\cdot 3^2\cdot 5^2\right)=$ $12\cdot 3\cdot 3=108$

Ответ:n=5.

5.8.(Л.2013.В11.С6). а) Определите наименьшее трёхзначное число, имеющее чётное количество делителей.

Б) Определите количество двузначных чисел, имеющих чётное количество делителей.

В) Натуральное число n имеет ровно 20 делителей. Определите, чему равно произведение всех этих делителей.

Г) Если у числа k 9делителей, у числа m 20 делителей, то может ли у числа k*m быть 45 делителей?

Решение. А) Наименьшее трёхзначное число 100 имеет (2+1)(2+1)=9 делителей. Следующее число 101 простое и имеет два делителя 1 и 101. Меньшего количества делителей трёхзначное число иметь не может (у единицы один делитель, но она не трёхзначная). Отв.101.

Б)Среди 90 двузначных чисел 6 являются точными квадратами (16,25,36,49,64,81), имеющими нечётное количество делителей. Оставшиеся 84 числа (неквадраты) имеют чётное количество делителей.Отв.84.

В)Произведение всех делителей числа n зависит от количества делителей и не зависит от структуры числа n. Пусть например, число n имеет структуру $n = p^{19}$, тогда все его 20 делителей имеют вид: $1; p; p^2; p^3;\dots p^{18}; p^{19}$, произведение их равно $p^{\frac{0+19}{2}\cdot 20} = p^{190} = n^{10}$. Отв. n^{10}. Можно проверить, что , если структура числа n иная, например, $n = p_1^3 \cdot p_2^4$, то произведение всех делителей будет $p^{190} = n^{10}$.

Г)Используя п.в), можно считать, что $k = p_1^8$, $m = p_2^{19}$, тогда $k \cdot m = p_1^8 \cdot p_2^{19}$ и это число по основной формуле БЗ№5 $d(N) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)\dots(\alpha_k + 1)$ имеет 9*20=180 делителей. Отв. нет.

5.9.(Л.2013.В12.С6). а) Определите наименьшее двузначное натуральное число, имеющее нечётное количество делителей.

Б) Определите количество трёхзначных чисел, имеющих нечётное количество делителей.

В) Натуральное число n имеет ровно 17 делителей. Определите, чему равно произведение всех этих делителей.

Г) Если у числа k 9делителей, у числа m 21 делителей, то может ли у числа k*m быть 48 делителей? Отв. а)16; б) 22; в) $n^{\frac{17}{2}}$; г)нет.

5.10. Какое трёхзначное число имеет наибольшее количество делителей?

БЗ№6. Задача нахождения целых решений ***линейных диофантовых уравнений*** с двумя неизвестными $ax + by = c$. Способы действий: нахождение (может быть, угадывание) частного решения и применение теоремы о виде общего решения; применение метода спуска, применение метода остатков; метод «поглощения».

6.1. Решите в целых числах уравнение $13y + 90x = 481$.

(Отв. $x = 13 + 13k; y = -53 - 90k; k \in Z.$ Использована БЗ№1).

6.2. Пусть x_0, y_0 – какое-либо частное решение диофантова уравнения ax + by = c. Докажите, что $x = x_0 + bt$, $y = y_0 - at$, $t \in Z$ является решением данного уравнения при любом *t*. Докажите, что любое решение данного уравнения можно представить в таком виде. (Таким образом, получена формула общего решения диофантова уравнения вида ax + by = c).

6.3. Найдите все решения диофантова уравнения 3x + 5y = 13. Для каждого из полученных решений найдите те, при которых $|x-y|$, $|x+y|$, xy принимают наибольшие или наименьшие значения.

6.4. Найдите все решения диофантова уравнения а) 7x – 3y = 11;б) 5x – 4y = 44; в)11x– 5y = 73.

Указание: а)частное решение (2,1); б) частное решение (8,-1); можно использовать методы остатков, спуска.

6.5. Найдите все решения диофантова уравнения в целых числах 3x - 5y +7=0. ***Решение.***

Покажем ещё один подход к решению диофантова уравнения, который условно можно обозначить, как метод «*поглощения*». $3x-5y+7=0 \Leftrightarrow 3(x-2y)+y+7=0 \Leftrightarrow 3t+y+7=0 \Leftrightarrow y=-7-3t \Rightarrow x=t+2y=-5t-14.$

Ответ: $(-5t-14;-7-3t), t \in Z$.

6.6. Найдите все решения диофантова уравнения в целых числах 7x+30y-5=0. Решение. $7x+30y-5=0 \Leftrightarrow 7(x+4y)+2y-5=0 \Leftrightarrow 7v+2y-5=0 \Leftrightarrow 2(3v+y)+v-5=0 \Leftrightarrow 2t+v-5=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow v=5-2t, y=t-3v=7t-15, x=v-4y=-30t+65.$

Ответ: $(-30t+65;7t-15), t \in Z$.

6.7. Найдите все решения диофантова уравнения в целых числах 23x-17y-3=0. Решение. $23x-17y-3=0 \Leftrightarrow 17(x-y)+6x-3=0 \Leftrightarrow 17u+6x-3=0 \Leftrightarrow 17u+6x-3=0 \Leftrightarrow 6(3u+x)-u-3=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 6t-u-3=0, u=6t-3, x=t-3u=-17t+9, y=x-u=-23t+12.$

Ответ: $(-17t+9;-23t+12), t \in Z$.

6.8. Найдите все решения диофантова уравнения в натуральных числах 127x+634y-35000=0. Решение. $127x+634y-35000=0 \Leftrightarrow 127(x+5y)-y-35000=0 \Leftrightarrow 127t-y-35000=0 \Rightarrow y=127t-35000;$
$x=t-5y=-634t+175000. \quad t=276.$

Ответ: $(16;52)$.

Наблюдение: метод «поглощения» удобен при решении уравнений с *большими* коэффициентами.

6.9.(М.З) а) Приведите пример такого натурального числа n, что числа n^2 и $(n+16)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 200. б) Сколько существует трёхзначных чисел n с указанными в пункте а) свойством? Отв. а)17;42;67;92;…25m+17; б)36.

Решение. А) Пусть n – искомое натуральное число. По условию разность $(n+16)^2$ - n^2 делится на 200, это значит, что $32n+256$ делится на 200, иначе $32n+256 \vdots 200$. Отнимем от суммы число, кратное делителю, т.е.200, делимость сохранится: $32n+56$ делится на 200 (иначе $(32n+56) \vdots 200$). Поскольку и делимое и делитель кратны 8, сократив на 8, получим, что $4n+7$ делится на 25(иначе $(4n+7) \vdots 25$). Для отыскания n получаем диофантово уравнение $4n+7=25t$, решим его методом спуска (можно методом остатков), для этого выразим n через t: $n=\frac{25t-7}{4}=6t-1+\frac{t-3}{4}$, необходимо, чтобы $\frac{t-3}{4}$ было целым, значит $t-3=4m; m \in Z$, подставляя $t=4m+3$ в выражение для n, получим: $n=6(4m+3)-1+\frac{4m+3-3}{4}=25m+17$. Общее решение диофантова уравнение получено: $\begin{cases} n=25m+17 \\ t=4m+3 \end{cases}; m \in Z$. Натуральные значения n получим при всех $m \in N \cup \{0\}$:

m	0	1	2	3	4	…
n	17	42	67	92	117	…

Б) Натуральное $n=25m+17$ является трёхзначным, тогда и только тогда, когда $100 \le 25m+17 \le 999 \Leftrightarrow 83 \le 25m \le 982 \Leftrightarrow 3{,}3 \le m \le 39{,}2 \Leftrightarrow 4 \le m \le 39x$, таких чисел 36.

Ответ а) $\div 25m+17$: 17,42, 67, 92, 117,…; Б)36.

6.10. (ЕГЭ2012) На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8. а) Сколько чисел написано на доске? б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных? в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них? Отв. а)44; б) положительных чисел больше, чем отрицательных; в)максимальное количество положительных чисел в данных условиях равно 39.

Решение. *Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ -положительные числа набора; $x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots x_{n+m}$ - отрицательные числа набора; $x_{n+m+1}, x_{n+m+2}, x_{n+m+3}, \ldots x_{n+m+t}$ - нулевые числа набора. То, что среднее арифметическое всех* положительных *чисел набора равно 4, означает* $4 = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 4n$.

То, что среднее арифметическое всех отрицательных чисел набора равно -8, означает $-8 = \dfrac{x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + \ldots + x_{n+m}}{m} \Leftrightarrow x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + \ldots + x_{n+m} = -8m$.

То, что среднее арифметическое всех чисел набора равно 3, означает $3 = \dfrac{(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) + (x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + \ldots + x_{n+m}) + 0}{n+m+t} \Leftrightarrow 3(n+m+t) = 4n - 8m \Leftrightarrow 11m + 3t = n.$

Итак, построена Математическая модель задачи: найти неотрицательные целые n,m,t, такие, что $11m + 3t = n$, $(n+m+t) \in \{41;42;\ldots 47\}$. *Так как сумма $n+m+t$ может быть равна одному из чисел 41,…47, обозначим эту сумму буквой S, получена система* $\begin{cases} n+m+t = S \\ 11m+3t = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = S-m-t \\ 11m+3t = n \end{cases} \Rightarrow 11m+3t = S-m-t; \Leftrightarrow 12m+4t = S$, *так как левая часть делится на 4,то и правая делится на 4, а это возможно в единственном случае S=44.* $12m+4t = 44 \Leftrightarrow 3m+t = 11$. *Мат. модель имеет вид* $\begin{cases} n+m+t = 44 \\ 3m+t = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 44-(m+t) \\ t = 11-3m \end{cases}$. *Решение системы построим так: будем придавать m значения, начиная от 1 и более, затем вычислять m,t и n.*

m	*1*	*2*	*3*
t=11-3m	*8*	*5*	*2*
n=44-(m+t)	*35*	*37*	*39*

Отв. а) на доске написано 44 числа; б) положительных чисел больше, чем отрицательных; в)максимальное количество положительных чисел в данных условиях равно 39.

6.11. (МЗ). На доске написано более 50, но менее 60 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 2, среднее арифметическое всех неположительных из них равно -5, а среднее арифметическое всех неотрицательных из них равно 10. а) Сколько чисел написано на доске? б) Каких чисел написано больше: неположительных или неотрицательных? в) Какое наименьшее количество неотрицательных чисел может быть среди них? Отв. а) 55; б) неположительных; в) максимальное количество неотрицательных чисел в данных условиях равно 26.

Решение. Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ -положительные числа набора; $x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots x_{n+m}$ - отрицательные числа набора; $x_{n+m+1}, x_{n+m+2}, x_{n+m+3}, \ldots x_{n+m+t}$ - нулевые числа набора. То, что среднее арифметическое всех неположительных чисел набора равно -5, по определению означает $-5 = \dfrac{x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + \ldots + x_{n+m} + 0}{m+t} \Leftrightarrow x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + \ldots + x_{n+m} = -5(m+t)$.

То, что среднее арифметическое всех неотрицательных чисел набора равно 10, по определению означает $10=\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n+0}{n+t} \Leftrightarrow x_1+x_2+x_3+...+x_n=10(n+t)$.

То, что среднее арифметическое всех чисел набора равно 2, по определению означает $2=\frac{(x_1+x_2+x_3+...+x_n)+(x_{n+1}+x_{n+2}+x_{n+3}+...+x_{n+m})+0}{n+m+t} \Leftrightarrow 2(n+m+t)=10(n+t)-5(m+t) \Leftrightarrow 7m-3t=8n.$

Итак, построена Математическая модель задачи: найти неотрицательные целые n,m,t, такие, что $7m-3t=8n$, $(n+m+t)\in\{51;52;...58;59\}$. Так как сумма $n+m+t$ может быть равна одному из чисел 51,…59, обозначим эту сумму буквой S, получена система $\begin{cases} n+m+t=S \\ 7m-3t=8n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=S-m-t \\ 7m-3t=8n \end{cases} \Rightarrow 7m-3t=8(S-m-t) \Leftrightarrow 15m+5t=8\cdot S$, так как левая часть делится на 5,то и правая делится на 5, а это возможно в единственном случае S=55. $15m+5t=8\cdot 55 \Leftrightarrow 3m+t=88$. Мат. модель имеет вид $\begin{cases} n+m+t=55 \\ 3m+t=88 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+m+t=55 \\ 2m-n=33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=55-(n+m) \\ 2m-33=n \end{cases}$. Решение системы построим так: будем придавать m значения, начиная от 17 и более, затем вычислять m,t.

m	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
n=2m-33	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
t=55-(m+n)	37	34	31	28	25	22	19	16	13	10	7	4	1

Количество неотрицательных чисел изменяется от 38 до 26, наименьшее 26.

Количество неположительных чисел изменяется от 30 до 54, во всех 13 случаях неположительных чисел больше, чем неотрицательных, просто потому, что отрицательных всегда больше, чем положительных.

Отв. а) 55; б) неположительных; в) максимальное количество неотрицательных чисел в данных условиях равно 26.

6.12. (ЕГЭ2012) На доске написано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 11, среднее арифметическое всех положительных из них равно 18, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -9. а) Сколько чисел написано на доске? б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных? в) Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть среди них? Отв. а)36; б) положительных; в) максимальное количество отрицательных чисел в данных условиях равно 8

6.13. (Л.2017.В.27.19) На доске написано более 20, но менее 30 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 5, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -10. а) Сколько чисел написано на доске? б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных? в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них? Отв. а)25; б) отрицательных; в) максимальное количество положительных чисел в данных условиях равно 11.

6.14. (Л.2020.В.1.19) На складе 77 дынь, масса каждой выражается целым числом граммов. Средняя масса дынь, которые легче 3000 граммов, равна 2770 граммов, а средняя масса дынь, которые тяжелее 3000 граммов, равна 3020 граммов. Средняя масса всех 77 дынь равна 3000 граммов. А)Может ли дынь с массой меньше 3000 граммов быть столько же, сколько и дынь с массой больше 3000 граммов? Б)Может ли дынь с массой 3000 граммов быть ровно 11? В) Какую наименьшую массу (в граммах) может иметь дыня на этом складе?

Решение. Разделим все дыни на три группы: m «лёгких» с весами $x_1,x_2,x_3,...x_m$; k «средних» с весами $x_{m+1},x_{m+2},x_{m+3},...x_{m+k}$ равными 3000 граммов; n «тяжёлых» с весами $x_{m+k+1},x_{m+k+2},x_{m+k+3},...x_{m+k+n}$, причём

$x_i \in N$ и $k+m+n=77$. Средний вес «лёгких» равен 2770, следовательно $\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_m}{m}=2770$, значит, общий вес лёгких равен $x_1+x_2+x_3+...+x_m=2770\cdot m$.

Вес всех средних равен $3000\cdot k$.

Средний вес «тяжёлых» равен 3020, следовательно $\frac{x_{m+k+1}+x_{m+k+2}+x_{m+k+3}+...+x_{m+k+n}}{n}=3020$, значит, общий вес «тяжёлых» равен $x_{m+k+1}+x_{m+k+2}+x_{m+k+3}+...+x_{m+k+n}=3020\cdot n$.

Средний вес всех равен 3000, следовательно $\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_{77}}{77}=3000$, значит общий вес всех равен $x_1+x_2+x_3+...+x_{77}=77\cdot 3000=231000$.

Складывая веса лёгких, средних и тяжёлых, получаем равенство: $2770\cdot m+3000\cdot k+3020\cdot n=231000 \Leftrightarrow 277\cdot m+300\cdot k+302\cdot n=23100$. Итак, мат.модель задачи имеет вид системы диофантовых уравнений: $\begin{cases}277\cdot m+300\cdot k+302\cdot n=23100\\ k+m+n=77; r,m,n\in N\end{cases}$. Для ответа на вопрос исключим m из первого уравнения: $\begin{cases}277\cdot(77-k-n)+300\cdot k+302\cdot n=23100\\ m=77-k-n;\end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases}21329+13\cdot k+25\cdot n=23100\\ m=77-k-n;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}13\cdot k+25\cdot n=1771\\ m=77-k-n;\end{cases}$, при k=n первое уравнение принимает вид $13\cdot k+25\cdot n=1771 \Rightarrow 38n=1771 \Leftrightarrow \varnothing$, оно не имеет натуральных решений, т.к.левая и правая части имеют разную чётность. Отв.а)нет.

Б) Может ли быть k=11? В этом случае система уравнений принимает вид $\begin{cases}277\cdot m+300\cdot 11+302\cdot n=23100\\ 11+m+n=77;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}277\cdot m+302\cdot n=19800\\ m+n=66;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}277\cdot(m+n)+25\cdot n=19800\\ m+n=66;\end{cases}$,подставляя второе уравнение в первое, получаем: $277\cdot(m+n)+25\cdot n=19800 \Leftrightarrow 277\cdot(66)+25\cdot n=19800 \Leftrightarrow 25\cdot n=1518 \Leftrightarrow \varnothing$ не имеет натуральных решений, левая часть делится на 5, а правая – нет. Ответ: нет.

В) $x_{\min}-?$, очевидно, что наименьший вес надо искать среди весов первой, лёгкой группы, поэтому из системы исключаем n: $\begin{cases}277\cdot m+300\cdot k+302\cdot n=23100\\ n=77-k-m;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}277\cdot m+300\cdot k+302\cdot(77-k-m)=23100\\ n=77-k-m;\end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases}-25\cdot m-2\cdot k=23100-23254\\ n=77-k-m;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}25\cdot m+2\cdot k=154\\ n=77-k-m;\end{cases}$. Натуральное m в первом уравнении может принимать только три значения: 2,4,6, разберём каждый случай отдельно.

M	2	4	6
K	52	27	2
n	23	46	69
$x_{\min}-?$	2541	2083	

Если m=2, то лёгких всего две дыни и их масса равна 2*2770=5540, самая тяжёлая из лёгких может весить 2999, тогда вторая из лёгких весит 5540-2999=2541.

Если m=4, то лёгких всего четыре дыни и их масса равна 4*2770=11080, три самых тяжёлых из лёгких могут весить по 2999, тогда четвёртая из лёгких весит 11080-3*2999=2083.

Если m=6, то лёгких всего шесть дынь и их масса равна 6*2770=16620, пять самых тяжёлых из лёгких могут весить по 2999, тогда шестая из лёгких весит 16620-5*2999=1625. **Отв. 1625**.

6.15. (Л.2020.В.2.19) На прилавке лежит 95 товаров разной цены, цена каждого выражается целым числом рублей. Средняя цена товаров, которые дешевле 2000 рублей, равна 1960 рублям, а средняя цена товара, которые дороже 2000 рублей, равна 2050 рублей. Средняя цена всех 95 товаров равна 2000 рублей. А)Может ли товаров ценой 2000 рублей быть ровно 50? Б)Может ли товаров, ценой больше 2000 рублей быть в два раза меньше, чем товаров ценой меньше 2000 рублей? В)Какую наибольшую цену может иметь товар на прилавке? Отв. а)да; б)нет; в)3961

БЗ№7. Задача нахождения целых решений квадратичных диофантовых уравнений с двумя неизвестными $ax^2+bxy+cy^2=d$. Способы действий: разложение на множители левой части, рассмотрение уравнения как квадратного относительно одной из переменных с наложением дополнительных ограничений; частный приём: сведение к однородному уравнению в случае d=0; использование свойств функций, входящих в левую часть уравнения (чётность, монотонность, ограниченность, др.)

7.1. Решите уравнения в целых числах: а) xy = 3x+y; б) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 5$; в)(x+y)(y-1)=4;

г) (x-3)(xy+5) = 5; д) $x^2 + xy = 10$; е) $x^2 + 23 = y^2$; ж) $x^2 = 6y + y^2 + 21$;

з) $xy - 7y + 3x = 39$.

Ответ: а) (2,6), (4,4), (0, 0), (-2,2); б) $(9;4);(-3;-4);(3;4);(-9;-4)$; в) $(-4;5);(-1;-1);(2;2);(2;-3);(-4;0);(-1;3);$ г) $(4;0);(2;-5);(-2;3);$ д)подсказка: $y=\frac{10}{x}-x, x\in\{\pm1;\pm2;\pm5;\pm10\}$; е) подсказка: $(y-x)(y+x)=1\cdot23=(-1)\cdot(-23)=23\cdot1=(-23)\cdot(-1)$, уравнение равносильно совокупности 4 систем;

ж)(4;-1), (4;-5), (-4;-5), (-4;-1); з) Выразите одну неизвестную через другую или разложите на множители левую часть; (10;3), (8;15); (9;6);

7.2. Докажите, что при любом $n \in N$ числа вида а) 3n+2; б) 4n+3; в)5n+2; г)5n+3 не являются квадратами целого числа.

Решение а). Рассуждаем по модулю 3: рассмотрим остатки при делении на 3, натуральные числа разбиваются на три непересекающихся класса чисел вида 3k,3k+1,3k+2. Но квадраты этих чисел не дают при делении на 3 остаток 2. Утверждение доказано. Решение б) получаем, рассуждая по модулю 4. Использована первая базовая задача. Замечание: убедитесь самостоятельно, что **квадрат натурального числа никогда не оканчивается цифрами 2,3,7,8.** (Решение возможно перебором или рассуждением по модулю 10).

7.3. Решите уравнения в целых числах, или докажите, что решений нет:

а) $x^2=3y+2$; б) $x^2=4y+3$; в) $x^2=5y+2$; г) $x^2=5y+3$. Обобщите примеры, приведите ещё примеры уравнений вида $x^2=by+r$, не имеющие решений при простых или составных **в.**

7.4. Приведите пример квадратного трёхчлена с целыми коэффициентами, дискриминант которого равен 39?

Решение. Предположим, что существует, тогда $D=b^2-4ac=39$, преобразуем полученное уравнение в целых числах к виду: $b^2=4ac+39;\ b^2=4(ac+9)+3$, что противоречит ранее доказанному. Использована БЗ1. **Задание**: Замените 39 на пару других подходящих чисел!

7.5. Докажите, что данные уравнения не имеют решений в целых числах: а) x^2-3y = 5; б)$3x^2$-9 = $4y^2$; в) 7n + 3 = m^2; г) 7n +5 = m^2; д) x^3 – 3x – 1 = 0. Подсказка: используйте БЗ1.

Пример 5. Число p>3 - простое. Докажите, что а) p = 6k ± 1, k∈N; б) p^2-1 кратно 24.

Решение а). Рассуждая по модулю 6: 6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5, получаем, что только в двух случаях: 6k+1, 6k+5 не приходим к противоречию с условием, что p простое, бо́льшее 3. Дальнейшее очевидно. Решение б). Предположим, что p=6k+1, тогда p^2-1=12k(3k+2). При чётных к на 2 делится второй множитель, при нечётных к на 2 делится третий множитель. При p=6k-1 (или 6k+5) доказывается аналогично. Использована БЗ1.

7.6. Пионервожатый попросил пионеров принести ему яблоки. Пионеры набрали по одинаковому количеству яблок, но по дороге назад перессорились, и каждый бросил в каждого по одному яблоку. Поэтому они принесли пионервожатому только 95 яблок. Сколько было пионеров в отряде и по сколько яблок они собрали первоначально? **Решение**. Пусть было x пионеров, по y яблок они собрали первоначально, xy яблок было собрано всего. По условию $xy - x(x-1) = 95$, диофантово уравнение приведём к виду $x(y - x + 1) = 95$, учитывая, что $95 = 1\cdot 95 = 95\cdot 1 = 5\cdot 19 = 19\cdot 5$, получаем совокупность 4 систем уравнений. Использованы 2,3,7 базовые задачи. Ответ: ((5,23); (19,23); (95,95)). Заметим, что диофантовому уравнению удовлетворяет пара x=1,y=95, но она не удовлетворяет смыслу задачи.

7.7. (Я2019.В47.19). Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала? Отв. а)2,3. б)нет; в)8.

Решение. Составим математическую модель задачи. Из условия следует: $\div a_1, a_2, \dots a_n,\quad d \ge 1,\quad a_i, d \in N \cup \{0\}$. Обозначим первую разность Δ_1 $\Delta_1 = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$. Обозначим вторую разность Δ_2 $\Delta_2 = (a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1})^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2)$, по условию $\Delta_2 - \Delta_1 = 40$. Расшифруем последнее уравнение:

$$\Delta_2 - \Delta_1 = (a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1})^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2).$$

От второй и четвёртой скобок остаётся одно слагаемое $-a_{n+1}^2$, а разность первой и третьей скобок разложим как разность квадратов: $\Delta_2 - \Delta_1 = (a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1})^2 - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \quad - a_{n+1}^2 =$

$$= (2a_1 + 2a_2 + \dots + 2a_n + a_{n+1})a_{n+1} \quad - a_{n+1}^2 = (2a_1 + 2a_2 + \dots + 2a_n)a_{n+1} + a_{n+1}^2 \quad - a_{n+1}^2 = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)a_{n+1} = 40.$$

Итак, требуется привести пример арифметической прогрессии, удовлетворяющей при некотором n соотношению $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)a_{n+1} = 20$. Преобразуем скобку по формуле суммы арифметической прогрессии: $(a_1+a_n)na_{n+1}=40$. Для перебора используем эвристический «принцип крайнего», начнём с самой «простой» прогрессии $\div 1,2,3$, тогда (1+2)2*3$\neq$40. Продолжим перебор $\div 2,3,4$, тогда (2+3)2*4=40 верно! Пример искомой прогрессии $\div 2,3,4$ найден.

Б) Математическая модель задачи конструируется аналогично и приводит к уравнению $2(a_1+a_2+...+a_n)a_{n+1}=1768 \Leftrightarrow (a_1+nd)(a_1+a_n)n=1768$ при n=13. Существует ли такая прогрессия? Подставим n=13 и преобразуем уравнение к виду $(a_1+13d)(a_1+a_1+12d)13=1768 \Leftrightarrow (a_1+13d)(a_1+6d)\cdot 2\cdot 13=1768=26\cdot 68$ и после сокращения на 26 получим уравнение $(a_1+13d)(a_1+6d)=68$, но $(a_1+13d)\geq 13;\quad (a_1+6d)\geq 6 \Rightarrow (a_1+13d)(a_1+6d)\geq 6\cdot 13=78$, значит уравнение не имеет решений, а прогрессия не могла содержать 13 членов. Ответ: нет.

В) Математическая модель задачи $\div a_1,a_2,...a_n,\quad d\geq 1,\quad a_i,d\in N\cup\{0\};\quad (a_1+nd)(2a_1+(n-1)d)n=1768$, $n_{\max}-?$ Имеем диофантово уравнение с тремя неизвестными. По основной теореме арифметики, 1768 единственным образом раскладывается в произведение степеней простых чисел $1768=2^3\cdot 13\cdot 17$ (БЗ 3), n является делителем 1768, а всего у него есть (3+1)(1+1)(1+1)=16 делителей, причём, проверено, что n$\neq$13. Проверим n=17 $\Rightarrow (a_1+17d)(2a_1+16d)17=1768 \Leftrightarrow (a_1+17d)(a_1+8d)=52$, что невозможно, т.к. первый множитель не меньше 17, а второй не меньше 8, их произведение не меньше 136. Аналогично, отрицательный результат дадут проверки $n\in\{13\cdot 17;8\cdot 13;8\cdot 17\}$. Проверим n=8 $\Rightarrow (a_1+8d)(2a_1+7d)8=1768 \Leftrightarrow (a_1+8d)(2a_1+7d)=13\cdot 17$, это диофантово уравнение равносильно совокупности двух систем: $(a_1+8d)(2a_1+7d)=13\cdot 17 \Leftrightarrow \begin{cases}a_1+8d=13\\ 2a_1+7d=17\end{cases} \vee \begin{cases}a_1+8d=17\\ 2a_1+7d=13\end{cases}$.Решением первой системы являются $a_1=5, d=1$. Решением второй системы являются $a_1=\frac{-5}{3}\notin N, d=\frac{7}{3}\notin N$. Ответ:8.

7.8. (Я.2019.В46.19). Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность. а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз. б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов? в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала? Отв. а)1,2,3. б) нет; в)8.

7.11. Можно ли решить в целых числах уравнение $x^2+px+q=0$, если p и q – нечётные числа?

1) Пусть x - чётное число, x^2- чётное, px- чётное, (x^2+px) - чётное не может равняться нечётному числу q. Этот случай невозможен.

2) Пусть x - нечётное число, x^2- нечётное, px- нечётное, (x^2+px) - чётное, оно не может равняться нечётному числу q. И этот случай не имеет место. Следовательно, уравнение не имеет решений в целых числах.

7.12. Найдите все целые a и b, при которых многочлен $y=x^2+ax+b$ принимает при всех целых x: а) чётные; б) нечётные значения.

а) $y=x(x+a)+b$. Рассуждаем по модулю 2: при $x=2n$, y будет чётным при $\forall a$, и чётных b. При $x=2n+1$, и чётном b y будет чётным при нечётном a. Ответ: a- нечётно, b - чётно.

б) Аналогично, при $x = 2n$, $y = (4n^2 + 2an) + b$ будет нечётно при нечётном b. При $x = 2n+1$, $y = (2n+1)^2 + 2an + a + b = \text{четное} + a$, y будет нечетным при нечетном a. Ответ: a, b - нечетные.

7.13.Решите в целых числах уравнения: а) $21p^2 + pq - 2q^2 = 19$; б) $p^2 + 13q^2 = 100 + 6pq$;

в) $2p^2q^2 + q^2 = 6p^2 + 12$; г) $4p^2 + q^2 - 12p + 2q + 5 = 0$; д) $p^2 + pq + q^2 = 7$; е) $3p^2 + 5pq + 2q^2 = 7$

ж) $5p^2 - 2pq + 2q^2 + 2p - 2q - 3 = 0$.

Решение а) Решим квадратное уравнение $21p^2 + pq - 2q^2 = 0 \Leftrightarrow p_{1,2} = \dfrac{-q \pm \sqrt{q^2 + 168q^2}}{42} = \dfrac{-q \pm 13q}{42}; p_1 = \dfrac{-q}{3}, p_2 = \dfrac{2q}{7}$. Зная корни, разложим квадратный трёхчлен на множители: $21p^2 + pq - 2q^2 = 21\left(p + \dfrac{q}{3}\right)\left(p - \dfrac{2q}{7}\right) = (3p+q)(7p-2q)$, значит исходное уравнение можно записать: $(3p+q)(7p-2q) = 19 = 1 \cdot 19 = 19 \cdot 1 = (-1)\cdot(-19) = (-19)\cdot(-1)$. Это уравнение равносильно совокупности 4-х систем:

1) $\begin{cases} 3p + q = 1 \\ 7p - 2q = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 1 - 3p \\ 7p - 2(1-3p) = 19 \end{cases} \Leftrightarrow 13p = 21 \Leftrightarrow \varnothing$.

2) $\begin{cases} 3p + q = 19 \\ 7p - 2q = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 19 - 3p \\ 7p - 2(19-3p) = 19 \end{cases} \Leftrightarrow 13p = 39 \Leftrightarrow \begin{cases} q = 10 \\ p = 3 \end{cases}$.

3) $\begin{cases} 3p + q = -1 \\ 7p - 2q = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -1 - 3p \\ 7p - 2(-1-3p) = 19 \end{cases} \Leftrightarrow 13p = -21 \Leftrightarrow \varnothing$.

4) $\begin{cases} 3p + q = -19 \\ 7p - 2q = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -19 - 3p \\ 7p - 2(-19-3p) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow 13p = -39 \Leftrightarrow \begin{cases} q = -10 \\ p = -3 \end{cases}$.

Ответ:

p	3	-3
q	10	-10

Наблюдение: пусть дано диофантово уравнение $ax^2 + bxy + cy^2 = d$,

если дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bxy + cy^2$ неотрицателен, то левая часть уравнения раскладывается на два множителя, правая часть уравнения всегда может быть разложена в произведение двух целых чисел, тогда уравнение сводится к рассмотрению 4-х (иногда больше) случаев, т.е. распадается на 4 системы.

Решение б). Приведём уравнение к стандартному виду $p^2 + 13q^2 = 100 + 6pq \Leftrightarrow p^2 - 6pq + 13q^2 = 100$. Проверим, в соответствии с нашим наблюдением, дискриминант квадратного трёхчлена $p^2 - 6pq + 13q^2 = 0; D = 36q^2 - 52q^2 = -16q^2 \le 0$, если q=0,то $p = \pm 10$, есть ли другие решения? Тот факт, что левая часть уравнения не раскладывается на множители, как в п.а), означает, что необходим переход к другому алгоритму: выделению полных квадратов в левой части: $(p^2 - 6pq) + 13q^2 = 100 \Leftrightarrow (p^2 - 6pq + 9q^2) + 4q^2 = 100 \Leftrightarrow (p - 3q)^2 + (2q)^2 = 100$. **Решим вспомогательную задачу**: представить 100 в виде суммы двух квадратов: $(a)^2 + (b)^2 = 100$, где целые a,b ограничены по модулю числом 10. Перебором находим все целые решения этого уравнения:

A	0	± 6	± 8	± 10
b	± 10	± 8	± 6	0

Следовательно, уравнение $(p-3q)^2+(2q)^2=100$ равносильно совокупности 12 систем:

1,2) $\begin{cases} p-3q=0 \\ 2q=\pm 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=3q \\ q=\pm 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=-5 \\ p=-15 \end{cases} \vee \begin{cases} q=5 \\ p=15 \end{cases}.$

3,4,5,6) $\begin{cases} p-3q=\pm 6 \\ 2q=\pm 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=3q\pm 6 \\ q=\pm 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=4 \\ p=18 \end{cases} \vee \begin{cases} q=4 \\ p=6 \end{cases} \vee \begin{cases} q=-4 \\ p=-18 \end{cases} \vee \begin{cases} q=-4 \\ p=-6 \end{cases}.$

7,8,9,10) $\begin{cases} p-3q=\pm 8 \\ 2q=\pm 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=3q\pm 8 \\ q=\pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=3 \\ p=17 \end{cases} \vee \begin{cases} q=3 \\ p=1 \end{cases} \vee \begin{cases} q=-3 \\ p=-17 \end{cases} \vee \begin{cases} q=-3 \\ p=-1 \end{cases}.$

11,12) $\begin{cases} p-3q=\pm 10 \\ 2q=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=\pm 10 \\ q=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=0 \\ p=-10 \end{cases} \vee \begin{cases} q=0 \\ p=10 \end{cases}.$

Ответ:

P	15	-15	18	6	-18	-6	17	1	-17	-1	-10	10
q	5	-5	4	4	-4	-4	3	3	-3	-3	0	0

Обобщения: если дискриминант неотрицателен, раскладываем л.ч. на множители; если дискриминант отрицателен, выделяем полные квадраты переменных. Далее делаем ограниченный перебор.

Решение в) $2p^2q^2+q^2=6p^2+12$. Рассмотрим подготовительную задачу: решим в целых числах уравнение $2xy+y=6x+12$. **1-способ.** $(2x+1)y=6x+12 \Leftrightarrow y=\frac{6x+12}{2x+1}=\frac{3(2x+1)+9}{2x+1}=3+\frac{9}{2x+1}$, преобразования приводят к равносильному уравнению, т.к. $x\neq -0{,}5$. Дробь $\frac{9}{2x+1}$ является целым числом, только если знаменатель есть делитель 9: $(2x+1)\in\{1,-1,3,-3,9,-9\}$. Рассмотрим эти 6 случаев и найдём соответствующие x,y:

$2x+1$	1	-1	3	-3	9	-9
x	0	-1	1	-2	4	-5
$y=3+\frac{9}{2x+1}$	12	-6	6	0	4	2

2-способ. Преобразуем уравнение, разложив на множители левую часть : $2xy+y=6x+12 \Leftrightarrow 2xy-6x+y=12 \Leftrightarrow 2x(y-3)+y-3=12-3 \Leftrightarrow (y-3)(2x+1)=9;$

$1\cdot 9=9\cdot 1=3\cdot 3=(-1)\cdot(-9)=(-9)\cdot(-1)=(-3)\cdot(-3)$

Далее уравнение распадается на 6 систем.

Применим, например, 1-й способ для уравнения $2p^2q^2+q^2=6p^2+12 \Leftrightarrow q^2(2p^2+1)=6p^2+12 \Leftrightarrow q^2=\frac{6p^2+12}{2p^2+1}=3+\frac{9}{2p^2+1}$.Рассмотрим три случая: $2p^2+1\in\{1;3;9\}$.

$2p^2+1$	1	3	9
p	0	± 1	± 2

$q^2=3+\dfrac{9}{2p^2+1}$	12	6	4
q	$\varnothing$	$\varnothing$	± 2

Ответ:

P	2	-2	2	-2
q	2	-2	-2	2

Примените самостоятельно 2-й способ для решения этого уравнения. Совпали ли корни?

Решение г). Рассмотрим модифицированный подход к решению этого уравнения. $4p^2+q^2-12p+2q+5=0$.Рассматриваем его как квадратное относительно, например p, для разрешимости уравнения необходима неотрицательность дискриминанта: $D(q)=144-16(q^2+2q+5)=16(9-((q+1)^2+4))=16(5-(q+1)^2)\geq 0 \Leftrightarrow q\in\{0;\pm1;-2;-3\}$.Далее проверяем 5 целых значений q: 1)$\begin{cases}4p^2-12p+5=0\\ q=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=\dfrac{6\pm4}{4}\notin Z\\ q=0\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing$ 2)$\begin{cases}4p^2-12p+8=0\\ q=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p\in\{1;2\}\\ q=1\end{cases}$.

3)$\begin{cases}4p^2-12p+8=0\\ q=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p\in\{1;2\}\\ q=-3\end{cases}$. При q=-1,q=-2 целых решений нет. Ответ:

P	2	2	1	1
q	-3	1	-3	1

Заметим, что уравнение можно было решать методом выделения полных квадратов.

Решение д). $p^2+pq+q^2=7$; дискриминант $D(q)=q^2-4q^2=-3q^2\leq 0$ неположителен, поэтому выделяем полные квадраты: $\left(p+\dfrac{q}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}q^2=7\Leftrightarrow(2p+q)^2+3q^2=28$. **Решим подготовительную задачу** о разложении 28 в сумму квадрата и утроенного квадрата $(a)^2+3b^2=28$, перебором, ведь неизвестные ограничены $|a|\leq 5;|b|\leq 3$: получаем 12 решений:

a	0	±1	±4	±5
b	$\varnothing$	±3	±2	±1

Уравнение $p^2+pq+q^2=7$ равносильно совокупности 12 систем:

1,2,3,4)$\begin{cases}2p+q=\pm1\\ q=\pm3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q=\pm3\\ 2p=\pm3\pm1\end{cases}\Leftrightarrow(p;q)\to(2;3),(1;3),(-2;-3),(-1;-3)$.

5,6,7,8)$\begin{cases}2p+q=\pm4\\ q=\pm2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q=\pm2\\ 2p=\pm4\pm2\end{cases}\Leftrightarrow(p;q)\to(3;2),(-1;2),(1;-2),(-3;-2)$.

9,10,11,12)$\begin{cases}2p+q=\pm5\\ q=\pm1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q=\pm1\\ 2p=\pm5\pm1\end{cases}\Leftrightarrow(p;q)\to(3;1),(-2;1),(-3;-1),(2;-1)$. Объединяя решения 12 систем, получаем ответ.

Подсказка е):дискриминант уравнения неотрицателен.

Решение ж). Приводим уравнение к стандартному виду: $5p^2-2pq+2q^2+2p-2q-3=0\Leftrightarrow 5p^2+p(2-2q)+2q^2-2q-3=0$.

Дискриминант уравнения $D(q)=(2-2q)^2-20(2q^2-2q-3)=-36q^2+32q+64\geq 0$ неотрицателен только при двух целых q=0,q=1. Это необходимое условие для разрешимости уравнения. Проверим, является ли оно достаточным: 1)$\begin{cases}5p^2+2p-3=0\\ q=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=-1\\ q=0\end{cases}$. 2)$\begin{cases}5p^2-2p+2+2p-2-3=0\\ q=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p\notin Z\\ q=1\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing$

Ответ:p=-1;q=0.

7.14. Найдите все пары целых чисел, сумма которых равна их произведению.

Ответ: (0,0),(2,2).

7.15. Решите «Победное» уравнение $x^2+y^2=19451945$.

7.16. (Л.2020.В.27.19) Известно, что квадратное уравнение $x^2+mx+k=0$ **имеет два различных натуральных корня.**

А) Найдите все возможные значения m при k=26. Б) Найдите все возможные значения k при m+k=72. В) Найдите все возможные значения корней уравнения, если $k^2-m^2=2812$.

Решение. **А)** Т.к. корни натуральные, то по теореме Франсуа Виета $m=-(x_1+x_2)$ является целым отрицательным числом, $k=(x_1\cdot x_2)$ является натуральным числом. По условию $x^2+mx+26=0$ имеет два различных корня, следовательно, $D=m^2-104>0\Leftrightarrow|m|\geq 11$.т.к. m-целое. Разложим 26 в произведение двух натуральных чисел: $26=k=(x_1\cdot x_2)=1\cdot 26=2\cdot 13=26\cdot 1=13\cdot 2$ тогда, если $(x_1\cdot x_2)=1\cdot 26\Rightarrow m=-27$.Если $(x_1\cdot x_2)=2\cdot 13\Rightarrow m=-15$. Ответ:-27;-15.

Б) ММЗ: Найти натуральное k, если $\begin{cases}x^2+(72-k)x+k=0; k\in N; k\geq 73\\ D=(72-k)^2-4k>0; x_{1,2}\in N\end{cases}$. **Условие** $k\geq 73$ объясняется тем, что при положительном коэффициенте $(72-k)$ квадратное уравнение $x^2+(72-k)x+k=0$ не имеет положительных корней (сумма положительных чисел не равна нулю). Решив неравенство $(72-k)^2-4k>0$ с условием $k\geq 73$, получим, что $k\geq 92$. Переформулируем задачу: найти натуральное k, если $\begin{cases}x^2+(72-k)x+k=0; k\geq 92\\ x_{1,2}\in N\end{cases}$. Теорема Виета тут не поможет, пробуем найти необходимое условие: очевидно, что дискриминант квадратного уравнения должен быть полным квадратом, иначе корни будут иррациональными, а не натуральными. Выясним, при каких k диофантово уравнение $(72-k)^2-4k=l^2$ имеет решение. $(72-k)^2-4k=l^2\Leftrightarrow(k-74)^2-74^2+72^2=l^2\Leftrightarrow(k-74-l)(k-74+l)=292$. Разложим правую часть на два натуральных множителя (обе скобки неотрицательны при $k\geq 92$): $292=1\cdot 292=2\cdot 146=4\cdot 73=..$

Уравнение $(k-74-l)(k-74+l)=292$ равносильно совокупности систем, решаем их, вычитая первое уравнение из второго: 1)$\begin{cases}k-74-l=1\\ k-74+l=292\end{cases}\Leftrightarrow 2l=291\Leftrightarrow\varnothing$; 2)$\begin{cases}k-74-l=2\\ k-74+l=146\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2l=144\\ k=148\end{cases}$.

Остальные системы не имеют целочисленных решений, т.к. сумма и разность в левых частях уравнений, как мы знаем, имеют одинаковую чётность, а в правых частях стоят числа различной чётности (по этой же причине первая система не имеет решений). **Ответ: k=148.**

В) ММЗ: Найти множество значений натуральных корней уравнения, если
$$\begin{cases} x^2+mx+k=0; k\in N; m\in Z \\ k^2-m^2=2812; x_{1,2}\in N \end{cases}.$$

Имеем диофантово уравнение $k^2-m^2=2812$ с условием $k\in N; m\in Z; m<0.$ Разложив на множители левую и правую части уравнения, имеем: $k^2-m^2=2812 \Leftrightarrow (k-m)(k+m)=4\cdot 19\cdot 37$. На первый взгляд кажется, что существует множество способов представить 2812 в виде произведения двух целых чисел (а, значит, придётся решать много систем). Но учёт особенностей системы приводит к необходимости решения только двух систем: 1)множители левой части имеют одинаковую чётность, следовательно, оба множителя в правой части могут быть только чётными: 38 и 74; или 2 и 1406; 2)множитель $(k-m)>0$, следовательно, второй множитель $(k+m)>0$ положителен; отпадает необходимость рассматривать системы с отрицательными правыми частями; 3)т.к. $(k-m)>(k+m)$ при отрицательных m, то первый множитель больше второго: $74\cdot 38$ и $1406\cdot 2$.

$$1)\begin{cases} k-m=74 \\ k+m=38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k=112 \\ m=-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=56 \\ m=-18 \end{cases} \Rightarrow x_{1,2}\in\{4;14\}.$$

$$2)\begin{cases} k-m=1406 \\ k+m=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k=1408 \\ 2m=-1404 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=704 \\ m=-702 \end{cases} \Rightarrow x^2-702x+704=0$$, но последнее уравнение натуральных корней не имеет. **Ответ:4 и 14.**

7.17. (Л.2020.В.28.19) Известно, что квадратное уравнение $x^2+mx+k=0$ имеет два различных натуральных корня.

А) Найдите все возможные значения k при m=-6. Б) Найдите все возможные значения m при k-m=45. В) Найдите все возможные значения корней уравнения, если $k^2-m^2=2236$. Отв. А)5;8;б)-24;в)2;28.

7.18.(Я.2021.В.1.19).Будем называть три числа *треугольной тройкой*, если они могут быть длинами сторон треугольника. Будем называть три числа *прямоугольной тройкой*, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника. А) Может ли среди 7 различных натуральных чисел не быть ни одной *треугольной тройки*? Б) Может ли среди 4 различных натуральных чисел быть три *прямоугольные тройки?*

Решение. а) Необходимым условием *треугольной тройки* является выполнение неравенства треугольника. Поэтому, если взять числа быстро растущей числовой последовательности, то большее число будет больше суммы двух меньших, например, если взять члены геометрической прогрессии 1;10;100;1000;10000;100000;1000000,.... то неравенство треугольника не выполняется и *треугольной тройки нет.*

Б)Пусть для определённости $a<b<c<d; a,b,c,d\in N$, для них можно записать только четыре уравнения Пифагора: $\begin{cases} a^2+b^2=c^2 \\ b^2+c^2=d^2 \\ a^2+c^2=d^2 \\ a^2+b^2=d^2 \end{cases}$.Из этих уравнений путём вычёркивания поочерёдно первого, второго, третьего, четвёртого уравнений можно получить все четыре системы относительно *трёх прямоугольных троек:*

1)$\begin{cases} b^2+c^2=d^2 \\ a^2+c^2=d^2 \\ a^2+b^2=d^2 \end{cases}$ 2)$\begin{cases} a^2+b^2=c^2 \\ a^2+c^2=d^2 \\ a^2+b^2=d^2 \end{cases}$ 3)$\begin{cases} a^2+b^2=c^2 \\ b^2+c^2=d^2 \\ a^2+b^2=d^2 \end{cases}$ 4)$\begin{cases} a^2+b^2=c^2 \\ b^2+c^2=d^2 \\ a^2+c^2=d^2 \end{cases}$.Ни одна из систем не имеет решений на множестве различных натуральных чисел. Это легко показать, вычитая из одного уравнения системы другое уравнение.

7.19.(Я.2021.В.2.19).Будем называть три числа *треугольной тройкой*, если они могут быть длинами сторон треугольника. Будем называть три числа *прямоугольной тройкой*, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника. А) Может ли среди 9 различных натуральных чисел не быть ни одной *треугольной тройки*? Б) Может ли среди 4 различных натуральных чисел быть три *прямоугольные тройки? Отв. а)да; б)нет.*

Б38. Задача нахождения целых решений диофантовых уравнений с двумя и более неизвестными различного вида (например, содержащих неизвестную под знаком показательной функции, под знаком корня). Способы действий: рассуждение по выбранному модулю, применение арифметики остатков, использование периодичности чередования остатков, бинома Ньютона.

8.1. Решите в натуральных числах уравнение а) $2^x-3^y=1$. Исп. БЗ№1,8.

8.2. **Решите в натуральных числах уравнение** $5^x-3^y=2$. Решение. 1) Используем *метод крайнего*: при y=1 получаем x=1. Пусть $y\geq 2$, тогда уравнение перепишем в виде $5^x-2=3^y$ или $5^x=2(\mathrm{mod}\,9)$. 2) Исследуем остатки при делении степеней пятёрки на 9, последовательно получаем: 5=5(mod9); 25=7(mod9); 125=8(mod9); 625=4(mod9); 3125=2(mod9); 15625=1 (mod9); 78125=5(mod9);остатки повторяются с периодом 6. Случай $5^x=2(\mathrm{mod}\,9)$ возможен только при x=6k+5. 3) Уравнение принимает вид: $5^{6k+5}-2=3^y$. Проверим ещё раз, что левая часть уравнения делится на 9: $5^{6k+5}=3125\cdot(15625)^k=3125\cdot(9a+1)=9b+2$. 4) Покажем теперь, что левая часть уравнения при делении на 7 даёт в остатке 1 : $5^{6k+5}-2=5^5(5^{6k}-1)+5^5-2=3125(15625^k-1)+3123=7c+446\cdot 7+1=7d+1$. Заметим, что (15625^k-1)делится на 7, так как разность оснований делится на 7. 5) Но 3^y=1(mod7) только при y=6m. Покажем это: 3=3(mod7); 9=2(mod7); 27=6(mod7); 81=4(mod7); 243=5(mod7); 729=1(mod7); 2189=3(mod7); остатки повторяются с периодом 6. Случай 3^y=1(mod7) возможен только при y=6m. 6) Уравнение принимает вид: $5^{6k+5}-2=3^{6m}$; *или* $5^{6k+5}-3=3^{6m}-1$. Заметим, что правая часть уравнения делится на 13, поскольку разность оснований $3^6-1=13\cdot 56$ делится на 13. 7) Исследуем делимость на 13 левой части уравнения. Остатки при делении степеней пятёрки на 13 будут 5, 12, 8, 1, 5, действительно:
5=5(mod13); 25=12(mod13); 125=1(mod13); 3125=5(mod13); остатки повторяются с периодом 4 и среди них нет 3, следовательно, левая часть уравнения не делится на 13. Противоречие означает, что корней при $y\geq 2$ нет. Ответ: y=1,x=1. Исп. БЗ№1,8.

8.3. Решите в натуральных числах уравнение $3^m+4^n=5^k$.

Решение. Исследуем закономерности появления остатков при делении степеней тройки, четвёрки и пятёрки на 3, 4, 5. Для удобства результаты поместим в таблицу.

N	3^N	Остаток при делении на 4	Остаток при делении 5	4^N	Остаток при делении 3	Остаток при делении 5	5^N	Остаток при делении 3	Остаток при делении 4
	3	3	3	**4**	1	4	**5**	2	1
	9	1	4	**16**	1	1	**25**	1	1
	27	3	2	**64**	1	4	**125**	2	1
	81	1	1	**256**	1	1	**625**	1	1
	243	3	3	**1024**	1	4	**3125**	2	1
	729	1	4	**4096**	1	1	**15625**	1	1

При делении на 3 левая и правая части уравнения дают одинаковые остатки, равные 1, только при чётных показателях степеней четвёрки и пятёрки, т.е. необходимо $k = 2k_1$, $n = 2n_1$.

Необходимо, чтобы при делении на 4 левая и правая части уравнения давали одинаковые остатки, равные 1, что возможно только при чётном m, т.е. $m = 2m_1$.

Уравнение принимает вид: $3^{2m_1} + 2^{2n_1} = 5^{2k_1}$ или $(3^{m_1})^2 + (2^{n_1})^2 = (5^{k_1})^2$. Известно (актуализация старых знаний), что, если взаимно простые числа x, y, z образуют пифагорову тройку $x^2+y^2=z^2$, то одно из чисел x или y – чётное, одно из чисел x,y или z – делится на пять и существуют такие взаимно простые натуральные числа p, q разной чётности, что $x = p^2 - q^2;\quad y = 2pq;\quad z = p^2 + q^2.$

Так как p и q разной чётности, то $3^{m_1} = p^2 - q^2;\quad 2^n = 2pq;\quad 5^{k_1} = p^2 + q^2$, причём, $p \neq 1$, т.к. тогда $3^{m_1} < 0$, следовательно, q=1, тогда $3^{m_1} = p^2 - 1;\quad 2^n = 2p;\quad 5^{k_1} = p^2 + 1.$

Исключая из первого и третьего уравнений параметр p, получим $5^{k_1} - 3^{m_1} = 2.$ Решение этого уравнения было получено в примере 25, оно имеет единственное решение 1;1, следовательно, m=2, k=2,n=2 единственное решение исходного уравнения. Исп. БЗ№1,8.

8.4. Решите в натуральных числах уравнение $2^a + 3^b = 5^c$. Ответ: a=1; b=1; c=1 и a=4;=2; c=2.

8.5. Решите в целых числах уравнение $m \cdot n^2 = 10^5 \cdot n + m$.

Решение. 1) *Преобразуем* уравнение к виду $m(n^2 - 1) = 10^5 \cdot n$. 2) Рассмотрим *частный случай*: при m=0 получаем n=0, т.е. (0,0) – решение уравнения. 3) Проанализируем *свойства* уравнения: если пара (m;n) является решением, то пара (-m;-n) – тоже. Уравнение чётно по совокупности переменных. Ограничимся рассмотрением положительных m,n. Пары с разными знаками m,n невозможны. 4) $m > 0, n > 0 \Rightarrow n \neq 1 \Rightarrow n \geq 2, m > 0.$ 5)Так как левая часть уравнения $m(n-1)(n+1) = 10^5 \cdot n$ делится на n, но ни одна из скобок на n не делится, то $m \vdots n \Rightarrow m = p \cdot n,\quad n \in N.$ 6) Уравнение принимает вид: $pn(n-1)(n+1) = 10^5 \cdot n \Leftrightarrow p(n-1)(n+1) = 10^5.$ 7)Если n чётное, то $(n-1)(n+1)$ два подряд идущих нечётных числа, но среди делителей $10^5 = 2^5 5^5$ нет двух подряд идущих нечётных чисел. Итак, n -нечётное число. 8) Так как $10^5 = 2^5 5^5$ имеет 36 делителей, то диофантово уравнние п.6 равносильно совокупности 36 систем, они имеют два решения: n=3, p=12500,тогда m=pn=37500; n=9, p=1250,тогда m=pn=11250. 9)В силу чётности уравнения решениями будут и пары n=-3; m=-37500; n=-9; m=-11250. **Ответ**: (0,0), (3,37500), (-3,-37500), (9,11250), (-9,-11250). Замечание. В пункте 8 можно было сделать перебор по n, заметив, что необходимо, чтобы $n \in \{3;5;7;\dots 143\}$, т.к. при $n \geq 145$ получаем p<5, что невозможно. Использованы БЗ№1,2,5.

8.6. Решите $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{108}$ в целых числах уравнение .

ММЗ: $0 \leq x, y \leq 108; y = x + 108 - 12\sqrt{3x}$. Если x,y-целые, то $\sqrt{3x}$ должно быть целым. Это возможно только тогда, когда $\begin{cases} x = 3n^2; \quad n \in \{0;1;2;3;4;5;6\}; \\ y = x + 108 - 12\sqrt{3x} = 3n^2 + 108 - 36n; \end{cases}$ Получаем 7 решений уравнения: $(0;108); (3;75); (12;48); (27;27); (48;12); (75;3); (108;0).$

8.7. Сколько целочисленных решений имеет уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{490}$? Выпишите их.

Ответ: 8 решений.

8.8. Сколько целочисленных решений имеет уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2016}$? Выпишите их.

Ответ: 13 решений.

8.9. Сколько целочисленных решений имеет уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}$? Выпишите их.

Ответ: 15 решений.

8.10. Сколько целочисленных решений имеет уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2023}$? Выпишите их.

Ответ: 5 решений.

БЗ9. Задача нахождения сумм различных числовых последовательностей (суммы первых степеней первых n натуральных чисел, суммы вторых, третьих степеней первых n натуральных чисел, суммы прогрессий, суммирование дробей различного рода, обращение периодических дробей в рациональную дробь). Способы действий: применение аппарата прогрессий, уравнений, метода математической индукции, составление и решение рекуррентных соотношений (в том числе с использование характеристических уравнений).

9.1. **Верно ли, что ($1^3+2^3+3^3+...+2019^3$) ⋮ (1+2+3+...+2019)?** Решение. Осуществляя эвристический поиск и проводя численные эксперименты, выдвигаем гипотезу, что ($1^3+2^3+3^3+...+n^3$)=$(1+2+3+...+n)^2$. Методом математической индукции доказываем выдвинутую гипотезу и получаем формулу ($1^3+2^3+3^3+...+n^3$)=$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

. Найдём частное $\frac{1^3+2^3+3^3+..n^3}{1+2+3+..n}=\frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{n(n+1)}{2}$, оно является целым числом, т.к. в числителе стоит чётное число, поскольку произведение двух подряд идущих натуральных чисел, чётно. Ответ: делится. Использованы БЗ 9, 1.

9.2. (Я2020,В19.19). На доске были написаны 20 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?

б)Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?

в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического оставшихся на доске чисел. Отв. а)да б)нет в) $38\frac{1}{7}$

Решение. Проведём численный эксперимент, рассмотрим частные случаи: если все исходные числа равны 1, т.е. $x_1=x_2=x_3=...=x_{20}=1\Rightarrow x_{среднее}=\frac{1+1+...+1}{20}=1$, а если $x_1=x_2=x_3=...=x_{20}=40\Rightarrow x_{среднее}=\frac{40+40+...+40}{20}=40$, если x_i –любые другие, то $x_{среднее}\in(1;40)$.

После вычитания единиц (возможно, из одного числа) $x_{среднее\ \ новое}\in[0;39,95]$.

Заметим, что, если среди x_i есть несколько 1, то после вычитания 1 из них и стирания 0 количество чисел уменьшится, знаменатель дроби уменьшится, новое среднее может возрасти. Рассмотрим примеры.

Исходный набор чисел $x_1=x_2=x_3=...=x_{19}=40; x_{20}=1\Rightarrow x_{среднее}=\frac{40+40+...+1}{20}=38{,}05$.

Новый набор чисел $x_1=x_2=x_3=...=x_{19}=40; x_{20}=0\Rightarrow x_{среднее}=\frac{40+40+...+40}{19}=40$. Количество примеров можно умножить, если вместо 40 подставлять числа 2,3,…39, или вместо одной 1 брать их большее количество. Ответ: да, см. примеры.

Б)По условию $x_{среднее}=\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_{20}}{20}=27\Rightarrow x_1+x_2+x_3+...+x_{20}=540$. Допустим, что $x_{среднее\ \ новое}=34$, значит, было некоторое количество единиц (обозначим это количество через k), превратившиеся в 0 и стёртые после этого. Значит, сумма нового набора чисел уменьшилась на k и стала равной 540-k, количество слагаемых в новом наборе уменьшилась на k и стало равно 20-k. Тогда новое среднее $x_{среднее\ \ новое}=\frac{540-k}{20-k}=34 \Leftrightarrow 540-k=680-34k \Leftrightarrow 33k=140 \Leftrightarrow k=\frac{140}{33}\notin N \Leftrightarrow \varnothing$.Математическая модель привела к противоречию, источник которого в предположении что $x_{среднее\ \ новое}=34$, следовательно, гипотеза не нашла своего подтверждения и должна быть отвергнута. Ответ: нет.

В) Требуется найти максимум функции от k $x_{среднее\ новое}=\frac{540-k}{20-k}$. Если не использовать производную для исследования функции, можно построить график гиперболы $y=\frac{540-x}{20-x}=\frac{x-540}{x-20}=\frac{x-20-520}{x-20}=1-\frac{520}{x-20}$ методом деформаций и сдвигов, горизонтальная асимптота y=1, вертикальная x=20. На интервале $x\in(0;20)$ функция возрастает до $+\infty$, у нас недостаточно информации. Проблема в том, что не учтена информация $x_{среднее\ \ новое}\in[0;39{,}95]\Leftrightarrow\frac{540-k}{20-k}\in[0;39{,}95]$. Решая двойное неравенство $0\le\frac{540-k}{20-k}\le 39{,}95$ методом интервалов, получим дополнительное ограничение на аргумент функции $1\le k\le 6{,}6\Leftrightarrow k\in\{1;2;3;4;5;6\}$. Функция $x_{среднее\ \ новое}=\frac{540-k}{20-k}$ возрастает на множестве $k\in\{1;2;3;4;5;6\}$, значит наибольшее значение принимает при k=6, $\max x_{среднее\ \ новое}=\frac{540-6}{20-6}=\frac{534}{14}=38\frac{1}{7}$. Ответ: $38\frac{1}{7}$.

9.3. (ЕГЭ 2017). На доске было написано 30 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых больше 10, но не превосходит 50. Среднее арифметическое написанных чисел равно17. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 6, с доски стёрли. а)Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 19? б)Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 17, но меньше 18? в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического оставшихся на доске чисел. Отв. а)да б)нет в)23,5.

9.4. На интерактивной доске светятся числа 1; $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\frac{1}{9},\frac{1}{10},\frac{1}{11},\frac{1}{12}$**.**

А)Докажите, что при любой расстановке знаков «+» или «-» между этими числами вместо запятых полученная сумма не будет равна нулю.

Б)Можно ли, стерев некоторое количество чисел, так расставить перед оставшимися числами знаки «+» или «-», чтобы полученная сумма равнялась нулю? Ответ обоснуйте.

В) Какое наименьшее количество написанных чисел необходимо стереть, чтобы после некоторой расстановки знаков «+» или «-» перед оставшимися числами получилась сумма, равная нулю?

Отв:а)при любой расстановке знаков после приведения к общему знаменателю всех дробей в числителе получится алгебраическая сумма одного нечётного и нескольких чётных чисел; нечётное число не равно нулю. Б)например $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=0$ и др. В)6.

9.5. А) Найдите сумму чисел $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\ldots+\frac{1}{10712}-\frac{25}{104}$**.**

Б)Даны числа $\frac{1}{4\cdot5},\frac{1}{5\cdot6},\frac{1}{6\cdot7},\frac{1}{7\cdot8},\ldots,\frac{1}{(n+3)\cdot(n+4)},\frac{n}{4n+16}$; $n\in N$. Докажите, что существует такая расстановка знаков «+» или «-», что полученная сумма будет равна нулю.

Отв: а)0; б)все, кроме последнего «плюсы», последний «минус».

9.6. А)Найдите сумму чисел $\frac{7}{1\cdot 8}+\frac{7}{8\cdot 15}+\frac{7}{15\cdot 22}+...+\frac{7}{(7n-6)(7n+1)}+\frac{1}{7n+1}$, $n\in N$

Б)Даны числа $\frac{7}{8},\frac{7}{120},\frac{7}{330},\frac{7}{638},...,\frac{7}{486494},\frac{1}{701},1$. Докажите, что существует такая расстановка знаков «+» или «-», что полученная сумма будет равна нулю.

Отв:а)1; б)все, кроме последнего «плюсы», последний «минус».

9.7. А) Найдите сумму чисел $1+4+9+...+4048144$.

Б)Даны числа $1,\quad 4,\quad 9,...,\quad 4052169,\quad 2722383213$. Докажите, что существует такая расстановка знаков «+» или «-», что полученная сумма будет равна нулю.

Отв: а)2716979650; б)все, кроме последнего «плюсы», последний «минус».

9.8. А)Число 2012 представьте в виде суммы 62 попарно различных натуральных слагаемых.

Б) Можно ли число 2012 представить в виде суммы 63 попарно различных натуральных слагаемых.

В) Натуральное число N представлено в виде суммы нескольких натуральных слагаемых. Найдите наибольшее возможное количество слагаемых в таком представлении.

Отв: а) да, например, $1+2+3+...61+121$;б) нет, т.к. $a_1+a_2+a_3+...a_{63}\geq 2016$; в) наибольшее возможное количество слагаемых в таком представлении равно $k_{\max}=\left[\frac{\sqrt{8N+1}-1}{2}\right]$, где $[x]$ целая часть числа x.

9.9. А) Число 1955 представьте в виде суммы 62 попарно различных натуральных слагаемых.

Б) Можно ли число 1955 представить в виде суммы 63 попарно различных натуральных слагаемых.

В) Натуральное число N представлено в виде суммы нескольких натуральных слагаемых. Найдите наибольшее возможное количество слагаемых в таком представлении.

Отв: а) да, например, $1+2+3+...61+64$;б) нет, т.к. $a_1+a_2+a_3+...a_{63}\geq 2016>1955$; в) наибольшее возможное количество слагаемых в таком представлении равно $k_{\max}=\left[\frac{\sqrt{8N+1}-1}{2}\right]$, где $[x]$ целая часть числа x.

9.10. А) Возможно ли число 5047 представить в виде суммы $k+(k+1)+(k+2)+...+(k+l),k,l\in N$ **чисел некоторого отрезка натурального ряда?**

Б) Возможно ли число 5039 представить в виде суммы $k+(k+1)+(k+2)+...+(k+l),k,l\in N$ чисел некоторого отрезка натурального ряда?

В) Укажите два числа, бо́льшие, чем 5000, которые нельзя представить в указанном виде.

Отв: а) например, $3+4+5+...+100=5047$;б) нет; в)например, 5034, 5036.

9.11. А) Возможно ли число 2012 представить в виде суммы $k+(k+1)+(k+2)+...+(k+l),k,l\in N$ **чисел некоторого отрезка натурального ряда?**

Б) Возможно ли число 2013 представить в виде суммы $k+(k+1)+(k+2)+...+(k+l),k,l\in N$ чисел некоторого отрезка натурального ряда?

В) Укажите два числа, бо́льшие, чем 3000, которые нельзя представить в указанном виде.

Отв: а) нет; б) например, $3+4+5+...+63=2013$;в)например, 3001, 3078.

9.12. **(Я2019,В13.19). Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 15 раз больше, либо в 15 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3825. а)Может ли последовательность состоять из двух членов? б) Может ли последовательность состоять из трёх членов? в)Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности? Отв. а)нет; б) да**

(225;3375;225); в)479. **Решение.** Имеем рекуррентно заданную последовательность:
$$x_1;\quad x_2=\left[\begin{array}{l}15x_1;\\ \dfrac{x_1}{15};\end{array}\right.;\ldots x_{n+1}=\left[\begin{array}{l}15x_n;\\ \dfrac{x_n}{15};\end{array}\right.;\ldots$$

А) Если последовательность состоит из двух членов, мат.модель состоит из совокупности двух уравнений: $\left[\begin{array}{l}x_1+15x_1=3825;\\ x_1+\dfrac{x_1}{15}=3825;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}16x_1=3825;\Leftrightarrow\varnothing\\ 16x_1=15\cdot3825;\Leftrightarrow\varnothing\end{array}\right.$, натуральных решений нет, т.к.левая часть чётна, а правая нечётна, равенства быть не может. Отв.нет.

Б) Графически разветвляющийся граф для трёх членов последовательности можно представить в виде дерева, разветвляющегося сверху - вниз, но можно и в виде графа, разветвляющегося слева-направо.

<table>
<tr><td colspan="4" align="center">x_1</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">$\dfrac{x_1}{15}$</td><td colspan="2" align="center">$15x_1$</td></tr>
<tr><td align="center">$\dfrac{x_1}{225}$</td><td align="center">x_1</td><td align="center">x_1</td><td align="center">$225x_1$</td></tr>
</table>

Если последовательность состоит из трёх членов, мат.модель состоит из совокупности трёх уравнений:
$$\left[\begin{array}{l}x_1+15x_1+225x_1=3825\\ x_1+15x_1+x_1=3825\\ x_1+\dfrac{x_1}{15}+x_1=3825\\ x_1+\dfrac{x_1}{15}+\dfrac{x_1}{225}=3825;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}241x_1=3825\Leftrightarrow\varnothing\\ 17x_1=3825\Leftrightarrow x_1=225\\ 31x_1=3825\cdot15\Leftrightarrow\varnothing\\ 241x_1=225\cdot3825\Leftrightarrow\varnothing\end{array}\right.$$
.Итак, $x_1=225; x_2=3375; x_3=225;$ -искомая последовательность. Отв.да.

В)При фиксированной сумме членов последовательности, наибольшее количество членов будет при минимально возможных по величине членах (чем меньше слагаемые, тем из больше). Анализируя граф, видим, что если двигаться по правой подпоследовательности, то через 2-3 шага мы достигнем максимальных значений x_i и дальнейшее движение будет невозможно. Если двигаться по левой подпоследовательности, то через 2-3 шага мы достигнем минимальных значений x_i, они перестанут быть натуральными и дальнейшее движение будет невозможно. Крайние случаи возрастающей, а также, убывающей последовательностей отвергаем. Воспользуемся немонотонными, периодичесими последовательностями $x_1;\ 15x_1;\ x_1;\ 15x_1;\ldots$ или $x_1;\ \dfrac{x_1}{15};\ x_1;\ \dfrac{x_1}{15};\ldots$.Минимальная сумма пары x_1+15x_1 равна 16 и достигается при $x_1=1$; минимальная сумма пары $x_1+\dfrac{x_1}{15}$ равна 16 и достигается при $x_1=15$. Если объединить члены последовательности в такие пары, учесть, что $3825=16\cdot239+1$ (Б.З.№1), т.е. последовательность гарантированно содержит $2\cdot239=478$ членов и плюс 479-ый последний член, равный 1. Таким образом, последовательность: 1,15,1,15,…,15,1, из 479 чисел является искомой с наибольшим количеством членов. Отв. 479.

9.13. **(Л2020,В7.19). Последовательность x_n состоит из 100 натуральных чисел. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 2 раз меньше, либо на 150 больше предыдущего. а) Может ли такая последовательность быть образована ровно пятью различными числами? б) Чему может равняться x_{100}, если $x_1=75$? в) Какое наименьшее значение может**

принимать самое большое число в такой последовательности? Отв. а) да, существует 14 таких чисел $x_1 \in \{10;20;40;80;160;200;300;400;500;600;650;750;900;1050\}$, при которых подпоследовательности такого типа являются периодическими с периодом 5, т.е. $x_1 = x_6 = x_{11} = \ldots$; б) $x_{100} = 75 + 150(100-1) = 75 \cdot 199 = 14925$; в)160.

Решение. Имеем рекуррентно заданную последовательность: x_1; $x_2 = \left[\begin{array}{l} x_1 + 150; \\ \frac{x_1}{2}; \end{array}\right.$;...; $x_{n+1} = \left[\begin{array}{l} x_n + 150; \\ \frac{x_n}{2}; \end{array}\right.$;...

а) Визуально разветвляющийся граф для четырёх членов последовательности можно представить в виде дерева, разветвляющегося сверху-вниз, но можно и в виде графа, разветвляющегося слева-направо.

<table>
<tr><td colspan="8" align="center">x_1</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">$\frac{x_1}{2}$</td><td colspan="4" align="center">$x_1 + 150$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">$\frac{x_1}{4}$</td><td colspan="2" align="center">$\frac{x_1}{2} + 150$</td><td colspan="2" align="center">$\frac{x_1 + 150}{2}$</td><td colspan="2" align="center">$x_1 + 300$</td></tr>
<tr><td>$\frac{x_1}{8}$</td><td>$\frac{x_1}{4} + 150$</td><td>$\frac{x_1}{4} + 75$</td><td>$\frac{x_1}{2} + 300$</td><td>$\frac{x_1 + 150}{4}$</td><td>$\frac{x_1}{2} + 225$</td><td>$\frac{x_1}{2} + 150$</td><td>$x_1 + 450$</td></tr>
</table>

Фактически в таблице представлены начала 8 подпоследовательностей недостроенного графа. Достройте самостоятельно 5 и 6-ой уровни графа, получите 32 возможных значения шестого члена последовательности x_6, в таблице даны **некоторые из них**:

$x_1 + 750$	$\frac{x_1 + 600}{2}$	$\frac{x_1 + 450}{2} + 150$	...	$\frac{x_1 + 150}{2} + 450$	$\frac{x_1 + 150}{16}$	$\frac{x_1 + 300}{16}$	$\frac{x_1}{16} + 150$

Перед нами стоит задача обойтись пятью различными числами для задания последовательности, для этого приравняем первый и шестые члены последовательности;

$x_1 + 750 = = x_1$	$\frac{x_1 + 600}{2} = = x_1$	$\frac{x_1 + 450}{2} + 150 = = x_1$	$\frac{x_1 + 150}{2} + 450 = x_1$	$\frac{x_1 + 150}{16} = x_1$	$\frac{x_1 + 300}{16} = x_1$	$\frac{x_1}{16} + 150 = x_1$
$\varnothing$	600	750	1050	10	20	160

решив соответствующие уравнения найдём те значения x_1, при которых в последовательности будут периодически повторяться только пять числовых значений. Все найденные значения выпишем в **Ответ:** при $x_1 \in \{10;20;40;80;160;200;300;400;500;600;650;750;900;1050\}$ соответствующие последовательности образованы ровно пятью числами.

Б) Если в рекуррентно заданной последовательности первый член нечётный: $x_1 = 75$ последовательность имеет вид: 75; $x_2 = \left[\begin{array}{l} 75 + 150; \\ \frac{75}{2}; \end{array}\right.$;...; $x_{n+1} = \left[\begin{array}{l} x_n + 150; \\ \frac{x_n}{2}; \end{array}\right.$;... то деления на 2 никогда не будет (нечётное плюс чётное равно нечётному; деление на два невозможно на множестве натуральных чисел) и $x_n = 75 + 150(n-1)$, т.е.все члены последовательности вычисляются по формуле арифметической прогрессии (по самой правой ветви изображённого графа). $x_n = 75 + 150(n-1) \Rightarrow x_{100} = 75 + 150(100-1) = 75 \cdot 199 = 14925.$ Отв. 14925.

В)Анализ последовательностей, входящих в разветвляющийся граф, позволяет выделить самую быстро возрастающую последовательность $x_n = 75 + 150(n-1)$ и самую быстро убывающую последователльность $x_n = \frac{x_1}{2^{n-1}}$. Наибольшее значение в каждой из 2^n подпоследовательностей получается после прибавления 150, но не после деления на2. Поэтому из всех максимумов наименьшим будет тот и в той подпоследовательности, в которой меньше (или вообще нет) сложений с 150. В нашем случае это будет тот из 32 вариантов x_6, который получен на предпоследней левой цепочке графа: $\frac{x_1}{16}+150;$ в этой траектории всего одна операция прибавления 150 и именно из уравнения $\frac{x_1}{16}+150 = x_1$ получено значение $x_1 = 160$. Проверка показывает, что в подпоследовательности 160,80,40,20,10,160,…наибольший член 160 является наименьшим из всех наибольших членов подпоследовательностей. Отв. 160.

9.14. **(Л2020,В8.19). Последовательность x_n состоит из 100 натуральных чисел. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 4 раз меньше, либо на 420 больше предыдущего. а)Может ли такая последовательность быть образована ровно четырьмя различными числами? б) Чему может равняться x_{100}, если $x_1 = 78$? в) Какое наименьшее значение может принимать самое большое число в такой последовательности? Отв. а)да,** $x_1 \in \{224;56;476;896;448;112;28\}$;б) 41658; в)448.

*9.15.***Является сумма чисел $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{1000}$ целым числом?**

Ответ обоснуйте. *Подсказка: рассмотрите дробь* $\frac{1}{512}$.

9.16. **Является сумма чисел $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{1000000}$ целым числом?**

Ответ обоснуйте. ***Подсказка:*** *рассмотрите дробь* $\frac{1}{524288}$.

9.17. **При каких натуральных n сумма чисел $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}$ является целым числом?**

Ответ обоснуйте.

9.18. (Я.2014). В ряд выписаны числа: $1^2;2^2;3^2;4^2;\ldots(n-1)^2;n^2$. **Между ними произвольным образом расставляют знаки «+» или «-» и находят получившуюся сумму. Может ли такая сумма равняться:**

а)8, если n=8? Б) 0, если n=90? в)0, если n=56? г)-4, если n=75? Ответ: а)да; б)нет; в)да; г)да. ***Подсказка***: докажите справедливость формулы: $(n+3)^2-(n+2)^2-(n+1)^2+(n)^2=4$

9.17.(ЕГЭ2018). А) Представьте число $\frac{3{,}3}{10}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых – единицы, а знаменатели – попарно различные натуральные числа.

Б) **Представьте число** $\frac{15}{91}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых – единицы, а знаменатели – попарно различные натуральные числа.

В) Найдите все пары натуральных чисел m и n, для которых $m \le n;$ $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{14}$.

Решение а).Представим числитель дроби в виде суммы степеней простых чисел из разложения знаменателя по третьей базовой задаче БЗ№3:
$$\frac{3{,}3}{10}=\frac{33}{100}=\frac{25+5+1+2}{2^2\cdot5^2}=\frac{25}{2^2\cdot5^2}+\frac{5}{2^2\cdot5^2}+\frac{1}{2^2\cdot5^2}+\frac{2}{2^2\cdot5^2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2\cdot5}+\frac{1}{2^2\cdot5^2}+\frac{1}{2\cdot5^2}.$$

Другое разложение данной дроби в сумму дробей с числителями, равными единице (древние египтяне называли такие дроби *аликвотными*, сохранились папирусы и глиняные таблички с *таблицами аликвотных дробей*) можно получить, ***домножив каждую или некоторые из полученных дробей на единицу,*** записанную в виде: $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$. Это своеобразный аналог тригонометрической единицы.

Решение_б).
$$\frac{15}{91}=\frac{13+2}{7\cdot13}=\frac{1}{7}+\frac{2}{7\cdot13}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{7}+\frac{1}{7\cdot13}+\frac{2}{3\cdot7\cdot13}+\frac{1}{3\cdot7\cdot13}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7\cdot13}+\frac{1}{7\cdot13}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right),$$

$$\frac{15}{91}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7\cdot13}+\frac{1}{7\cdot13}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{7}+\frac{1}{7\cdot13}+\frac{1}{2\cdot7\cdot13}+\frac{1}{3\cdot7\cdot13}+\frac{1}{6\cdot7\cdot13}.$$

Решение в). Выразим одну натуральную неизвестную через другую: $m\le n;\quad \frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{14}\Leftrightarrow n=\frac{14m}{m-14}=\frac{14(m-14)+196}{m-14}=14+\frac{196}{m-14}$. Число n будет целым тогда и только тогда, когда целым будет дробь $\frac{196}{m-14}$, значит, $196\vdots(m-14)\Leftrightarrow(m-14)\in\{\pm1;\pm2;\pm4;\pm7;\pm14;\pm49;\pm98;\pm196\}$,в скобках перечислены все делители 196. Проверим все эти варианты; в последнем столбце запишем ответ: пять решений.

$(m-14)=\pm1$	$m=15\vee m=13$	$n=210$	Проверка условия $m\le n;\quad m,n\in N\Rightarrow$	$m=15;n=210$
$(m-14)=\pm2$	$m=16\vee m=12$	$n=112$	$\Rightarrow$	$m=16;n=112$
$(m-14)=\pm4$	$m=18\vee m=10$	$n=63$	$\Rightarrow$	$m=18;n=63$
$(m-14)=\pm7$	$m=21\vee m=7$	$n=42$	$\Rightarrow$	$m=21;n=42$
$(m-14)=\pm14$	$m=28\vee m=0$	$n=28$	$\Rightarrow$	$m=28;n=28$
$(m-14)=\pm49$	$m=63$	$n=18$	Не выполняется	
$(m-14)=\pm98$	$m=112$	$n=16$	Не выполняется	
$(m-14)=\pm196$	$m=210$	$n=15$	Не выполняется	

9.18. Решите уравнение в натуральных числах $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{25}$, при условии, что a>b.

Решение. Выразим одну переменную через другую $a=25+\frac{625}{b-25}$, по условию a, b – целые, тогда необходимо, чтобы дробь принимала целые значения, т.е. b-25 должно быть делителем 625, $(b-25)\in\{\pm1;\pm5;\pm25;\pm125;\pm625\}$. Решим соответствующие линейные уравнения, учтём, что натуральные числа таковы, что a>b, получим ответ: a=150,b=30; a=650, b=26. Исп. Б.З.1,2.

9.19. Решите уравнение а) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{8}$ в натуральных числах, при условии, что $a\ge b$.

б) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{3}$ в натуральных числах.

Отв.а) $(16;16),(24;12),(40;10),(27;9)$; б) $(4;12),(6;6),(12;4)$.

9.20. а) Можно ли решить в нечётных натуральных числах уравнение $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$?

Решение. Перепишем уравнение в виде $bcd+acd+abd+abc=abcd$, в левой части равенства стоит сумма четырех нечетных чисел, сумма их четна. В правой части - произведение четырех нечетных чисел, оно нечетно. Равенство невозможно. Исп. Б.З.1.

б) Решите в различных натуральных числах уравнение $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Сколько решений имеет уравнение? *Решение.* Рассмотрим первый случай: 1)все искомые числа совпадают: a=b=c, тогда $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1\Leftrightarrow\frac{3}{c}=1\Leftrightarrow c=3=a=b.$ 2)Пусть два искомых числа совпадают, например, $a=b$, тогда $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=1\Leftrightarrow\frac{1}{c}=1-\frac{2}{a}$; $\frac{1}{c}=1-\frac{2}{a}\Leftrightarrow\frac{1}{c}=\frac{a-2}{a}\Leftrightarrow c=\frac{a}{a-2}\Leftrightarrow c=\frac{a-2+2}{a-2}=1+\frac{2}{a-2}$, последняя дробь является целым числом только при $(a-2)\in\{1;2\}\Leftrightarrow a\in\{3;4\}$. Тогда $a=b=c=3$или $a=b=4;\ c=2$. Использован приём сведения новой модифицированной задачи к уже знакомой (ЗЗ-МЗ-НЗ). Решение (4;4;2) допускает три различные перестановки найденных чисел. 3)Продолжим поиск различных натуральных решений исходного уравнения. Натуральные числа a,b,c , удовлетворяющие уравнению, не могут быть равными 1, а вот 2 могут. Используя принцип крайнего, изучим эту возможность: пусть a=2, тогда $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1\Leftrightarrow\frac{1}{c}=\frac{1}{2}-\frac{1}{b}\Leftrightarrow c=\frac{2b}{b-2}\Leftrightarrow c=\frac{2(b-2)+4}{b-2}=2+\frac{4}{b-2}$, последняя дробь является целым числом только при $(b-2)\in\{1;2;4\}\Leftrightarrow b\in\{3;4;6\}$. Тогда $a=2;b=3;c=6$; или $a=2;b=4;\ c=4;$ или $a=2;b=6;c=3$. Из полученных решений новым является (2;3;6) и все его перестановки (которых 3!=6). Почему нет других решений? Обоснуем это так: пусть $a\le b\le c\Rightarrow\frac{1}{c}\le\frac{1}{b}\le\frac{1}{a}\le\frac{1}{3}\Rightarrow$ $1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{3}{a}\Rightarrow a\le 3$. Но все случаи $a\le 3$уже рассмотрены. Ответ: (3;3;3), (4;4;2), (2;3;6) и все возможные перестановки этих чисел.

в) Можно ли решить в натуральных числах уравнение $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$? *Подсказка: используйте приём домножения на единицу.*

Решение. Выясним, разрешимо ли уравнение в различных натуральных числах.

Для этого воспользуемся приёмом домножения на единицу, представленную в виде $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$.

Будем поочерёдно домножать дроби на сумму $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)$:

1) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1\Rightarrow\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=1\Rightarrow\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{2}\right)=1\Rightarrow(2;4;6;12)$**-решение.**

Или $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1\Rightarrow\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)=1\Rightarrow\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{3}\right)=1\Rightarrow(3;3;4;12)$**-решение.**

2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{6}=1\Rightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)=1\Rightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\left(\frac{1}{3}\right)=1\Rightarrow(2;3;9;18)$**-решение.**

Или $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{6}=1\Rightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{18}\right)=1\Rightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\left(\frac{3}{18}\right)=1\Rightarrow(2;6;6;6)$**-решение.**

3) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=1\Rightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{36}\right)=1\Rightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{12}\right)=1\Rightarrow(2;3;12;12)$
решение.

Получены **5 различных базовых решений**, из которых перестановками можно получить ещё много (76) производных решений исходного уравнения. Существуют и другие базовые решения, но задачи отыскать их все не ставилось. Этот вопрос нуждается в дальнейшем исследовании. Это задача для молодого математика-исследователя.

Можно, например, предложить следующий план исследования решений уравнения, основанный на варьировании количества искомых различных чисел в четвёрке (тетраде) решения:

1)Пусть все числа в четвёрке совпадают: $a=b=c=d$, тогда решение единственно $(4;4;4;4)$, это шестое найденное нами решение.

3) Пусть три числа $a=b=c$ в четвёрке $a;b;c;d$ совпадают тогда уравнение примет вид $\frac{3}{a}+\frac{1}{d}=1\Leftrightarrow\frac{1}{d}=1-\frac{3}{a}\Leftrightarrow\frac{1}{d}=\frac{a-3}{a}\Leftrightarrow d=\frac{a}{a-3}\Leftrightarrow d=\frac{a-3+3}{a-3}=1+\frac{3}{a-3}$; последняя дробь будет целым числом только при $(a-3)\in\{1;3\}\Leftrightarrow a\in\{4;6\}$. Отсюда две четвёрки: $(4;4;4;4)$ и $(6;6;6;2)$, обе нам уже известны из другого подхода к решению.

3) Пусть два числа $a=b$ в четвёрке $a;b;c;d$ совпадают тогда уравнение примет вид $\frac{2}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1\Leftrightarrow\frac{1}{(a/2)}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$, но все решения уравнения такого типа у нас получены (3;3;3), (4;4;2), (2;3;6) в ранее решённой задаче (ЗЗ) и мы применим её решение в новой, модифицированной ситуации (МЗ). Домножаем одно из чисел триады на два и дублируем его, получим четвёрку-решение исходного уравнения $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$

$(3;3;3)\Rightarrow(6;3;3)\Rightarrow(6;6;3;3)$базовая четвёрка–решение (не считая четвёрок, получающихся из неё перестановкой чисел), это седьмое решение.

$(4;4;2)\Rightarrow(8;4;2)\Rightarrow(8;8;4;2)$базовая четвёрка–решение (не считая четвёрок, получающихся из неё перестановкой чисел), это восьмое решение.

$(4;4;2)\Rightarrow(4;4;4)\Rightarrow(4;4;4;4)$.

$(2;3;6)\Rightarrow(4;3;6)\Rightarrow(4;4;3;6)$базовая четвёрка–решение (не считая четвёрок, получающихся из неё перестановкой чисел), это девятое решение.

$(2;3;6)\Rightarrow(2;6;6)\Rightarrow(2;6;6;6)$.

$(2;3;6)\Rightarrow(2;3;12)\Rightarrow(2;3;12;12)$ базовая четвёрка–решение (не считая четвёрок, получающихся из неё перестановкой чисел), это десятое найденное нами решение.

При сведении уравнения $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$ к уравнению $\frac{1}{(a/2)}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$ предполагалось, что a-чётное число и a/2-натуральное. Но a=b могут быть нечётными, рассмотрим эти возможности: две единицы не могут входить в четвёрку, две тройки уже рассмотрены. Пусть a=b=5, тогда уравнение примет вид $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1\Leftrightarrow\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1\Leftrightarrow\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{3}{5}\Rightarrow d=\frac{5c}{3c-5}=\frac{3c-5+2c+5}{3c-5}=1+\frac{2c+5}{3c-5}$.

Нас интересует, при каких значениях **c** дробь $\frac{2c+5}{3c-5}$ сократима и принимает целочисленные значения. Предположим, что дробь сократима на p>1, тогда $2c+5=pd_1;\quad 3c-5=pd_2;\quad\Rightarrow\frac{2c+5}{3c-5}=\frac{pd_1}{pd_2}==\frac{d_1}{d_2},d_1,d_2\in N$. Заметим, что $3(2c+5)-2(3c-5)=25=3pd_1-2pd_2=p(3d_1-2d_2);\quad\Rightarrow p\in\{5;25\}$, т.к p является делителем 25. Если дробь $\frac{2c+5}{3c-5}$ сократима на 5, то какими являются числа c? Эти числа кратны 5: c=5n. Значит, $d==1+\frac{2c+5}{3c-5}=1+\frac{2\cdot5n+5}{3\cdot5n-5}=1+\frac{2\cdot n+1}{3\cdot n-1}$. Последовательность $\frac{2\cdot n+1}{3\cdot n-1}$ монотонно убывает от $\frac{2\cdot1+1}{3\cdot1-1}=\frac{3}{2}$ до $\frac{2}{3}$ и принимает единственное натуральное значение $\frac{2\cdot2+1}{3\cdot2-1}=\frac{5}{5}=1$ при n=2, тогда c=10, d=2. Следовательно, $(5;5;10;2)$- это одиннадцатое найденное нами решение. При p=25 нет новых решений.

Случай a=b=7,не даёт решений уравнению, т.к. аналогичная последовательность $\frac{2n+7}{5n-7}$ не принимает целочисленных значений. А вот одно из чисел четвёрки может быть 7, действительно, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{7}=1\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{6}{7}\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{36}{42}=\frac{21+14+1}{2\cdot3\cdot7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{42}$, **значит,** $(2;3;7;42)$ **- это двенадцатая базовая четвёрка–решение,** не считая перестановок. Для получения суммы аликвотных дробей был использован приём представления числителя в виде суммы делителей знаменателя. Вероятно, найдя ещё пару-тройку базовых четвёрок-решений, мы приблизимся к полной системе решений. Полнота системы решений требует дальнейшего исследования.

9.23. (ЕГЭ2018). На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 5, а среднее арифметическое шести наибольших из них равно 15.

А) Может ли наименьшее из этих 11 чисел равняться 3?

Б) Может ли среднее арифметическое всех 11 чисел равняться 9?

В) Пусть x_6- шестое по величине число, а $\overline{x}$ - **среднее арифметическое всех 11 чисел. Найдите наибольшее значение выражения** $x_6-\overline{x}$.

Ответ: а)нет; б)нет; в) $\frac{24}{11}$**.** Решение а).Пусть $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5<x_6....x_{11}$- данные натуральные числа, упорядоченные по возрастанию. По условию

$\begin{cases} \dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6}=5, \\ \dfrac{x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}}{6}=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=30, \\ x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}=90 \end{cases}$. Может ли $x_1=3$? Если допустить эту гипотезу, что $x_1=3$, тогда наименьшими написанными числами x_i будут числа: 3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13, но среднее арифметическое первых шести этих чисел равно 33, противоречие. Гипотеза неверна. $x_1=1\vee 2$. Отв.: нет.

Решение б). Проверим гипотезу, что одновременно выполнены три условия: $\begin{cases} \dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6}=5, \\ \dfrac{x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}}{6}=15 \\ \dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4+...+x_{11}}{11}=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=30, \\ x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}=90 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+...+x_{11}=99 \end{cases}$. Складывая первое со вторым, получим: $(x_1+x_2+x_3+x_4+...+x_{11})+x_6=120 \Leftrightarrow x_6=21$, но тогда из первого уравнения следует $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+21=30$, что невозможно даже для наименьших чисел 1,2,3,4,5, т.к. их сумма 15 больше 9. Гипотеза неверна. Ответ: нет.

Решение в). $\max\left(x_6-\bar{x}\right)=\max\left(x_6-\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4+...+x_{11}}{11}\right)-?$ при условиях $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=30,(1)$; $x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}=90$.(2). Складывая последние равенства, получаем: $(x_1+x_2+x_3+x_4+...+x_{11})+x_6=120 \Leftrightarrow \dfrac{120-x_6}{11}=\bar{x}$, тогда $x_6-\bar{x}=x_6-\dfrac{120-x_6}{11}=\dfrac{12(x_6-10)}{11}$.

Задачу переформулируем так: найти $\max(x_6)$при условии (1) и (2). Из уравнения (1) по «принципу крайнего» получаем, что $x_6\le 15$, действительно, при наименьших натуральных числах получаем: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=30,\Rightarrow 1+2+3+4+5+x_6=30 \Rightarrow x_6=15$ или меньше. При $x_6=15$ из (2) получаем: $15+16+17+18+19+20>90$,т.е. $x_6\ne 15$.

Проверим, может ли x_6 быть меньше 15 при соблюдении условия (2)? Если бы $x_6=14$, то из условия (2) по «принципу крайнего» получаем, $14+15+16+17+18+19>90$, т.е. $x_6\ne 14$.

Если бы $x_6=13$, то из условия (2) по «принципу крайнего» получаем, $13+14+15+16+17+18>90$, т.е. $x_6\ne 13$.

Если бы $x_6=12$, то из условия (2) по «принципу крайнего» получаем, $12+13+14+15+16+17<90$, впервые появилась возможность подобрать соответствующие натуральные числа, достаточно, например, заменить 17 на 20, или заменить последние два числа на 17 и 19, чтобы получить 90.

$12+13+14+15+16+20=90$ или $12+13+14+15+17+19=90$.

$\max\left(x_6-\bar{x}\right)=\max\left(\dfrac{12(x_6-10)}{11}\right)=\dfrac{12(12-10)}{11}=\dfrac{24}{11}$.Ответ: $\dfrac{24}{11}$.

9.24. (ЕГЭ2018.В407). На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 6, а среднее арифметическое шести наибольших из них равно 14.

А) Может ли наименьшее из этих 11 чисел равняться 4?

Б) Может ли среднее арифметическое всех 11 чисел равняться 8?

В) Пусть x_6 - шестое по величине число, а $\bar{x}$ - **среднее арифметическое всех 11 чисел. Найдите наибольшее значение выражения** $\bar{x} - x_6$.

Ответ: а)нет; б)нет; в) $\frac{12}{11}$**.**

9.25. (ЕГЭ2017.В419). Каждый из 28 студентов или писал одну из двух контрольных работ или писал обе КР. За каждую работу можно было получить целое число баллов от 0 до 20 баллов включительно. По каждой из двух КР в отдельности средний балл составил 15 баллов. Затем каждый студент назвал наивысший из своих баллов (если он писал одну работу, то он назвал балл за неё). Среднее арифметическое названных баллов оказалось S.

А) Приведите пример, когда S<15.

Б) Могло ли значение S быть равным 5?

В) Какое наименьшее значение могло принимать S, если обе контрольные писали 10 студентов?

Ответ: б) нет; в) $\frac{185}{14}$.

9.26.(Л.2020.В.37.19).Последовательность задана рекуррентным способом $a_1 = 1; a_2 = 2; a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Найдите: а) сумму первых пяти членов этой последовательности; б) a_{100}; в) сумму ста первых членов этой последовательности. Решение этой необычной задачи начнём с численного эксперимента с целью выявления закономерности поведения последовательности. Результаты поместим в таблицу:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	1	2	2	1	0,5	0,5	1	2	2	1	0,5	0,5

Обнаружен период последовательности из шести чисел Т(1;2;2;1;0,5;0,5). Сумма первых пяти членов этой последовательности равна 6,5.

Б)В силу периодичности $a_{100} = a_4 = 1$.

в)Разделив 100 на 6 с остатком 100=6*16+4, увидим, что 100 первых слагаемых состоят из 16 периодов и первых четырёх чисел 17-ого периода, т.е.7*16+6=118. Отв. а)6,5; б)1; в)118.

9.27.(Л.2020.В.38.19).Последовательность задана рекуррентным способом $a_1 = 1; a_2 = 2; a_{n+2} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

Найдите: а) сумму первых пяти членов этой последовательности; б) $\log_2(a_{20})$; в) произведение двадцати первых членов этой последовательности. Отв. а)7,625; б)4181; в) 2^{2585}.

9.28. Что больше $\left(\frac{1}{1917} + \frac{1}{1919} + \frac{1}{1921} + \ldots + \frac{1}{1993} + \frac{1}{1995}\right)$ **или** $\frac{1}{50}$? *Подсказка*: сгруппируйте в скобке первую дробь с последней и т.д., сколько пар получится?

9.29.(Л2014.В10.С6)Для натурального числа n обозначим $\sum(n)$ **сумму всех его натуральных делителей; обозначим** $\sigma(n)$ **сумму всех обратных чисел к делителям числа n. Найдите n в каждом из следующих** случаев: а) $\sum(n) = 14$;

Б) $\sigma(n)=\frac{24}{23}$; в) $\sum(n)=195;\sigma(n)=\frac{65}{24}$. Отв. а)13; б)23; в)72.

9.30.**(Л2014.В4.С6). Даны k ($k\geq 3$) различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию. А)Может ли сумма всех данных чисел быть равной 14? Б)Каково наибольшее значение k, если сумма всех данных чисел меньше 800? В)Найдите все возможные значения k, при которых сумма всех данных чисел равна 123.** Отв. а) нет; б)39; в)3и6.

9.31.Найдите количество 8-значных чисел, состоящих из цифр 1,2,3, в которых первая и последняя, а также любые две соседние цифры различны. Ответ: 130.

9.32. Числа a,b,x,y удовлетворяют уравнениям: $\begin{cases} a+b=23; \\ ax+by=79; \\ ax^2+by^2=217; \\ ax^3+by^3=691. \end{cases}$. **Найдите** $ax^4+by^4=?$

Отв.1993.

9.33. Докажите, что для любого натурального n число $x_n=\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n+\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$ **является целым и нечётным.**

9.34.(Л.2013.В12.С6). Сумма одного или нескольких последовательных натуральных чисел равна 2012. Для каждого случая найдите такие последовательности, укажите наименьшее и наибольшее числа в них.

Решение. Пусть $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+...+(n+k)=2012$, используем формулу суммы арифметической прогрессии $\frac{n+(n+k)}{2}\cdot(k+1)=2012 \Leftrightarrow (2n+k)(k+1)=4024$. Получено основное уравнение задачи. Раскладываем правую часть в произведение двух натуральных множителей

$4024=1\cdot 4024=2\cdot 2012=4\cdot 1006=8\cdot 503=2012\cdot 2=1006\cdot 4=503\cdot 8=4024\cdot 1$, основное уравнение равносильно совокупности шести систем. Однако, только две системы имеет целочисленные решения: $(2n+k)(k+1)=4024 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2n+k=503 \\ k+1=8 \end{cases} \begin{cases} n=248 \\ k=7 \end{cases} \\ \begin{cases} 2n+k=4024 \\ k+1=1 \end{cases} \begin{cases} n=2012 \\ k=0 \end{cases} \end{array}\right.$.

Искомые последовательности натуральных чисел имеют вид: 248, 249,250,251,252,253,254,255, их сумма равна $\frac{248+255}{2}\cdot 8=503\cdot 4=2012$. Вторая «последовательность» состоит из числа 2012. Отв.248,255; 2012.

9.35.(Л.2014.В12.С6). Сумма одного или нескольких последовательных натуральных нечётных чисел равна 2013. Найдите все такие последовательности. *Подсказка.* $2n+1+(2n+3)+(2n+5)+...+(2n+2k-1)=2013 \Leftrightarrow (2n+k)(k)=3\cdot 11\cdot 61$. Соответствующие системы имеют решения:k=1, последовательность: 2013; k=33, последовательность:29,31,…93;

k=11, последовательность:173,175,…193; k=3, последовательность:669,671,673.

9.36. Сумма одного или нескольких последовательных натуральных чисел равна 2024. Для каждого случая найдите такие последовательности, укажите наименьшее и наибольшее числа в них.

9.37 . Сумма одного или нескольких последовательных натуральных нечётных чисел равна 2025. Найдите все такие последовательности.

БЗ10. Задача математического моделирования с помощью уравнений, неравенств, систем с использованием элементарных функций, базовых задач данного перечня. Способы действий: использование комбинаций рассмотренных базовых задач и алгоритмов.

10.1. Процент учеников некоторого класса, повысивших в третьей четверти успеваемость, заключён в пределах от 2,9% до 3,1%. Определите минимально возможное число учеников в таком классе.

Решение. Математическая модель задачи сводится к диофантовому неравенству. Пусть m-число учеников, повысивших успеваемость, n-общее число учеников. $n,m \in N$. По условию $\frac{29}{1000} < \frac{m}{n} < \frac{31}{1000}$, тогда $\frac{1000}{31} < \frac{n}{m} < \frac{1000}{29} \Rightarrow \frac{1000}{31}m < n < \frac{1000}{29}m$. Ясно, что функции, стоящие в левой и в правой частях двойного неравенства, возрастают с ростом m. Поэтому достаточно проверять значения m, начиная с наименьших. При m=1 32.2<n<34.4 $\Rightarrow n \in \{33;34\}$; $n_{\min} = 33$. Использована БЗ10, свойства числовых неравенств и метод крайнего.

10.2. Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенными между числами $\frac{96}{35}$ и $\frac{97}{36}$ найдите такую, знаменатель которой минимален.

Решение. Математическая модель задачи сводится к диофантовому неравенству. Пусть $n,m \in N$, $\frac{97}{36} < \frac{m}{n} < \frac{96}{35}$, найти $n_{\min} - ?$ По условию $\frac{97}{36} < \frac{m}{n} < \frac{96}{35}$, тогда $\frac{35}{96} < \frac{n}{m} < \frac{36}{97} \Rightarrow \frac{35}{96}m < n < \frac{36}{97}m$. Требуется найти наименьшее m, при котором в интервал $\left(\frac{35}{96}m; \frac{36}{97}m\right)$ попадёт первое натуральное число n . Проведём численный эксперимент, подставляя поочерёдно m=1;m=2, и т.д., следя за тем, содержит ли полученный интервал целое число. Наблюдения позволяют выдвинуть гипотезу, что начиная с m=3 целая часть границ интервала сохраняет постоянное значение для трёх последовательных m, что позволит уменьшить число вычислительных проб. При m=19 получаем первый интервал, содержащий целое число7. Второй такой интервал получим при m=27, он содержит второе целое число 10. Искомая дробь имеет вид $\frac{19}{7}$. Использована БЗ10.

10.2.1. Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенными между числами $\frac{68}{21}$ и $\frac{76}{23}$ найдите такую, знаменатель которой минимален. Ответ: $\frac{23}{7}$.

10.2.2. Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенными между числами $\frac{159}{35}$ и $\frac{151}{33}$ найдите такую, знаменатель которой минимален. Ответ: $\frac{32}{7}$.

10.3. Укажите: а) 2; б) 102; в) 2000 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного точного квадрата. Является ли решение единственным? Указание: определите число натуральных чисел между двумя соседними квадратами n^2 и $(n+1)^2$. Ответ: а)1и 4; б) 51^2 и 52^2; в) 500^2 и 501^2.

10.4. Найдите: а) двузначное число; б) трёхзначное число, обладающее наибольшим числом делителей. Ответ: а)72; б)864

10.5. Рассмотрим все пятизначные числа, получаемые перестановкой цифр числа 12357. Докажите, что сумма всех таких чисел (включая исходное число) делится на 11111. Докажите, что аналогичная сумма для числа 23578 не делится на 111.

а) Всего пять цифр, число перестановок пяти символов равно $5! = 120$, (это одна из базовых задач комбинаторики). Складывая столбиком 120 слагаемых, получим над каждым разрядом ту или иную комбинацию цифр 1,2,3,5,7, сумма которых постоянна и равна $1 \cdot 24 + 2 \cdot 24 + 3 \cdot 24 + 5 \cdot 24 + 7 \cdot 24 = 18 \cdot 24 = 432$.Сумма всех 120 чисел равна $432 + 432 \cdot 10 + 432 \cdot 100 + 432 \cdot 1000 + 432 \cdot 10000 = 432 \cdot (1 + 10 + 100 + 1000 + 10000) = 11111 \cdot 432 = 4799952$.

б) Всего пять цифр. Складывая все 120 чисел, получаемые перестановками данных цифр, получим сумму, равную 6666600, которая не делится на 111.

10.6. Выписано 2001 число, каждое из которых равно 5 или 7. Можно ли их разбить на 2 группы с равными суммами элементов в каждой группе?

10.7. Может ли десятичная запись числа $n!$ оканчиваться на а)1000 нулей; б)2008 нулей; в)2009 нулей; г)2010 нулей? Ответ: а)да, n=4005, 4006, 4007, 4008, 4009; б)да; в) нет; г) да, n=8050, 8051, 8052, 8053, 8054. Использованы БЗ1,3.

10.8. Найдите все натуральные числа, являющиеся степенью двойки, такие, что после зачёркивания первой цифры слева в их десятичной записи снова получается десятичная запись числа, являющегося степенью двойки.

Решение. 1)Проведём численный эксперимент: рассмотрим несколько первых степеней двойки:1,2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024,…и проверим, для каких из чисел выполнено требование задачи. Обнаружили 32 и 64, но есть ли ещё? 2)От эксперимента перейдём к моделированию. Зачёркивание первой цифры можно моделировать так: 32-3*10=2; 64-6*10=4. 3)Пусть степень двойки является (k+1)-значным числом с первой слева цифрой p, тогда модель задачи выглядит так: $2^a - p \cdot 10^k = 2^b, a > b;$ или так: $2^a - 2^b = p \cdot 10^k, a > b;$ преобразуем: $2^b(2^{a-b} - 1) = p \cdot 10^k$. Правая часть уравнения делится на 5, следовательно, скобка в левой части делится на 5. Возникла проблема: при каких натуральных n $(2^n - 1) \vdots 5$? 4)Для решения проблемы докажем **лемму**: $(2^n - 1) \vdots 5$ только при n=4m. Для доказательства будем рассуждать по модулю 4, рассматривая остатки при делении на 4. При n=4m $2^n - 1 = 16^m - 1 = (16 - 1)(16^{m-1} + 16^{m-2} + \ldots + 1) \vdots 5$. Была использована формула сокращённого умножения: разность m-ых степеней. Другой способ использует бином Ньютона: $(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} \cdot b + C_n^{21} a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 \cdot b^{n-1} + b^n$. Если a=15, b=1, то в разложении по биному степени $(15+1)^m$ получим, что все слагаемые, кроме последнего, кратны 15, поэтому можно записать: $2^n - 1 = 16^m - 1 = (15+1)^m - 1 = (15a + 1) - 1 = 15a \vdots 5$. Пусть n=4m+1, тогда $2^n - 1 = 2 \cdot 16^m - 1 = 2(15a + 1) - 1 = 30a + 1$ не делится на 5. При n=4m+2 $2^n - 1 = 4 \cdot 16^m - 1 = 4(15+1)^m - 1 = 4(15a + 1) - 1 = 60a + 3$ не делится на 5. При n=4m+3 $2^n - 1 = 8 \cdot 16^m - 1 = 8(15+1)^m - 1 = 8(15a + 1) - 1 = 120a + 7$ не делится на 5. Лемма доказана. Найденные числа 32 и 64 соответствуют m=1. 5)Покажем, что при m>1 решений нет. $2^b(2^{a-b} - 1) = p \cdot 10^k \Leftrightarrow 2^b(2^{4m} - 1) = p \cdot 10^k \Leftrightarrow 2^b(2^{2m} - 1)(2^{2m} + 1) = p \cdot 10^k$,причём $(2^{4m} - 1)$ делится на 5, т.к.правая часть уравнения делится на 5. Один из множителей $(2^{2m} - 1)(2^{2m} + 1)$ делится на 5, а другой нет, ни одна из скобок не делится на два. При $m \ge 2 \Rightarrow (2^{2m} - 1) \ge 15; (2^{2m} + 1) \ge 17;$ но, поскольку они поочерёдно равны p, а p<10, получено противоречие. Следовательно, при m>1решений нет. Использованы БЗ№1,8. Ответ: 32 и 64.

10.9. Саша и Маша независимо друг от друга составили по одному семизначному числу, используя все цифры 1,2,3,4,5,6,7 по одному разу. Оказалось, что одно число больше другого. Верно ли, что большее число не делится на меньшее?

Решение. Предположим противное: $x \vdots y,$ возможные значения частного $\frac{x}{y} \in \{2;3;4;5;6;7;8\}$; 1 и 9 невозможны: в первом случае x=y противоречит условию, во втором случае 9*y =9*1234567=11111103– восьмизначное число, противоречие. Эвристическая подсказка: в задачах на делимость переходим к остаткам. Осталось выбрать модуль: остатки при делении на *какое* число стоит рассмотреть? Семизначных чисел много 7!, столько, сколько существует перестановок семи цифр, перебор велик. Попробуем найти инвариант, т.е. величину, не зависящую от перестановки цифр. Из признаков делимости на 3, на 9 известно, что сумма цифр числа является важным инвариантом. И в нашей ситуации сумма цифр неизменна во всех семизначных числах:1+2+3+4+5+6+7=28. В качестве модуля выбираем число 9. Заметим, что 28=1(mod9). Возьмём число y, будем умножать его поочерёдно на 2,3,4,5,6,7,8 и вычислять остатки при делении суммы цифр на 9. Эти остатки образуют ряд:2;3;4;5;6;7;8, действительно, 56=2(mod9); 84=3(mod9); 112=4(mod9); 140=5(mod9); 168=6(mod9); 196=7(mod9); 224=8(mod9);ни разу не получили остатка 1, а ведь это инвариант! Значит, ни разу не получили числа из рассматриваемой совокупности семизначных чисел, полученных в результате перестановки цифр. Ответ: верно. Исп. Б.З. 1,2.

10.11. Решите систему уравнений в натуральных числах k,l,m,n $\begin{cases} nm+kl=13 \\ nk-ml=6. \end{cases}$

Решение. Возводя уравнения в квадрат и складывая их, получим $(m^2+k^2)\cdot(n^2+l^2)=5\cdot 41$. Так как множители в правой части – простые числа, уравнение равносильно совокупности двух систем $\begin{cases} m^2+k^2=5 \\ n^2+l^2=41; \end{cases}$ *или* $\begin{cases} m^2+k^2=41 \\ n^2+l^2=5. \end{cases}$ Осуществляя перебор и сделав проверку, приходим к Ответу: (2;4;1;5); (5;1;4;2).

10.12. Попарные суммы пяти целых чисел x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 равны 0,2,4,4, 6,8,9,11,13,15. Найдите наименьшее и наибольшее из этих чисел.

Решение. Занумеруем данные числа в порядке неубывания: $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le x_5$ (*), используя метод мажорирования, получим $x_1+x_2 \le x_1+x_3 \le x_1+x_4 \le x_1+x_5 \le x_2+x_5 \le x_3+x_5 \le x_4+x_5$, аналогично, $x_1+x_3 \le x_2+x_3 \le x_2+x_4 \le x_3+x_4 \le x_3+x_5$. В выписанных неравенствах встречаются все 10 возможных попарных сумм. Не удаётся упорядочить по возрастанию все попарные суммы, но, пользуясь неравенством (*) можно указать две меньшие суммы $x_1+x_2 \le x_1+x_3$ и две большие суммы $x_3+x_5 \le x_4+x_5$. Попарные суммы даны по условию, получаем четыре уравнения с пятью неизвестными : $x_1+x_2=0; x_1+x_3=2;$ $x_3+x_5=13; x_4+x_5=15$ (**). Проблема в том, как найти пятое уравнение! Неизвестны значения каждой из попарных сумм, но сумма попарных сумм известна: 0+2+4+4+6+8+9+11+13+15=72, является инвариантом задачи и обладает любопытным свойством: каждое из чисел x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 встречается в ней по четыре раза! Следовательно, $4(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)=72 \Leftrightarrow x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=18$ (***). Складывая уравнения 1,2 и 4 из (**) и подставляя (***), получим $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=3$, $x_5=10$, $x_4=5$.

Ответ: $x_{\min}=-1; x_{\max}=10$.

10.13. Группа спортсменов на олимпиаде в Сочи может быть перемещена из дворца спорта на горнолыжную трассу двумя способами: либо на двух автобусах за несколько рейсов, либо на трёх электромобилях, причём, в этом случае число рейсов каждого электромобиля будет на один меньше, чем при первом способе. Транспорт во всех случаях должен быть полностью загружен. Оргкомитету олимпиады необходимо узнать, какое максимальное количество спортсменов можно перевезти, если в электромобиль входит на 7 человек меньше, чем в автобус. Решение. Пусть r – число рейсов автобуса, n –

вместимость автобуса, $n, r \in N, r \geq 2, n \geq 8$. Если группа из М спортсменов, число М можно представить двумя способами: $\begin{cases} 2rn = M \\ 3(r-1)(n-7) = M \end{cases}$;требуется найти $M_{\max} - ?, M \in N$. Из системы следует, что М делится на n и на (n-7). НОД(n,n-7)=НОД(7,n-7)=7. Действительно, пусть $n = dl_1; n-7 = dl_2$, где d- общий делитель $\Rightarrow 7 = d(l_1 - l_2) \Rightarrow d = 1, d = 7$. Следовательно, $d = 7l, l \in N$. Из системы получим следствие: $2rl = 3(r-1)(l-1), r \geq 2, l \geq 3$,т.к. при $l = 2 \Rightarrow r - -3, \varnothing$.Преобразованное уравнение примет вид: $rl - 3r - 3l + 3 = 0$. Заметим, (3;3) не является решением уравнения. Используя известный приём, выразим одну переменную через другую: $r = \frac{3l-3}{l-3} = 3 + \frac{6}{l-3}$, знаменатель должен быть натуральным делителем 6: $(l-3) \in \{1;2;3;6\} \Rightarrow l \in \{4;5;6;9\}$. Проанализируем решения с точки зрения исходных условий задачи, результат оформим в таблицу:

L	R	N=7L	N=2rn
4	9	28	504
5	6	35	420
6	5	42	420
9	4	63	504

У оргкомитета сочинской олимпиады есть две возможности организовать переброску спортсменов: 1) двумя автобусами по 28 мест в каждом и нужно сделать 9 рейсов; или тремя электромобилями по 21 месту в каждом и нужно сделать 8 рейсов; 2)два автобуса по 63 человек сделают 4 рейса; или 3 электромобиля по 56 человек сделают 3 рейса. Во всех случаях максимальное число перевезённых спортсменов равно 504.

Ответ: 504.

10.14. Три группы экспертов составили 113 задач для ЕГЭ по математике. Каждый эксперт первой группы составил по 13 задач, эксперты второй группы составили по 5 задач, третьей – по 4 задачи. Сколько экспертов работало в каждой группе, если всего их было 16?

Решение. Пусть x,y,z- количество экспертов в группах. Получаем систему уравнений задачи: $13x + 5y + 4z = 113; x + y + z = 16$, причём, неизвестные – натуральные числа. Исключив z из уравнений, получим $9x + y = 49 \Leftrightarrow 9x = 49 - y$, с другой стороны, $x + y + z = 16 \Leftrightarrow y = 16 - x - z \Rightarrow y < 16$. Следовательно, 9x может принимать только значения 36 или 45. Проверяя эти случаи, получим (4;13;-1) ненатуральные значения переменных в первом случае; (5;4;7) натуральные значения во втором случае. Ответ: 5;4;7.

10.15. (Я.2019.В.43.19). Красный карандаш стоит 18 рублей, а синий- 14 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 499 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей более, чем на шесть. а)Можно ли при таких условиях купить 30 карандашей? б) Можно ли при таких условиях купить 33 карандаша? в)Какое наибольшее число карандашей можно купить при данных условиях? Отв. а) да; б) нет; в)31.

Решение. Пусть к- количество красных карандашей, с- количество синих карандашей, по условию есть два ограничения $18k + 14c \leq 499; \quad |c - k| \leq 6; \quad c, k \in N \cup \{0\}$. Математическая модель задачи п.а) имеет вид: решить диофантово уравнение с ограничениями $c + k = 30; \quad 18k + 14c \leq 499; \quad |c - k| \leq 6; \quad c, k \in N \cup \{0\}$. Преобразуем систему из уравнения и двух неравенств:

$$\begin{cases} c + k = 30; \\ 18k + 14c \leq 499; \\ |c - k| \leq 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 30 - k; \\ 18k + 14(30 - k) \leq 499; \\ -6 \leq c - k \leq 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 30 - k; \\ 4k \leq 79; \\ -6 \leq 30 - k - k \leq 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 30 - k; \\ k \leq 19{,}75; \\ 12 \leq k \leq 18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 30 - k; \\ 12 \leq k \leq 18. \end{cases}$$

Придавая **к** последовательно значения от 12 до 18, вычислим соответствующие **с**, все решения задачи имеют вид:

К	12	13	14	15	16	17	18
с	18	17	16	15	14	13	12

Ответ: да, см.таблицу.

Б)Математическая модель задачи п.б) имеет вид

$$\begin{cases} c+k=33; \\ 18k+14c\le 499; \\ |c-k|\le 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=33-k; \\ 18k+14(33-k)\le 499; \\ -6\le c-k\le 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=33-k; \\ 4k\le 37; \\ -6\le 33-k-k\le 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=33-k; \\ k\le 9{,}25; \\ 13{,}5\le k\le 19{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=33-k; \\ k\in\varnothing. \end{cases}$$

.Ответ: нет.

В)Можно предложить красивое геометрическое решение: в плоскости КОС (ось абсцисс – ОК; ось ординат – ОС) ограничения $|c-k|\le 6;$ $18k+14c\le 499$ задают пятиугольник О(0,0), В(0,6), С(12,96875, 18,96875), Д(18,21875, 12,21875), Е(6,0) в первой четверти. Цель: найти максимум суммы $c+k$, при условии, что целочисленные точки $(c;k)$ принадлежат пятиугольнику. Прямую $c+k=M \Leftrightarrow c=M-k$ смещаем параллельно прямой $c=-k$, т.е. биссектрисе второго и четвёртого координатного углов так, чтобы она проходила через целочисленные точки $(c;k)$ принадлежащие пятиугольнику. $M_{\max}=31$ будет достигнуто в точке (13,18) , прямая $c=31-k$ пройдёт через верхнюю целочисленную точку пятиугольника, при дальнейшем параллельном смещении прямой вверх целочисленных точек в области пятиугольника прямая не пройдёт. Ответ: 31.

10.16. Красный карандаш стоит 17 рублей, а синий- 13 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 495 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей более, чем на пять. а) Можно ли при таких условиях купить 32 карандаша? б) Можно ли при таких условиях купить 35 карандашей? в) Какое наибольшее число карандашей можно купить при данных условиях? Отв. а) да; б)нет; в)33.

10.17. На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры. а) Приведите пример исходных чисел, для которой сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел. б)Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел. Отв. а)например, 19 раз число 19 и один раз 78; б) 1650.
Решение. Для выявлении закономерности, введём ***коэффициент обращения числа***, показывающий во сколько раз увеличивается число при перестановке его цифр, т. е. при обращении: $k_{обр}=\dfrac{\overline{ab}}{\overline{ba}}$. Проведём небольшой вычислительный эксперимент: в таблицу двузначных чисел от 11 до 99 впишем их ***коэффициент обращения:***

11 1	12 1,75	13 2,38	14 2,9	15 3,4	16 3,8	17 4,17	18 4,5	19 4,78
21 0,57	22 1	23 1,38	24 1,75	25 2,08	26 2,38	27 2,66	28 2,9	29 3,17
31	…							
41								
51								
61								
71								
81								
91	…							

Замечаем, что самые большие коэффициенты обращения сгруппированы в верхней правой части таблицы, а самые маленькие – ниже главной диагонали матрицы (таблицы). Только у трёх чисел:17,18,19 коэффициент обращения больше 4. Поэтому оправдан поиск искомых чисел п.а) среди этих чисел. 19 имеет наибольший коэффициент обращения, поэтому сумма обращённых чисел будет наибольшей у слагаемых 19+19+19….+19=361. По условию сумма исходных слагаемых равна 363, поэтому заменим одно число 19 на 21, тогда 19+19+19….+21=363 (здесь 18 раз взято 19 и один 21). Найдём сумму обращённых чисел:91*18+12=1650, она более, чем в 4 раза больше 363, точнее: $\dfrac{1650}{363}=4,(54)$. Причём сумма 1650 не может быть увеличена, т.к. для её получения было взято наибольшее количество слагаемых с наибольшим коэффициентом обращения. Сумма 1650 неулучшаема. Ответ б)1650.

Для того, чтобы уменьшить отношение $\frac{1650}{363}=4,(54)$ до 4, воспользуемся закономерностью, обнаруженной при численном эксперименте, будем заменять некоторые слагаемые (равные 19) с наибольшими коэффициентами на другие числа, они все имеют коэффициент меньше, чем у 19. Действуем так: забираем одно слагаемое 19 (из 18 слагаемых) и складываем с 21, но вариант 17*19+40 не годится, т.к.40 содержит 0. Продолжим процесс: забираем ещё одно слагаемое 19 (из 17 слагаемых) и складываем с 40, получим 16*19+59=363. Найдём сумму обращённых чисел:91*16+95=1551, отношение $\frac{1551}{363}=4,(27)$. Отношение уменьшилось, но недостаточно.

Продолжим процесс: забираем ещё одно слагаемое 19 (из 16 слагаемых) и складываем с 59, получим 15*19+78=363. Найдём сумму обращённых чисел:91*15+87=1452, отношение $\frac{1452}{363}=4$. Итак, сумма обращённых чисел будет ровно в 4 раза больше суммы исходных чисел, если взять 15 раз число **19** плюс 78.

Заметим, что если взять 17 раз число **18** плюс 57, то сумма обращённых чисел будет ровно в 4 раза больше суммы исходных чисел. Пользуясь изложенным приёмом, найдите самостоятельно подходящую сумму чисел, построенную на основе чисел **17**. Полностью оправдалась наша гипотеза искать слагаемые среди имеющих наибольший коэффициент обращения чисел (17,18,19).

10.18. Выписаны все натуральные числа от 1 до 999. Сколько раз оказалась выписана цифра 3; 4; 9? Сколько чисел, содержащих цифру 3, выписано?

10.19.(Я.2020.В29.19). Три различных натуральных числа являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника. а)Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них равняться $\frac{13}{7}$? б) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них равняться $\frac{8}{7}$? в)Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине число равно 25? Отв. а)да, например,7,10,13. б)нет. в) $\frac{35}{24}$

Решение. Обозначим длины сторон треугольника по возрастанию a,b,c, $a<b<c$, $a,b,c\in N$. Для того, чтобы числа a,b,c могли быть длинами сторон треугольника, достаточно выполнение неравенств треугольника: **a+b>c**, a+c>b, b+c>a, но т.к. c – наибольшая длина, то первое неравенство поглощает второе и третье, оставляем только его. Пусть φ - больший угол, противолежащий стороне c. То, что $\varphi>90^0$ можно смоделировать теоремой косинусов:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\varphi \Leftrightarrow \cos\varphi=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0 \Leftrightarrow a^2+b^2-c^2<0 \Leftrightarrow a^2+b^2<c^2.$$

Математическая модель задачи (ММЗ) примет вид: $\begin{cases} a,b,c\in N, \\ a<b<c, \quad (1) \\ c<a+b, \quad (2) \\ a^2+b^2<c^2, (3). \end{cases}$

А)Требуется выяснить, может ли $\frac{c}{a}=\frac{13}{7}$**?** Проверим, при a=7,c=13, $b\in\{8;9;10;11;12\}$ выполняется ли условие 3 ММЗ: если $b\in\{8;9;10\}$ то все условия выполнены. При $b\in\{11;12\}$ условие на тупой угол не выполняется. Ясно, что возможно построение неограниченного количества подходящих треугольников. Подумайте, как сконструировать такие примеры. Ответ: да, например, a=7,c=13, $b\in\{8;9;10\}$.

Б) Модель задачи (ММЗ) примет вид: $\begin{cases} 7t, b, 8t \in N, \\ 7t < b < 8t, & (1) \\ 8t < 7t + b, & (2) \\ (7t)^2 + b^2 < (8t)^2, (3). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7t, b, 8t \in N, \\ 7 < \frac{b}{t} < 8, & (1) \\ t < b, & (2) \\ b^2 < 15t^2, (3). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7t, b, 8t \in N, \\ 7 < \frac{b}{t} < 8, & (1) \\ 1 < \frac{b}{t}, & (2) \\ \frac{b}{t} < \sqrt{15}, (3). \end{cases}$

.Неравенства 1 и 3 несовместны, такой треугольник невозможен. Ответ: нет.
В)Пусть длины сторон треугольника равны а, b=25, $c = \lambda \cdot a$ **, найти наименьшее значение** $\lambda_{\min} - ?$
Математическая модель задачи (ММЗ) примет вид:

$$\begin{cases} a, 25, \lambda a \in N, \\ a < 25 < \lambda a, & (1) \\ \lambda a < a + 25, & (2) \\ a^2 + 25^2 < (\lambda a)^2, (3). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, 25, \lambda a \in N, \\ 1 < \frac{25}{a} < \lambda, & (1) \\ \lambda < 1 + \frac{25}{a}, & (2) \\ \sqrt{1 + \left(\frac{25}{a}\right)^2} < \lambda, (3). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \{1, 2, \ldots 23, 24\}, \lambda a \in N, \\ \sqrt{1 + \left(\frac{25}{a}\right)^2} < \lambda < 1 + \frac{25}{a}. \\ \lambda_{\min} - ? \end{cases}$$

Изучим свойства функций, входящих во второе неравенство: нижняя и верхняя границы λ являются убывающими функциями аргумента а, следовательно, наименьшее значение принимают при наибольшем значении аргумента a=24. Получаем: $\sqrt{1 + \left(\frac{25}{24}\right)^2} < \lambda_{\min} < 1 + \frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1201}}{24} < \lambda_{\min} < \frac{49}{24} \Leftrightarrow \sqrt{1201} < 24 \cdot \lambda_{\min} < 49$. Вычислив по алгоритму $\sqrt{1201} \approx 34{,}6$ или сделав прикидку, получаем, что наименьшее целое число, превосходящее $\sqrt{1201}$ это 35, $35 \le 24 \cdot \lambda_{\min} < 49 \Leftrightarrow \lambda_{\min} = \frac{35}{24}$. Ответ: $\lambda_{\min} = \frac{35}{24}$.

10.20.(Я.2020.В30.19). Три различных натуральных числа являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника. а)Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них равняться $\frac{3}{2}$? б) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них равняться $\frac{5}{4}$? в)Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине число равно 18? Отв. а)да, например,10,11,15. б)нет. в) $\frac{25}{17}$

10.21. (МЗ). Три различных натуральных числа являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника. а) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них равняться 2? Если да, то приведите несколько примеров; б) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них равняться $\frac{4}{3}$? в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине число равно 20? Отв. а) да, например,4,5,8; 10,11,20;10,12,20;…10,17,20. б) нет. в) (Подсказка: $\frac{\sqrt{761}}{19} < \lambda_{\min} < \frac{39}{19}$); $\lambda_{\min} = \frac{28}{19}$.

10.22. (Я2019,В44,19). В турнире по шахматам принимают участие мальчики и девочки. За победу в шахматной партии начисляется 1 очко, за ничью – 0,5 очка, за проигрыш – 0 очков. По правилам турнира каждый участник играет с каждым другим дважды. а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если в турнире принимают участие три мальчика и две девочки? б)Какова сумма набранных всеми участниками очков, если всего участников десять? в) Сколько девочек могло принимать участие в турнире, если известно, что их в 7 раз меньше, чем мальчиков, и что мальчики набрали в сумме ровно в три раза больше очков, чем девочки? Отв. а)14; б)90; в)1.

Решение. А) Играя две партии между собой, две девочки, независимо от исхода партий, наберут 2 очка. Первая девочка, играя в первом туре с тремя мальчиками, наберёт максимум 3 очка, во втором туре - ещё 3 очка. Вторая девочка, играя с тремя мальчиками, сможет набрать максимум 6 очков. Итог:2+6+6=14. Отв. 14.

Б) Чтобы вывести сумму набранных всеми участниками очков, достаточно посчитать количество партий, сыгранных всеми сначала в первом туре. Разместим на окружности n точек и занумеруем их числами от 1 до n. Из первой точки проведём (n-1) хорду во все остальные отмеченные точки, изображая хордами шахматные партии. Переместим наше рассмотрение в точку 2: из неё проведём (n-1) хорду во все остальные отмеченные точки, но при этом хорда 2-1 посчитана дважды, добавится (n-1)-1 новая хорда. Переместим наше рассмотрение в точку 3: из неё проведём (n-1) хорду во все остальные отмеченные точки, но при этом хорда 3-1 и 3-2 посчитаны дважды, добавится (n-1)-2 новые хорды. Итак, перемещаясь по окружности, будем получать в каждой точке своё количество новых хорд:

1	2	3	4	…	n-1	n
(n-1)-0	(n-1)-1	(n-1)-2	(n-1)-3		(n-1)-(n-2)	(n-1)-(n-1)

Суммируя числа во второй строке, получим: $n(n-1)-\frac{0+n-1}{2}\cdot n=n(n-1)-\frac{n-1}{2}\cdot n=\frac{n(n-1)}{2}$ количество сыгранных партий, а значит, и сумму набранных очков всеми участниками, в первом туре. Во втором туре будет набрано столько же очков, итого за два тура $n(n-1)$очков, так что сумма **набранных всеми участниками очков, если всего участников десять, равна** $10(10-1)=90$. Ответ: 90.

Замечание: аналогично выводится формула $\frac{n(n-3)}{2}$для числа диагоналей в выпуклом n-угольнике.

В)Используем эвристический «принцип крайнего», т.е. рассмотрим случай 1-ой девочки и 7 мальчиков, в этом случае девочка наберёт 14 очков, а всего будет набрано $8(8-1)=56$очков, 56-14=42 очка наберут мальчики. Т.к.42:14=3, то все условия задачи выполнены. Ответ:1. *(Рассмотрите самостоятельно гипотезу 2-х девочек и 14 мальчиков).*

10.23. В турнире по шахматам принимают участие мальчики и девочки. За победу в шахматной партии начисляется 1 очко, за ничью – 0,5 очка, за проигрыш – 0 очков. По правилам турнира каждый участник играет с каждым другим дважды. а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если в турнире принимают участие пять мальчиков и три девочки? б)Какова сумма набранных всеми участниками очков, если всего участников девять? в) Сколько девочек могло принимать участие в турнире, если известно, что их в 9 раз меньше, чем мальчиков, и что мальчики набрали в сумме ровно в четыре раза больше очков, чем девочки? Отв. а) 36; б) 72; в)1.

10.23. Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел -1,2,4,-6, 7, -8,-10,12.Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел-1,2,4,-6, 7, -8,-10,12. После этого числа на каждой карточке складывают, а, полученные восемь сумм перемножают. а)Может ли в результате получиться 0? б) Может ли в результате получиться 1? в)Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться? Отв. а) нет б) нет в) 16.

10.24. (Я.2019).**В результате опроса выяснилось, что примерно 58% опрошенных предпочитают искусственную ёлку натуральной (число 58 получено по правилу округления до целого числа). Из того же опроса стало известно, что примерно 42% респондентов никогда не отмечают Новый год дома.**

А)Могло ли в опросе участвовать ровно 40 человек?

Б) Могло ли в опросе участвовать ровно 48 человек?

В)Какое наименьшее количество человек могло участвовать в опросе? *Решение А) Проверим, могло ли* ***в*** *опросе участвовать ровно 40 человек? Если n=40, то сколько человек* предпочитают искусственную ёлку?

40*0,58=23,2, проверим сначала 23: $\frac{23}{40}=0{,}575\approx 0{,}58$, 23 первому условию удовлетворяет; 24 уже нет: $\frac{24}{40}=0{,}6\neq 0{,}58$. Сколько может быть человек, которые никогда не отмечают Новый год дома: 40*0,42=16,8, проверим 16 и 17 : $\frac{16}{40}=0{,}4\neq 0{,}42$; $\frac{17}{40}=0{,}425\approx 0{,}43\neq 0{,}42$. Число 40 не удовлетворяет второму условию задачи. **Ответ: нет**.

Решение Б) Проверим n=48.

Если n=48, то сколько человек предпочитают искусственную ёлку? 48*0,58=27,84, проверим сначала 27: $\frac{27}{48}=0{,}562\approx 0{,}56\neq 0{,}58$, 27 первому условию не удовлетворяет; 28 : $\frac{28}{48}\approx 0{,}583\approx 0{,}58$, 28 первому условию удовлетворяет. Сколько может быть человек, которые никогда не отмечают Новый год дома: 48*0,42=20,16, проверим 20 и 21 : $\frac{20}{48}\approx 0{,}416\approx 0{,}42$; $\frac{21}{48}\approx 0{,}44\neq 0{,}42$. Число 48 удовлетворяет обоим условиям задачи. **Ответ: да.**

Решение В) Интуиция подсказывает, что наименьшее n будет не меньше 10, но для полноты рассмотрения начнём перебор значений с наименьшего натурального n=1. Для удобства результаты поместим в таблицу, здесь a- возможное количество человек (для данного n), предпочитающих искусственную ёлку, это необходимое условие на a;

b- возможное количество человек (для данного n), никогда не отмечающих Новый год дома, это необходимое условие на b. Далее следует проверка достаточного условия на a и на b:процент после округления должен совпасть 58% и 42%.

N	0,58n $a\approx 0{,}58\cdot n$	0,42n $b\approx 0{,}42\cdot n$	a, b	Проверка условия $\frac{a}{n}\cdot 100\%\approx 58\%$ и $\frac{b}{n}\cdot 100\%\approx 42\%$
1	0.58	0,42	1, 0	нет
2	1,16	0,84	1, 1	нет
3	1,74	1,24	2, 1	нет
4	2,32	1,68	2, 2	нет
5	2,9	2,1	3, 2	60%, 40% нет
6	3,48	2.52	3, 3	нет
7	4,06	2,94	4, 3	57%. , 43% нет
8	4,68	3.36	5, 3	63%, 38% нет
9	5,22	3,78	5, 4	56%. 44%, нет
10	5,8	4.2	6, 4	60%, 40% нет
11	6,38	4,62	6, 5	55%. 45%. нет
12	6,96	5,04	7, 5	58%, 42% да

Ответ: 12 – наименьшее количество человек.

10.25.(Л2020.В.21.19). На сайте проводится опрос: кого из артистов посетители сайта считают лучшим по итогам года? Каждый посетитель сайта голосует за одного артиста. На сайте отображается рейтинг каждого артиста- доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа.

А)Всего проголосовали 13 посетителей сайта. Мог ли рейтинг некоторого артиста быть равным 34?

Б) Могло ли получиться так, что сумма рейтингов больше100, если в голосовании приняли участие 13 посетителей, которые отдали голоса за трёх артистов?

В) На сайте отображен рейтинг одного артиста, равный 11. Это число не изменилось и после того, как Светлана отдала за него свой голос. При каком наименьшем числе проголосовавших (не считая Светланы) это возможно? Отв. а)нет; б)да; в)95.

Решение А) Проведём числовой эксперимент: обыкновенные дроби $\frac{n}{13}$ переведём в десятичную дробь, умножим на 100%, а затем округлим до ближайшего целого числа, получив рейтинг R:

$\frac{n}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{11}{13}$	$\frac{12}{13}$
$\frac{n}{13}\cdot 100\%$	7,6%	15,3%	23,0%	30,7%	38,4%	46,1%	53,8%	61,5%	69,2%	76,9%	84,6%	92,3%
$R=\frac{n}{13}\cdot 100\% \approx$	8	15	23	31	38	46	54	62	69	77	85	92

Два наблюдения можно сделать, обобщая эксперимент: 1)не существует числа n такого, у которого рейтинг равен 34 (см. таблицу);

2) существует шесть значений n, рейтинг которых при округлении до ближайшего целого возрастает (в сравнении с процентом), т.е. он больше соответствующего количества процентов. На этом можно сыграть, получив сумму рейтингов, больше, чем 100. Это и будет сделано в п.б). Отв. а) нет.

Б)Из отмеченных красным цветом рейтингов надо выбрать те три, которые в сумме дадут более, чем 100 и такие, у которых сумма соответствующих поданных голосов равна 13. Единственное распределение 13 голосов за трёх актёров – это 1, 4,8, что соответствует суммарному рейтингу 8+31+62=101.Отв. б)да.

В)Пусть всего проголосовали n человек, m из них проголосовали за артиста, получившего рейтинг 11, тогда, учитывая правила округления, доля $\frac{m}{n}$ людей, проголосовавших за артиста должна удовлетворять двойному неравенству: $\frac{10,5}{100}\le\frac{m}{n}<\frac{11,5}{100}$. По условию, отданный голос Светланы не изменил рейтинга, значит доля голосов $\frac{m+1}{n+1}$ попадает в тот же полуинтервал : $\frac{10,5}{100}\le\frac{m+1}{n+1}<\frac{11,5}{100}$. Получена мат. модель задачи: найти наименьшее натуральное n, при котором выполняется система неравенств:

$$\begin{cases}\frac{10,5}{100}\le\frac{m}{n}<\frac{11,5}{100}; n_{\min}-?; m,n\in N\\ \frac{10,5}{100}\le\frac{m+1}{n+1}<\frac{11,5}{100}\end{cases}.$$

Преобразуем систему, разрешив её относительно n:

$$\begin{cases}\frac{10,5}{100}\le\frac{m}{n}<\frac{11,5}{100};\\ \frac{10,5}{100}\le\frac{m+1}{n+1}<\frac{11,5}{100}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1000}{115}<\frac{n}{m}\le\frac{1000}{105};\\ \frac{1000}{115}<\frac{n+1}{m+1}\le\frac{1000}{105}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{200}{23}m<n\le\frac{200}{21}m;\\ \frac{200}{23}(m+1)<n+1\le\frac{200}{21}(m+1)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{200}{23}m<n\le\frac{200}{21}m;\\ \frac{200}{23}(m+1)-1<n\le\frac{200}{21}(m+1)-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{200}{23}m<n\le\frac{200}{21}m;\\ \frac{200}{23}m+\frac{177}{23}<n\le\frac{200}{21}m+\frac{179}{21}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{200}{23}m+\frac{177}{23}<n\le\frac{200}{21}m;$$

В последнем неравенстве в качестве левой границы взята б*о*льшая из левых границ, а в качестве правой – меньшая из правых. Решение продолжаем геометрическим способом. В плоскости **mon** построим прямые $n=\frac{200}{23}m+\frac{177}{23}$; $n=\frac{200}{21}m$, они пересекаются в точке B(9,2925;88,5); двойное неравенство

$\frac{200}{23}m+\frac{177}{23}<n\le\frac{200}{21}m$ задаёт в плоскости **mon** область, ограниченную сторонами угла с вершиной в точке точке B(9,2925;88,5); стороны угла лежат на прямых $n=\frac{200}{23}m+\frac{177}{23}$; $n=\frac{200}{21}m$; величина угла равна $arctg\,\frac{\frac{200}{21}-\frac{200}{23}}{1+\frac{200}{21}\cdot\frac{200}{23}}=arctg\,\frac{400}{40483}$ или примерно $\approx 0{,}57^o$. В этой области лежат допустимые математической моделью значения m,n ; надо найти наименьшее n. Первое целое значение m из полученной области m=10. Проверим при m=10 выполнение двойного неравенства:

$$\begin{cases}\frac{200}{23}m+\frac{177}{23}<n\le\frac{200}{21}m\\ m=10\end{cases}\Leftrightarrow\frac{200}{23}\cdot10+\frac{177}{23}<n\le\frac{200}{21}\cdot10\Leftrightarrow\frac{2177}{23}<n\le\frac{2000}{21}\Leftrightarrow 94{,}6<n\le95{,}2\Leftrightarrow n=95$$

Конечно, в области можно найти немало значений n, при которых мат. модель справедлива, но n=95 является наименьшим из них. Отв.95.

10.26.(Л2020.В.22.19). На сайте проводится опрос: кого из артистов посетители сайта считают лучшим по итогам года? Каждый посетитель сайта голосует за одного артиста. На сайте отображается рейтинг каждого артиста - доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа.
А)Всего проголосовали 1000 посетителей сайта. Могла ли сумма рейтингов артистов оказаться равной 102?
Б) Может ли сумма рейтингов равняться нулю, если в голосовании приняли участие 300 посетителей, которые отдали голоса за 299 артистов?
В) Чему равна наибольшая возможная сумма рейтингов, если всего проголосовали 1000 посетителей сайта, а количество актёров, за которых можно отдать голос, не ограничено (каждый посетитель указывает любые имя и фамилию, за которые он голосует)? Отв. а)да; б)нет; в)200.

Решение А) Из условия следует, что количество актёров не определено, поэтому поэксперименируем с количеством актёров. Если актёр один, его рейтинг $R\in(0;100]$ и быть больше 100 не может. Если актёров два, их рейтинги $R_1,R_2,\in[0;100]$, но за счёт округления сумма может быть сделана больше 100. Например, если за одного проголосовали 495, а за другого 505 человек, то их доли в процентах равны 49,5% и 50,5%, что после округления до ближайшего целого, т.е. до рейтинга даст $R_1=50,R_2=51;R_1+R_2=101$.

Вывод: 1)сумма двух рейтингов **может превышать** сумму соответствующих процентов (равную 100%), в частности, на 1. В дальнейшем мы сможем увеличить это превышение играя на округлении чисел.

Если за актёра проголосовали 15 человек, то эта доля в процентах составит $\frac{15}{1000}\cdot100\%=1{,}5\%$, а рейтинг уже равен 2. Если таких групп по 15 человек (голосующих за своего актёра) наберётся 51 группа, то **их сумма рейтингов будет равна 2*51=102**. Оставшиеся 1000-15*51=235 голосов распределим по 4 голоса (или 3 голоса кому-то одному) на 59 других актёров, эти доли в процентах составят 0,4% или 0,3%, в обоих случаях рейтинги равны нулю. Отв.да.

Аналогично можно построить другую схему: если 6 актёров получили по 157 голосов, что соответствует рейтингам 16, а 7-ой актёр получил оставшиеся 1000-157*6=58 голосов и соответствующий рейтинг 6, то сумма рейтингов равна 16*6+6=96+6=102.

Б)Чтобы сумма неотрицательных рейтингов равнялась нулю, необходимо чтобы все рейтинги равнялись нулю. Покажем, что это невозможно. Один голос из 300 имеет долю в процентах равную $\frac{1}{300}\cdot100\%=0{,}33..\%$, что соответствует нулевому рейтингу. Но 299 актёров не могли получить по 1 голосу, ведь голосов всего 300, значит, как минимум один из них получит второй голос, а, значит, долю в процентах равную $\frac{2}{300}\cdot100\%=0{,}66..\%$ и рейтинг, равный единице. Ответ: нет.

В) Мы знаем, что **минимальное** количество голосов, дающее ненулевой рейтинг, это 5 голосов (доля в процентах равна $\frac{5}{1000}\cdot 100\% = 0{,}5\% \Leftrightarrow R=1$. Иначе, минимальная цена, по которой можно приобрести рейтинг, равный 1, равна 5 голосам, следовательно, за 1000 голосов, можно приобрести **максимальный** рейтинг, равный 1000:5=200. Ответ:**200.**

10.27. (Я2019.В2.19). **На доске в одну строку слева направо выписаны несколько не обязательно различных натуральных чисел. Известно, что каждое следующее число (кроме первого) или на 1 больше предыдущего, или в 2 раза меньше предыдущего. А) Может ли оказаться так, что первое число равно12, а седьмое равно 2?**
Б) Может ли оказаться так, что первое число равно 1200, а двадцать пятое равно 63?
В) Какое наименьшее количество чисел могло быть написано на доске, если первое число равно1200, а последнее равно 5? Ответ: а) да; б) нет; в)11.
Решение. А) Построив семь шагов (этапов) разветвляющегося графа с первой вершиной 12, замечаем арифметическую прогрессию $\div 12+(n-1)\cdot 1$, начинающуюся на первом этапе; $\div 6+(n-1)\cdot 1$ - на втором; $\div 3+(n-1)\cdot 1$ - на третьем; $\div 2+(n-1)\cdot 1$ - на пятом; $\div 1+(n-1)\cdot 1$ - на шестом; а также геометрическую прогрессию $16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, начинающуюся с первого или второго, или третьего члена. Анализ показывает, что цифра 2 может быть получена только двумя способами:12-13-14-7-8-4-2; или 12-6-3-4-2-1-2.
Б) Построив возможно большее количество шагов (этапов) разветвляющегося графа с первой вершиной 1200, замечаем арифметическую прогрессию $\div 1200+(n-1)\cdot 1$, начинающуюся на первом этапе; $\div 600+(n-1)\cdot 1$ - на втором; $\div 300+(n-1)\cdot 1$ - на третьем; $\div 150+(n-1)\cdot 1$ - на четвёртом; $\div 75+(n-1)\cdot 1$ - на пятом; $\div 38+(n-1)\cdot 1$ - на седьмом; $\div 19+(n-1)\cdot 1$ - на восьмом; $\div 10+(n-1)\cdot 1$ - на десятом; $\div 5+(n-1)\cdot 1$ - на одиннадцатом; немного позже ещё три прогрессии $\div 3+(n-1)\cdot 1$; $\div 2+(n-1)\cdot 1$; $\div 1+(n-1)\cdot 1$. Замечаем также отрезки этих прогрессий, начинающиеся с первого или второго, или третьего члена. Число 63 не может появиться в первых пяти прогрессиях, содержащих числа, большие, чем 63.
В прогрессии $\div 38+(n-1)\cdot 1$ число 63 встретится при n=26, но это будет на 7+26=33-м этапе, а не на 25-м, как требуется.
В прогрессии $\div 19+(n-1)\cdot 1$ число 63 встретится при n=45, но это будет на 8+45=53-м этапе, а не на 25-м, как требуется. Очевидно, что число 63 появится в пяти оставшихся прогрессиях на ещё более поздних этапах разветвляющегося графа. Таким образом, число 63 принадлежит множеству значений графа, но более поздних этапах :на 33, на 53 и далее. Ответ: б) нет. В)1200-600-300-150-75-76-38-19-20-10-5, 11 чисел – кратчайшая последовательность, первые четыре деления и последние два ускорить невозможно. Ответ: в)11.

10.28. (Я2019.В1.19). **На доске в одну строку слева направо выписаны несколько не обязательно различных натуральных чисел. Известно, что каждое следующее число (кроме первого) или на 1 больше предыдущего, или в 2 раза меньше предыдущего. А) Может ли оказаться так, что первое число равно 8, а шестое равно 5?**
Б) Может ли оказаться так, что первое число равно 1000, а двадцатое равно 62?
В) Какое наименьшее количество чисел могло быть написано на доске, если первое число равно 1000, а последнее равно 9? Ответ: а) да, например 8-4-2-3-4-5;есть ли другой способ? б) нет; в)11 (1000-500-250-125-126-63-64-32-16-8-9).

10.30. (Я2019.В41.19). Известно, что a,b,c,d,-попарно различные двузначные числа. а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d}=\frac{7}{19}$? Б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$? В) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a>3b$; $c>6d$? Решение. А) Представим числитель и знаменатель дроби $\frac{7}{19}$ в виде суммы двух различных двузначных слагаемых: $\frac{7}{19}=\frac{70}{190}=\frac{34+36}{94+96}=\frac{33+37}{92+98}=\ldots$,это можно сделать многими способами. Ответ: да.

Б) Предположим, что гипотеза $11\cdot\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ **справедлива, тогда** $11\cdot\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\Leftrightarrow(11a+11c)bd=(b+d)(ad+bc)\Leftrightarrow 10abd+10bcd=ad^2+cb^2$. Но любое трёхзначное число больше любого двузначного, поэтому $\begin{cases}10b>d\\10d>b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10bad>dad\\10dbc>bbc\end{cases}+\Rightarrow 10bad+10dbc>dad+bbc$, что противоречит следствию из гипотезы. Следовательно, гипотеза не нашла своего подтверждения. Ответ: нет.

В) Из условия и того факта, что любое трёхзначное число больше любого двузначного, **получаем**

$3<\frac{a}{b}<10;\quad 6<\frac{c}{d}<10;\ a>3b\Rightarrow 3b<a\Rightarrow 3b<99\Rightarrow b\le 32\Rightarrow b_{\max}=32.$

$c>6d\Rightarrow 6d<c\Rightarrow 6d<99\Rightarrow d\le 16\Rightarrow d_{\min}=10.$ Оценим наименьшее значение которое может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, для этого в числителе заменим a и c на меньшие 3b и 6d:

$\frac{a+c}{b+d}>\frac{3b+6d}{b+d}=3+\frac{3d}{b+d}=3+\frac{3}{\frac{b}{d}+1}$; дробь $\frac{b}{d}$ принимает наибольшее значение $\frac{32}{10}$, тогда

наименьшее значение дроби $\frac{3}{\frac{b}{d}+1}\ge\frac{3}{\frac{32}{10}+1}=\frac{30}{42}=\frac{15}{21}$, а значит, $3+\frac{3}{\frac{b}{d}+1}\ge 3+\frac{15}{21}=\frac{78}{21}$.

Итак, $\frac{a+c}{b+d}>\frac{78}{21}$, наименьшее значение дроби при фиксированных b=32, d=10 достигается при наименьших a и c: $a>3b\Rightarrow a>96\Rightarrow a\ge 97\Rightarrow a_{\min}=97$.

$c>6d\Rightarrow c>60\Rightarrow c\ge 61\Rightarrow c_{\min}=61$. Итак, $\min\frac{a+c}{b+d}=\frac{97+61}{32+10}=\frac{158}{42}=\frac{79}{21}$. Ответ **:** $\frac{79}{21}$ **.**

Ответ: а) да; б)нет; в) $\frac{79}{21}$.

10.31. (Л2017.В1.19). На доске написаны 4,5,6,7, 8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18. За один ход разрешается стереть произвольно три числа, сумма которых меньше 32 и отлична от сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах. А) Приведите пример трёх ходов. Б) Можно ли сделать 5 ходов? В) Какое наибольшее количество ходов можно сделать?

Решение. А) Первым ходом берём максимальный элемент, минимальный и средний, получающийся вычитанием из 31 суммы взятых: (18,4, 9). Далее процесс повторяем: берём максимальный 17, минимальный 5 и 8=(30-17-5). Далее: 16, 6, 7=(29-16-6). Пример трёх ходов: (18,4, 9), (17,5,8), (16,6,7).

Б) Предположим, что пять ходов сделать можно. Сумма всех данных чисел $S_{15}=\frac{4+18}{2}\cdot 15=165$ и за 5 ходов все числа должны быть стёрты (это исключает возможность 6 и более ходов), с другой стороны при пятикратном стирании сумм, меньших, чем 32, мы сотрём меньше, чем 5*32=160<165. Противоречие. Гипотеза не нашла своего подтверждения и должна быть отвергнута. Ответ: нет. В)Итак, доказано, что три хода сделать можно, а пять нельзя. Докажем конструктивно, что 4 хода сделать можно, т.е. построим максимальную последовательность из 4 ходов. Пример с 3 ходами подсказывает, что для 4 ходов 18 брать нельзя, т.к.4-й ход будет делать нечем: минимальная сумма 11+12+13=36>31. Пробуем по изложенному алгоритму: **(17,10,4), (16,9,5), (15,8,6),**

(14,7,?) нет подходящих чисел. Значит, 17 брать нельзя. Пробуем так (16,11,4), (15,10,5),(14,9,6), (13,8,7), суммы:31,30,29,28- удовлетворяют условию. Пример 4 ходов построен.

Заметим, что у авторов ошибка в решении, они использовали цифру 3, отсутствующую в условии, поэтому последовательность ходов неверна.

10.32. (Л2017.В2.19). На доске написаны 1,2,3, 4,5,6,7, 8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18. За один ход разрешается стереть произвольно три числа, сумма которых меньше 27 и отлична от сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах. А) Приведите пример четырёх ходов. Б) Можно ли сделать 6 ходов? В) Какое наибольшее количество ходов можно сделать? Ответ: б) нет, В) 5.

10.33. (Л2017.В5.19). На доске написаны 1,2,3, 4,…..,26,27. За один ход разрешается стереть произвольно три числа, сумма которых меньше 31 и отлична от сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах. А) Приведите пример четырёх ходов. Б) Можно ли сделать 9 ходов? В) Какое наибольшее количество ходов можно сделать? Ответ: б) нет, В) 5.

10.34. (Л2017.В3.19). Множество назовём «красивым», если его можно разбить на два подмножества, с одинаковой суммой чисел. А) Является ли множество $\{500;501;502....599\}$ **красивым? б) Является ли множество** $\{5;25;125,....5^{100}\}$ **красивым? В)Сколько красивых четырёхэлементных подмножеств у множества** $\{1;3;5;6;7;9;14\}$? Ответ: а)да, б)нет, в)7.

Решение. а) Так как суммы чисел, равноотстоящих от концов ряда, равны, то объединим их в 50 пар с равными суммами 1099. Любые 25 пар берём в одно множество А, оставшиеся 25 пар принадлежат второму множеству В. Сумма чисел в каждом множестве А и В равна 27475. Данное множество $\{500;501;502....599\}$является «красивым». **Б) Разбить множество** $\{5;25;125,....5^{100}\}$на два требуемых подмножества нельзя, т.к. $5+25+125+....+5^{99}<5^{100}$, действительно, $5+25+125+....+5^{99}=\frac{5(1-5^{98})}{1-5}=\frac{5^{99}-5}{4}$, очевидно, $\frac{5^{99}-5}{4}<5^{100} \Leftrightarrow 5^{99}-5<4\cdot 5^{100}$верно. Ответ:нет.

В) Всего четырёхэлементных подмножеств у семиэлементного множества $C_7^4\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=35$, начнём перебор: $\{1;14;\quad 6;9\}$, $\{1;9;\quad 3;7\}$, $\{1;7;\quad 3;5\}$, $\{1;3;6;\quad 14\}$, $\{1;6;7;\quad 14\}$, $\{1;3;5;\quad 9\}$, $\{3;9;\quad 5;7\}$. Всего **7** «красивых» четырёхэлементных подмножеств у множества $\{1;3;5;6;7;9;14\}$.

10.35. (Л2017.В4.19). Множество назовём «отличным», если его можно разбить на два подмножества, с одинаковой суммой чисел. А) Является ли множество $\{300;301;302....399\}$ **красивым? б) Является ли множество** $\{3;9;27,....3^{100}\}$ **отличным? В)Сколько отличных четырёхэлементных подмножеств у множества** $\{1;4;5;7;8;10;17\}$? Ответ: а)да, б)нет, в)7.

10.36. (Л2017.В9.19). Дана последовательность натуральных чисел, в которой каждое число, кроме первого и последнего, меньше среднего арифметического соседних с ним чисел. А)Приведите пример, последовательности, состоящей из пяти членов, с суммой, равной 40. Б) Может ли в

последовательности из пяти членов быть два равных числа? В) Какая минимальная сумма может быть в последовательности из шести членов?

Решение. А) $\{1;2;4;7;26\}$или$\{1;2;5;9;23\}$. Б) да, например $\{1;1;2;4;7\}$, нет ограничения на сумму. В) $\{1;1;2;4;7;11\}$, каждое из чисел:2,4,7,11. – минимально возможное, уменьшить их нельзя, если не менять порядка следования чисел. Например, подвинем вправо две рядом стоящие единицы: $\{2;1;1;4;8;13\}$-сумма увеличилась. А если так: $\{4;2;1;1;2;4\}$ сумма уменьшилась до 14. Теперь изменение порядка только ухудшит сумму этих минимально возможных чисел. Ответ :14.

10.37. (Л2017.В10.19). Дана последовательность натуральных чисел, в которой каждое число, кроме первого и последнего, больше среднего арифметического соседних с ним чисел последовательности. А) Приведите пример, последовательности, состоящей из пяти членов, с суммой, равной 50. Б) Может ли в последовательности из пяти членов быть два равных числа? В) Какая минимальная сумма может быть в последовательности из шести членов?

Решение. А) Например, На$\{2;7;11;14;16\}$или$\{14;13;11;8;4\}$. Б) да, например $\{14;14;13;11;8\}$, или $\{8;8;7;5;1\}$, или $\{7;7;6;4;1\}$, здесь нет ограничения на сумму. В) сначала изучим закономерности образования последовательностей из шести чисел: из пяти примеров все, кроме первого допускают добавление 1 слева, в начале последовательности: $\{1;14;13;11;8;4\}$ $\{1;14;14;13;11;8\}$ $\{1;8;8;7;5;1\}$ $\{1;7;7;6;4;1\}$, последняя обладает наименьшей суммой 26, попробуем её ещё уменьшить. Используем знакомый приём: сдвинем две рядом стоящие цифры в середину последовательности: $\{1;7;7;6;4;1\}$, со сдвоенными единицами $\{7;7;1;1;6;4\}$, как в предыдущем примере, не получится (догадайдесь,почему?), а со сдвоенными 7,7: $\{1;6;7;7;4;1\}$получится, если добиваясь симметрии, заменить цифры 6и4 на 5 и 5: $\{1;5;7;7;5;1\}$, пока сумма 26, но попробуем одновременно уменьшить числа 5и7: $\{1;4;6;6;4;1\}$, сумма 22, условие **«каждое число, кроме первого и последнего, больше среднего арифметического соседних с ним чисел» выполнено.** При следующем уменьшении на 1 всех некрайних членов $\{1;3;5;5;3;1\}$условие не выполняется ; дальнейшее, уменьшение на 1 наибольших чисел5 и5, даёт требуемое: $\{1;3;4;4;3;1\}$,сумма 16.Дальнейшее уменьшение натуральных чисел последовательности, с соблюдением условия, например, $\{1;2;3;3;2;1\}$ невозможно. Ответ:16.

10.41. (Л2017.В17.19). На столе перед нумизматом лежит 200 монет орлом кверху. За один ход нумизмат переворачивает любые 4 различные монеты. Разрешается переворачивать и те монеты, которые уже были задействованы в предыдущих ходах. А) Может ли после нескольких ходов ровно 6 монет оказаться кверху решкой? Б) Может ли после нескольких ходов ровно 3 монеты оказаться кверху решкой? В) Какое наибольшее количество монет может оказаться кверху решкой , если хотя бы одна монета должна в результате быть кверху орлом? Ответ: а)да; б)нет; в)198. Решение. Алгоритм назовём «1-реверсным», если в нём переворачивается повторно одна ранее переворачивавшаяся монета. Выделим 5 базовых алгоритмов: ноль-реверсный, 1-реверсный, 2-реверсный, 3-реверсный, 4-реверсный, в которых повторно переворачивают, соответственно, 0,1,2,3,4 монеты. Кроме базовых возможно применение комбинированных алгоритмов. При 0-реверсном алгоритме число решек (Р) увеличивается на 4 при каждом ходе, образуя арифметическую прогрессию $\div 4n$. Этим алгоритмом можно получить196 Р.Вот схема алгоритма:

о	о	о	о		о	о	о	о	
р	р	р	р		о	о	о	о	1 ход
р	р	р	р		р	р	р	р	2 ход

При 1-реверсном алгоритме возможно два варианта: а)если под реверс попадает решка, то прибавляется 2 решки при каждом ходе, образуя арифметическую прогрессию $\div 2(n+1)$. Этим алгоритмом можно получить198 Р.Вот схема алгоритма:

о	о	о	о		о	о	о	о	
р	р	р	р		о	о	о	о	1 ход
р	р	р	о		р	р	р		2 ход

Б)Если на каком-то ходе под реверс попадает орёл, то прибавляется 4решки. Вот схема алгоритма:

о	о	о	о		о	о	о	о		о	о	о	о			о
р	р	р	р		о	о	о	о		о	о	о	о			1 ход
р	р	р	о		р	р	р									2 ход
р	р	р	р		р	р	р	р		р	р					3 ход

При 2-реверсном алгоритме теоретически возможны три варианта: а)если под реверс попадают 2 решки, то количество решек не изменяется и остаётся равным 4. Б) под реверс попадают два орла; такая ситуация невозможна, т.к.после первого хода реверсных орлов нет. В) под реверс попадают один орёл и одна решка, такая ситуация невозможна, т.к. после первого хода реверсных орлов нет. Этот алгоритм не достигает цели задачи.

При 3-реверсном алгоритме на втором ходе образуется 3 реверсных орла и 1 реверсная решка, третьим ходом можно добавить либо 4Р, либо 2Р. Вот схема алгоритма в случае +4Р :

о	о	о	о													о
р	р	р	р													1 ход
р	о	о	о		р											2 ход
р	р	р	р		р	р										3 ход

Вот схема алгоритма в случае +2Р:

о	о	о	о													о
р	р	р	р													1 ход
р	о	о	о		р											2 ход
р	о	р	р		о	р										3 ход

4-реверсный алгоритм даёт следующие количества решек:0,4,0,4,… Заметим, что все 5 базовых алгоритмов дают чётное количество решек, поэтому 3Р получить невозможно. **Ответ**: 6Р можно получить, как показано, например, 1-реверсным или 3-реверсным алгоритмами; 3Р получить нельзя, т.к.все алгоритмы сохраняют чётность числа решек(после первого хода имеем 4Р, их чётность инвариантна относительно алгоритмов). Можно получить 198,200 решек, 199 нельзя. Максимальное количество при данном условии 198.

10.42. (Л2017.В18.19). На столе перед нумизматом лежит 2025 монет орлом кверху. За один ход нумизмат переворачивает любые 6 различных монет. Разрешается переворачивать и те монеты, которые уже были задействованы в предыдущих ходах. А) Может ли после нескольких ходов ровно 16 монет оказаться кверху решкой? Б) Может ли после нескольких ходов ровно 9 монет оказаться кверху решкой? В) Какое наименьшее количество монет может оказаться кверху орлом в результате конечного числа ходов? Ответ: а)да; б)нет; в)1. Решение. При 0-реверсном алгоритме число решек увеличивается на 6 и возрастает по закону арифметической прогрессии $\div 6n$, 6n-число решек после n-ого хода. При 1-реверсном алгоритме возможны 2 варианта: 1)если под реверс попадает Орёл, то прибавляется 6Р; 2)если под реверс попадает Решка, то прибавляется 4Р. В обоих вариантах добавляется к 6Р после первого хода чётное число решек. Так что этим алгоритмом нечётного числа решек получить невозможно. Рассмотрение 2,3,4,5,6-реверсных алгоритмов показывает, что все они сохраняют чётность числа решек, полученных после первого хода(6 решек), поэтому 9Р получить нельзя. 16Р можно получить, сделав два хода 0-реверсным алгоритмом (6+6=12) и один ход 1-реверсным алгоритмом (12+4=16). Замечая, что $2025 = 337 \cdot 6 + 3$, можем применить 337 ходов

0-реверсного алгоритма, получив 2022Р, затем 1 ход 2-реверсного алгоритма, который добавит 2Р, при условии, что под реверс попадут две решки, что даст 2024Р, больше решек получить нельзя, останется 1 орёл, это минимальное количество орлов. Ответ: в)1.

10.43. (Л2017.В19.19). На столе перед нумизматом лежит 2017 монет орлом кверху. За один ход нумизмат переворачивает любые 5 различных монет. Разрешается переворачивать и те монеты, которые уже были задействованы в предыдущих ходах. А) Может ли после 5 ходов ровно 21 монета оказаться кверху решкой? Б) Может ли после 5 ходов ровно 20 монет оказаться кверху решкой? В) За какое наименьшее количество ходов можно сделать так, чтобы все монеты оказались решкой кверху? Ответ: а)да; б)нет; в)405.

10.44. (Л2017.В20.19). На столе перед нумизматом лежит 1000 монет орлом кверху. За один ход нумизмат переворачивает любые 7 различных монет. Разрешается переворачивать и те монеты, которые уже были задействованы в предыдущих ходах. А) Может ли после 10 ходов ровно 66 монет оказаться кверху решкой? Б) Может ли после 10 ходов ровно 65 монет оказаться кверху решкой? В) За какое наименьшее количество ходов можно сделать так, чтобы все монеты оказались решкой кверху? Ответ: а)да; б)нет; в)144.

10.45. (М.А.А.). Можно ли в бесконечно убывающей последовательности $1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};.....$ **выбрать а) три числа; б)четыре числа; в)пять чисел, образующих арифметическую прогрессию? Ответ: а)да; б)да; в)да.**

А) Решение. Пусть $a_1=\frac{1}{k};\quad a_2=\frac{1}{k+l}$ первый и второй члены искомой арифметической прогрессии, найдём разность прогрессии $d=a_2-a_1=\frac{1}{k+l}-\frac{1}{k}=\frac{-l}{(k+l)k}$, тогда третий член искомой прогрессии $a_3=\frac{1}{k+l}+\frac{-l}{(k+l)k}=\frac{k-l}{(k+l)k}$. Выясним, когда числитель дроби $a_3=\frac{k-l}{(k+l)k}$ равен единице, это будет, если дробь сократима на (k-l) или если (k-l) =1. Рассмотрим вторую гипотезу $k-l=1\Leftrightarrow k=l+1$, тогда $a_1=\frac{1}{l+1};\quad a_2=\frac{1}{2l+1}\ a_3=\frac{k-l}{(k+l)k}=\frac{1}{(2l+1)(l+1)}$, прогрессия примет вид $\div\frac{1}{l+1};\frac{1}{2l+1};\frac{1}{(2l+1)(l+1)}$, например, при L=1 $\div\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{6};d=-\frac{1}{6}$; при L=2 $\div\frac{1}{3};\frac{1}{5};\frac{1}{15};d=-\frac{2}{15}$;

при L=3 $\div\frac{1}{4};\frac{1}{7};\frac{1}{28};d=-\frac{3}{28}$;и так далее. Кроме этого, неограниченное количество прогрессий из трёх членов можно получить из записанных прогрессий, умножая знаменатель на натуральное число n: $\div\frac{1}{2n};\frac{1}{3n};\frac{1}{6n};d=-\frac{1}{6n}$; или $\div\frac{1}{3n};\frac{1}{5n};\frac{1}{15n};d=-\frac{2}{15n}$; или $\div\frac{1}{4n};\frac{1}{7n};\frac{1}{28n};d=-\frac{3}{28n}$ и т.д.

Рассматривая первую гипотезу, исследуем случаи, когда дробь сократима. Очевиден случай $k=2l\Rightarrow a_3=\frac{k-l}{(k+l)k}=\frac{l}{(3l)2l}=\frac{1}{6l}$, это совпадает с первой найденной нами прогрессией. Другую прогрессию получим при $k = 3l$; $\div \frac{1}{3l}; \frac{1}{4l}; \frac{1}{6l}; d = -\frac{1}{12l}$, а вот при $k = 4l$ нужной прогрессии не получается. Первая гипотеза требует дальнейшего исследования.

Б) Пусть $a_1 = \frac{1}{k}$; $a_2 = \frac{1}{k+l}$ первый и второй члены искомой арифметической прогрессии, тогда разность прогрессии $d = a_2 - a_1 = \frac{1}{k+l} - \frac{1}{k} = \frac{-l}{(k+l)k}$, следовательно, $a_3 = \frac{1}{k+l} + \frac{-l}{(k+l)k} = \frac{k-l}{(k+l)k}$, а четвёртый член арифметической прогрессии $a_4 = \frac{k-l}{(k+l)k} + \frac{-l}{(k+l)k} = \frac{k-2l}{(k+l)k}$. Как и в предыдущем пункте а), рассмотрим две гипотезы: если $k - 2l = 1 \Rightarrow k = 2l + 1$, тогда третий и четвёртый члены прогрессии равны $a_3 = \frac{k-l}{(k+l)k} = \frac{2l+1-l}{(2l+1+l)(2l+1)} = \frac{l+1}{(3l+1)(2l+1)} = \frac{1}{6}, при \quad l = 1$.

$a_4 = \frac{k-2l}{(k+l)k} = \frac{2l+1-2l}{(2l+1+l)(2l+1)} = \frac{1}{(3l+1)(2l+1)} = \frac{1}{12}, при \quad l = 1$.

$a_1 = \frac{1}{2l+1} = \frac{1}{3}$; $a_2 = \frac{1}{2l+1+l} = \frac{1}{3l+1} = \frac{1}{4}$. Итак, прогрессия из четырёх членов получена: $\div \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{12}; d = -\frac{1}{12}$. Очевидно, что $\div \frac{1}{3n}; \frac{1}{4n}; \frac{1}{6n}; \frac{1}{12n}; d = -\frac{1}{12n}$ это бесконечное множество прогрессий из четырёх членов, выделенных из исходной убывающей последовательности, одна из них имеет вид: $\div \frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \frac{1}{12}; \frac{1}{24}; d = -\frac{1}{24}$.

Из множества построенных прогрессий особыми свойствами обладают две: $\div \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}; d = -\frac{1}{6}$ и $\div \frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \frac{1}{12}; \frac{1}{24}; d = -\frac{1}{24}$. Обобщение именно этих прогрессий даст ключ к построению прогрессий любой длины, состоящих из любого заданного числа слагаемых, выделенных из **убывающей последовательности** $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; .....$ (имеющей отношение к гармоническому ряду). Приведём дроби, стоящие в прогрессиях, к общему знаменателю: $\div \frac{3}{6}; \frac{2}{6}; \frac{1}{6}$; $\div \frac{4}{24}; \frac{3}{24}; \frac{2}{24}; \frac{1}{24}$; закономерность проявляется, она станет явной, если знаменатели записать с помощью знака факториал: $\div \frac{3}{3!}; \frac{2}{3!}; \frac{1}{3!}$; $\div \frac{4}{4!}; \frac{3}{4!}; \frac{2}{4!}; \frac{1}{4!}$.

В)С помощью найденной закономерности проверим нашу гипотезу для прогрессии из пяти членов: $\div \frac{5}{5!}; \frac{4}{5!}; \frac{3}{5!}; \frac{2}{5!}; \frac{1}{5!}$. После сокращения числителя и знаменателя на 5,4,3 и 2 соответственно, получаем числители, равные 1, следовательно, все дроби являются членами исходной убывающей последовательности. Попарные разности между последующим и предыдущим членами последовательности равны $-\frac{1}{5!}=-\frac{1}{120}$, следовательно, выделенная последовательность из исходной убывающей последовательности является арифметической прогрессией.

Обобщая рассмотренный случай прогрессии из пяти членов на прогрессию из k членов, получим: $\div\frac{k}{k!};\frac{k-1}{k!};\frac{k-2}{k!};\frac{k-3}{k!};...;\frac{1}{k!};d=-\frac{1}{k!}.$

10.46. (Л2017.В31.19). Можно ли в бесконечно убывающей последовательности $1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};.....$ **выбрать а) шесть чисел; б)пятьдесят чисел; в)бесконечное множество чисел, образующих арифметическую прогрессию? Ответ: а)да; б)да; в)нет.**

10.47. (Л2017.В37.19). Математик задумал несколько различных целых чисел и выписал набор этих чисел все их возможные суммы (по два, по три и т.д.) на доске в порядке неубывания. Например, если бы он задумал числа 1,-5,6, то на доске был бы выписан набор -5,-4, 1,1,2,6,7.

А) На доске был выписан набор -5,-2,3,4,7,9,12. Какие числа задумал математик?

Б)Для некоторых трёх задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно определить задуманные числа?

Решение. Если задуманы два числа, например, a,b, то получится набор из 3 чисел: a,b,c,a+b.

Если задуманы три числа, например, a,b,c, то получится набор из 7 чисел: a,b,c,a+b,b+c,a+c,a+b+c.

Если задуманы четыре числа, например, a,b,c,d, то получится набор из 15 чисел: a,b,c,d, затем из $C_4^2=\frac{4\cdot3}{1\cdot2}=6$ слагаемых по два, из $C_4^3=\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}=4$ слагаемых по три, $C_4^4=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=1$, т.е. всего 15 чисел. Итак, задумано три числа. Отрицательные числа среди них есть. Сколько из них отрицательных? Точно, что не три, т.к. в этом случае все числа были бы отрицательными. Значит, отрицательных чисел – одно или два. Если бы задуманных отрицательных было два, то в наборе как минимум стояло бы три отрицательных: каждое из них и их сумма, а это не так. Следовательно, задумано одно отрицательное число, и это a=-5. Если a+b=-2, то b=3. Так как b>0,c>0, то b+c=12, как наибольшему положительному числу из набора. Значит, c=9, проверяем остальные условия: a+b+c=7, a+c=4, верно. Ответ:-5,3,9.

Б)Числовые эксперименты показывают, что

если **задуманы a,b,-a-b,** то в наборе будут числа: a,b,-a-b,-a,-b,0,a+b.

Если же задуманы -a,-b,a+b, то в наборе будут числа: a,b,-a-b,-a,-b,0,a+b. Так как наборы совпадают, а задуманы разные числа, то **ответ: нет.**

10.48. (Л2017.В38.19). Математик задумал несколько различных целых чисел и выписал набор этих чисел все их возможные суммы (по два, по три и т.д.) на доске в порядке неубывания. Например, если бы он задумал числа 1,-5,6, то на доске был бы выписан набор -5,-4, 1,1,2,6,7.

А) На доске был выписан набор -9,-7,-5,-3,-2,2,4. Какие числа задумал математик?

Б)Для некоторых четырёх задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно определить задуманные числа? Отв: а)-7,-2,4;б)нет.

10.49. Решите в целых числах уравнение $n!+6^n+11=k^2$.

Решение этого необычного уравнения начнём с численного эксперимента: будем вычислять значения левой части при последовательных значения натурального n с целью выявления закономерности поведения левой части.

n	n!	6^n	$n!+6^n+11$	k	
1	1	6	18	$\varnothing$	
2	2	36	49	± 7	
3	6	216	233	$\varnothing$	
4	24	1296	1331	$\varnothing$	
5	120	7776	7907	$\varnothing$	Последняя цифра суммы стабилизировалась и всегда будет равна 7, но квадрат натурального числа на 2,3,7,8 никогда не оканчивается. Поэтому больше корней нет.
6	720	46656	…7	$\varnothing$	

Отв. $n=2; k=\pm 7$.

10.50. Решите в целых числах уравнение $n!+4n-9=k^2$. Отв. $n=3, k=\pm 3$; $n=2, k=\pm 3$.

10.51. Решите в целых числах уравнение $n!-3n+28=k^2$. Отв. $n=3, k=\pm 5$.

10.52. Решите в целых числах уравнение $n!+3n=k^2$. Отв. $n=4, k=\pm 6$; $n=1, k=\pm 2$.

10.53. Решите в целых числах уравнение $12n!+11^n+2=k^2$. Отв. $n=1; k=\pm 5$.

10.54. (Л.2020.В33.19). Учитель написал на доске два различных натуральных числа a и b. Девочка нашла их сумму a+b, разность a-b, произведение a*b и частное a:b. Полученные четыре числа мальчик сложил и сумму разделил на частное a:b. Может ли у мальчика получиться : а)49; б)2020; в) 2025? Ответ: а)да; б)нет; в)да. ***Подсказка:*** у мальчика получилось $(b+1)^2$

10.55. (Л.2020.В34.19). Учитель написал на доске два различных натуральных числа a и b. Девочка нашла их сумму a+b, разность a-b, произведение a*b и частное a:b. Полученные четыре числа мальчик сложил и сумму умножил на частное a:b. Может ли у мальчика получиться : а)49; б)2020; в) 2025? Ответ: а)да; б)нет; в)да. ***Подсказка:*** у мальчика получилось $\left(a+\frac{a}{b}\right)^2$.

10.56.Бесконечная последовательность a,b,c,d,… получена почленным сложением двух геометрических прогрессий. Может ли эта последовательность начинаться с чисел: а)1,1,3,5; б)1,2,3,5; в)1,2,3,4.

10.57. (ЕГЭ2023,В314,№18). Из пары натуральных чисел (a,b), где a>b, за один ход получают пару

(a+b;a-b).

А)Можно ли за несколько ходов из пары (150;7) получить пару, большее число в которой равно 600?

Б)Можно ли за несколько ходов получить из пары (150;7) пару (1224;1190)?

В)Какое наименьшее a может быть в паре (a;b), из которой за несколько ходов можно получить пару(1224;1190)?

Отв. а)да;б)нет; в)612.

Решение

А)Выполним небольшой числовой эксперимент, сделав нескольно разрешённых в условии шагов, для выявления закономерности и для наглядности поместим результаты в таблицу:

Номер шага	1	2	3	4	5	6	7
Полученная пара	157;143	300;14	314;286	600;28	628;572	1200 ;56	1256;1144
Поиск закономерности	$1\cdot157;1\cdot143$	$2\cdot150;2\cdot7$	$2\cdot157;2\cdot143$	$4\cdot150;4\cdot7$	$4\cdot157;4\cdot143$	$8\cdot150;8\cdot7$	$8\cdot157;8\cdot143$

Таким образом, пара с числом 600 получена. Отв. а) да.

Б)Отыскивая закономерность, замечаем, что за чётное количество шагов (2;4;6;…,2n) получаем пары:

$$(2\cdot150;\quad 2\cdot7)\to(4\cdot150;\quad 4\cdot7)\to(8\cdot150;\quad 8\cdot7)\to\ldots(2^n\cdot150;\quad 2^n\cdot7)\ldots,$$ обе компоненты которых кратны 2^n.

За нечётное количество шагов (2n+1) получаем пары:

$$(1\cdot157;\quad 1\cdot143)\to(2\cdot157;\quad 2\cdot143)\to(4\cdot157;\quad 4\cdot143)\to\ldots(2^n\cdot157;\quad 2^n\cdot143)\ldots,$$ обе компоненты которых кратны 2^n.

Однако, для пары **(1224;1190) это необходимое условие не выполнено.** **Ответ.б) нет.**

В)Нам известно конечное звено цепочки (1224;1190), поэтому применим метод решения задачи «с конца», т.е. метод анализа: из какой пары можно получить пару (1224;1190)? Пусть из пары натуральных чисел (x;y), тогда $\begin{cases}x+y=1224;\\x-y=1190;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=2414;\\2y=34;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1207;\\y=17;\end{cases}$ т.о.найдена пара, предшествующая требуемой паре $(1207;17)\to(1224;1190)$. Но из какой пары следует пара $(1207;17)$? Аналогично, составляя и решая систему в натуральных числах, получим $(612;595)\to(1207;17)\to(1224;1190)$. Можно ли получить пару $(612;595)$ по разрешённому алгоритму из какой-то предшествующей пары?

Предположим, что можно, тогда $\begin{cases}x+y=612;\\x-y=595;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=1207;\\2y=17;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=603{,}5;\\y=8{,}5;\end{cases}x,y\notin N\to\varnothing$. К отрицательному ответу можно было прийти быстрее, заметив, что по доказанному ранее свойству БЗ1, сумма и разность натуральных чисел имеют одинаковую чётность, а в нашем случае это не так. Следовательно, наименьшее значение б*о*льшей компоненты в паре, из которой можно получить (1224;1190), это число 612. Отв. $a_{\min} = 612.$

10.58. (ЕГЭ2023,В311,№18). Из пары натуральных чисел (a,b), где a>b, за один ход получают пару

(a+b;a-b).

А)Можно ли за несколько ходов из пары (50;9) получить пару, большее число в которой равно 200?

Б)Можно ли за несколько ходов получить из пары (50;9) пару (408;370)?

В)Какое наименьшее а может быть в паре (a;b), из которой за несколько ходов можно получить пару (408;370)?

Отв. а)да;б)нет; в)204.

10.59. (ЕГЭ2023,В310,№18). Из пары натуральных чисел (a,b), где a>b, за один ход получают пару

(a+b;a-b).

А)Можно ли за несколько ходов из пары (100;1) получить пару, большее число в которой равно 400?

Б)Можно ли за несколько ходов получить из пары (100;1) пару (806;788)?

В)Какое наименьшее а может быть в паре (a;b), из которой за несколько ходов можно получить пару (806;788)?

Отв. а)да;б)нет; в)403.

Заключение

В пособии даны элементы инновационной образовательной технологии в применении к числовой линии школьного курса математики.

Образовательная технология проектирования, построения и применения многоуровневой системы задач (МСЗ) и адекватных им специальных и универсальных учебных действий, содержит несколько этапов:

- выделение уровней внешней дифференциации и подуровней внутренней дифференциации; составление перечней базовых задач темы (содержащих в себе основные идеи, теории и методы);
- построение матричной модели МСЗ (отражающей предметную и деятельностную компоненты системы) и заполнение матрицы конкретными задачами темы;
- построение учебного процесса (введение нового материала, организация фронтальной и индивидуальной работы, проверочные, зачётные, контрольные работы, задания, развивающие и углубляющие тему; организация индивидуальной траектории, мониторинг, прогнозирование) на основе МСЗ. Пример зачётной работы по теме дан в приложении.

Сформулированные базовые задачи и адекватные им действия (специальные и универсальные) являются фундаментальным ядром выбранного раздела программы. А применяемая для этого технология является средством фундаментализации содержания общего математического образования.

Выделение фундаментального ядра в содержании среднего математического образования: основных понятий, идей, теорий, базовых задач (содержащих всё это в концентрированном виде) и адекватных им специальных и общих учебных действий позволяет построить процедуру оценки сформированности учебных действий в рамках ФГОС.

Показано, что образовательная технология является инструментом проектирования, формирования, а в перспективе и средством измерения степени сформированности специальных и универсальных учебных действий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Максютин, А.А. Проектирование системы учебных задач, ориентированной на формат ЕГЭ по математике/ Г.А.Клековкин, А.А.Максютин // Стандарты и мониторинг в образовании.-№1.-2011.-С.46-49.
2. Максютин, А.А. Задачный подход в обучении математике / Г.А.Клековкин, А.А.Максютин // СФ МГПУ-Самара.-2009.-184 С.
3. Максютин, А.А. Многоуровневая система учебных задач: проектирование и применение / А.А.Максютин // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – Специальный выпуск «Актуальные проблемы гуманитарных исследований». – Т.1. – 2006. – С. 209-219.
4. Максютин, А.А. Задачный подход к обучению математике и его реализация в условиях ЕГЭ / Г.А.Клековкин, А.А.Максютин // Образование и наука. Известия УрО РАО. – Приложение №2 (6), февраль 2007.- С. 135-144.
5. Максютин А.А. Математика-10. Индивидуальные домашние задания по алгебре, началам анализа и геометрии для учащихся 10-х классов. – Самара, 2002.- 588 с.
6. Максютин А.А. Новый подход к решению задач в целых числах//Проблемы реализации ФГОС при обучении математике в основной и старш ей общеобразовательной школе.Монография.//Самара.-2014.-с.216-249.

Приложение: зачётная работа по числовой линии школьного курса.

Зачетные задания на тему «Числа (натуральные, рациональные, иррациональные)»

Вариант 1

1. Докажите, что квадрат всякого нечетного числа, уменьшенный на 1, делится на 8.
2. Решите в целых числах уравнение $2x+3y=7$. Выделите те решения уравнения, при которых сумма x^2+y^2 принимает наименьшее значение.
3. Пусть *a* равно номеру Вашего почтового индекса, *b* – равно номеру Вашего дома.
   1) чему равно НОК (a,b)? 2)чему равен НОД (a,b)? 3)вычислите НОК (a,b) · НОД (a,b); 4)сколько делителей имеет число $a \cdot b$?
4. При каком наибольшем натуральном n число 2001! делится на 21^n?
5. Решите диофантово уравнение
   а) $x^2-47=y^2$;   б) $x^2-48=y^2$.
6. Сколько среди четырехзначных чисел найдется таких, которые делятся на 43, но не делятся на 47?
7. Сформулируйте признак делимости на 7.
8. Найдите общий вид натуральных чисел, которые при делении на 8 дают остаток 6, а при делении на 3 дают остаток 1.
9. Докажите, что $\forall n \in N$ $\left(5\cdot 9^{n-1}+2^{4n-3}\right)$ делится на 7.
10. Докажите, что не существует рационального числа r такого, что $10^r = 2$.
11. При каких целых значениях n уравнение $4x^2+nx+9=0$ имеет рациональные корни, сумма которых

является целым числом?

12. Найдите сумму трехзначных чисел, полученных при всевозможных перестановках цифр 3, 3, 2.

13. Сумма цифр двузначного числа равна 6. Если к этому числу прибавить 18, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

14. Двузначное число втрое больше суммы своих цифр, а квадрат этой суммы цифр равен утроенному искомому числу. Найдите это число.

15. Вычислите $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}$

16. Сумма числителя и знаменателя дроби рана 4140. После её сокращения получилось 7/13. Какова была дробь до сокращения ?

17. Пусть r - рациональное число; α - иррациональное число. Что можно утверждать о числе $a)\ \sqrt{r+\alpha}$? $б)\ r+\sqrt{\alpha}$?

18. Упростите выражение:

$$\frac{\sqrt{34-24\sqrt{2}}+1}{\sqrt{18-8\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}}.$$

19. Чему равно выражение $\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[3]{\ldots}}}}}$, если количество радикалов, записанных по указанному правилу, неограничено?

20. В шахматном турнире участвовали учащиеся десятых и девятых классов. Десятиклассников было в 10 раз больше, чем девятиклассников и они набрали вместе в 4,5 раза больше очков, чем все девятиклассники. Сколько очков набрали девятиклассники, если каждый играл с каждым один раз?

21. **Исследовательское задание.** На доске было выписаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 3. 1)Может ли сумма всех оставшихся чисел равняться 13, если сначала по одному разу были выписаны числа 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10? 2)Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 21, если сначала по одному разу были выписаны все натуральные числа от 140 до 191 включительно? 3)Известно, что на доске остались ровно два числа, а сначала по одному разу были выписаны все натуральные числа от 140 до 191 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на другое из них? **(3.19)**

22. а)Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого вторая цифра в 14 раз меньше произведения двух других цифр? б) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого сумма всех цифр равна 7 ? в) Найдите наибольшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1,2,3,4,5,6,7, 9. Ответ обоснуйте.

23. Три различных натуральных числа являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника. а)Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них равняться $\frac{3}{2}$? б) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них равняться $\frac{5}{4}$? в)Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине число равно 18? Отв. а)да, например,10,11,15. б)нет. в) $\frac{25}{17}$

Ответы к Варианту №1

1	2	3	4	5	6	7	8
По	X=2		330	А) $(\pm 24;\pm 23)$	205		24n+22

модулю 2	Y=1 T=-1			Б) $(\pm13;\pm11)$; $(\pm8;\pm4)$			

9	10	11	12	13	14	15	16
	Противоречие С делимостью на 5	±20	888	24	27	0.9	

17	18	19	20	21	22
А)иррац Б)иррац	$\frac{3\sqrt{2}-3}{3-2\sqrt{2}}=3+3\sqrt{2}$	$\sqrt[8]{54}$	10 очков	А)может; б)нет;в) $\frac{191}{141}$	а)например 847, 748 б)нет; в)97 635 241

Зачетные задания на тему «Числа (натуральные, рациональные, иррациональные)»
Вариант 2

1. Докажите, что квадрат натурального числа или делится на 4, или при делении на 4 дает остаток 1.
2. Решите в целых числах уравнение $3x-2y=8$. Выделите те решения уравнения, при которых сумма x^2+y^2 принимает наименьшее значение.
3. Пусть a равно номеру Вашего почтового индекса, b – равно номеру Вашего дома.
1) чему равно НОК(a,b); 2)чему равен НОД(a,b);3)вычислите НОК(a,b) · НОД(a,b);4)сколько делителей имеет число $a \cdot b$?
4. При каком наибольшем натуральном n число 2002! делится на 22^n?
5. Решите диофантово уравнение
а) $x^2-2xy-3y^2=5$; б) $x^2-2xy-3y^2=6$.

6. Сколько среди четырехзначных чисел найдется таких, которые делятся на 41, но не делятся на 43?
7. Сформулируйте и докажите признак делимости на 8.
8. Найдите общий вид натуральных чисел, которые при делении на 9 дают остаток 8, а при делении на 4 дают остаток 3.
9. Докажите $\forall n \in N$ $\left(16^n-4^n-3n\right)$ делится на 9.
10. Докажите, что число $\sqrt{5}$ не является рациональным.
11. При каких целых значениях n уравнение $nx^2+20x+9=0$ имеет рациональные корни, сумма которых является целым числом?
12. Найдите сумму четырехзначных чисел, полученных при всевозможных перестановках цифр 8, 3, 3, 4.
13. Если некоторое двузначное число умножить на сумму его цифр, то получится 405. Если число, написанное теми же цифрами в обратном порядке, умножить на сумму его цифр, то получится 486. Найдите это число.
14. Найдите двузначное число, которое на 12 больше суммы квадратов его цифр и на 16 больше удвоенного произведения его цифр.
15. Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{25\cdot 26}+\frac{1}{26\cdot 27}+\frac{1}{27\cdot 28}+\frac{1}{28\cdot 29}+\frac{1}{29\cdot 30}\right)\cdot 150+1{,}03:[10{,}3\cdot(x-1)]=11$$

16. Школьник прочитал книгу за 3 дня. В первый день он прочитал 0,2 всей книги и ещё 16 страниц, во второй день 0,3 остатка и ещё 20 страниц. В третий - 0,75 нового остатка и последние 30 страниц. Сколько страниц в книге?
17. Докажите, что: а) сумма рационального и иррационального чисел есть число иррациональное; б) произведение рационального (отличного от нуля) и иррационального чисел есть число иррациональное.

18.Решите уравнение и укажите два целых числа, между которыми заключён корень данного уравнения. Укажите ближайшее к корню целое число: $(5-2\sqrt{3})x=37-20\sqrt{3}$.

19. Чему равно выражение $\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[3]{\ldots}}}}}$, если количество радикалов, записанных по указанному правилу, неограничено?

20. Построены четырёхугольник, пятиугольник, шестиугольник, …и т.д. Число диагоналей во всех построенных многоугольниках равно 800. Сколько построено многоугольников?

21. **Исследовательское задание.** На доске было выписаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 5. 1)Может ли сумма всех оставшихся чисел равняться 20, если сначала по одному разу были выписаны числа 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13? 2)Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 45, если сначала по одному разу были выписаны все натуральные числа от 103 до 208 включительно? 3)Известно, что на доске остались ровно два числа, а сначала по одному разу были выписаны все натуральные числа от 103 до 208 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на другое из них?

22. а)Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого вторая цифра в 12 раз меньше произведения двух других цифр? б) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого сумма всех цифр равна 9? в) Найдите наименьшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1,2,3,5,6,7,8, 9. Ответ обоснуйте.

23. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 792 и а)пять; б) четыре; в)три из них образуют геометрическую прогрессию?

Отв. $792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$а)нет; б)нет; в) да:1,2,4.

24. Три различных натуральных числа являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника. а)Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них равняться $\frac{13}{7}$? б) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них равняться $\frac{8}{4}$? в)Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине число равно 25? Отв. а)да, например,7,10,13. б)нет. в) $\frac{35}{24}$

Ответы к Варианту № 2

1	2	3	4	5	6	7	8	22
По модулю 4	$x = 2 + 2t;$ $y = -1 + 3t$ $t \in Z$		182+16+ +1=199	А) $(4;1);(-4;-1);$ $(2;-1);(-2;1)$ Б)нет целых	215		36n+35	а)869,др.нет; б)нет; в)12 375 869.

11	12	13	14	15	16	19	20	21	
	59994			101		$\sqrt[5]{18}$	15	А)может; б)нет; в) $\frac{205}{103}$	

Исследовательское задание. На доске было выписаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 5. 1)Может ли сумма всех оставшихся чисел равняться 24, если сначала по одному разу были выписаны числа 3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14? 2)Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 45, если сначала по одному разу были выписаны все натуральные числа от 53 до 158 включительно? 3)Известно, что на доске остались ровно два числа, а сначала по одному разу были выписаны все натуральные числа от 53 до 158 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на другое из них? Отв.а)да; б)нет ; в) $\frac{155}{53}$

Исследовательское задание. а)Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого вторая цифра в 18 раз меньше произведения двух других цифр? б) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого сумма всех цифр равна 7? в) Найдите наибольшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1,2,3,5,6,7,8, 9. Ответ обоснуйте. Отв.а)429;б)нет; в)98 372 615.

Задачи С6 для вариантов 2011г.

А.А. Максютин

№1 В шахматном турнире участвовали учащиеся десятых и девятых классов. Десятиклассников было в 10 раз больше, чем девятиклассников и они набрали вместе в 4,5 раза больше очков, чем все девятиклассники. Сколько очков набрали девятиклассники, если каждый играл с каждым один раз?

Ответ: 10 очков.

№2 Построены четырёхугольник, пятиугольник, шестиугольник, …и т.д. Число диагоналей во всех построенных многоугольниках равно 800. Сколько построено многоугольников?

Ответ: 15.

№3 Просуммированы все натуральные числа, не превосходящие 1000 и имеющие нечётное число делителей. Чему равна полученная сумма?

Ответ: 10416.

№4 Для нумерации страниц книги потребовалось 2322 цифры. Страницы нумеруются с первой до последней. Сколько страниц в книге?

Ответ: 810.

№5 Для нумерации книги с первой страницы до последней потребовалось в n раз больше цифр, чем страниц в книге. Сколько страниц в книге? (n- целое положительное число).

Ответ: 108 или 1107.

№6 Давным-давно ученики перемножали многозначные числа столбиком, не используя калькулятор или мобильный телефон. Учитель предложил трём учащимся перемножить два числа. После умножения множимого на отдельные цифры множителя один учащийся при сложении частных произведений забыл удержать в уме одну единицу некоторого разряда. Разделив при проверке результат на множитель, он получил в частном 971, а в остатке 214.

Второй ученик в указанном разряде не сделал ошибки , но при сложении цифр следующего разряда забыл прибавить двойку. Разделив при проверке результат на множитель, он получил в частном 365, а в остатке 198.

Третий ученик сделал подобную ошибку на единицу в следующем высшем разряде и получил при проверке в частном 940, а в остатке 48. Определите данные для умножения числа и укажите, в каких местах были сделаны ошибки.

Ответ: 972 и 314, первый ученик уменьшил на единицу число сотен, второй уменьшил на две единицы число тысяч, третий уменьшил на единицу число десятков тысяч.

№7 Пятизначные числа x и y обладают тем свойством, что десятизначное число, полученное в результате приписывания справа от x числа y, делится на произведения x на y. Найдите все пары таких чисел x и y.

Ответ: x=16667, y= 33334.

№8 В шахматном турнире участвовали два ученика седьмых классов и несколько учеников восьмых классов. Два семиклассника набрали 8 очков, а каждый из восьмиклассников набрал одинаковое количество очков. Сколько восьмиклассников участвовало в турнире, если каждый играл с каждым один раз?

Ответ: 7 или 14.

№9 Два двузначных числа, записанных одно за другим, образуют четырёхзначное число, которое делится на их произведение. Найдите эти числа.

Ответ: (17;34), (13;52).

№10 Числа a и b обладают следующими свойствами: 1) a-простое число; 2)b вдвое больше a; 3) обращённые a и b (т.е.записанные теми же цифрами, но в обратном порядке, обладают следующим свойством: они являются степенью двойки, причём после зачёркивания первой цифры слева в их десятичной записи снова получается десятичная запись чисел, являющихся степенью двойки. Найдите все такие a и b.

Ответ: 23 и 46.

№11 Существуют ли натуральные решения уравнения $x^{2012}+y^{2012}=2013$?

Ответ: нет.

№12 На линии, заданной уравнением $y^2=29x^2-1$ найдите все точки с рациональными координатами.

Ответ: $x=\dfrac{k^2-10k+29}{2\left(k^2-29\right)}$; $y=\dfrac{-5k^2+58k-145}{2\left(k^2-29\right)}$; $k\in Q$.

№13 Верно ли, что куб можно плоскостями, параллельными граням куба разбить на любое число кубов, большее, чем 70?

Ответ: да.

№14 Два ученика независимо друг от друга составили по одному семизначному числу, используя все цифры 1,2,3,4,5,6,7 по одному разу. Оказалось, что одно число больше другого. Верно ли, что большее число не делится на меньшее?

Ответ: верно.

№15 При каких натуральных n сумма вида $1+2+3+...+n$ является трёхзначным числом, состоящим из одинаковых чисел?

Ответ: 36.

№16 При делении шестизначного числа, состоящего из одинаковых цифр, на четырёхзначное, состоящее из одинаковых цифр, получено в частном 233 и некоторый остаток. После отбрасывания в делимом и делителе по одной цифре и нового деления частное не изменилось, а остаток уменьшился на 1000. Найдите первоначальные делимое и делитель.

Ответ: 777777 и 3333.

Дополнительные задачи для самостоятельного решения

1.Решите уравнение $5^x-3^y=2$ в целых числах. Ответ:x=1;y=1.

2.Найдите все простые p, такие, что а) $p^2+6; p^2-6$ - тоже простые; б) p^4-6 - тоже простое; в) $p^3+6; p^3-6$ - тоже простые; г) $p^2-2;\quad 2p^2-1;\quad 3p^2+4$ - тоже простые. Ответ: а)5;б)5;в)7; г)3;7.

3. Известно, что $a,b,c,d\in N$ и связаны соотношением $a^2+b^2=c^2+d^2$. Верно ли, что a+b+ c+d простое число?

Ответ: a+b+ c+d составное число.

4. Решите уравнение $2^x-15=y^2$ в целых числах. Ответ: $(6;\pm7);(4;\pm1)$.

5. Найдите целочисленные решения системы уравнений $\begin{cases}x+y+z=14,\\ x+yz=19.\end{cases}$ Ответ:(19;0;-5),(17;-2;-1), (7;4;3), (5;2;7),(19;-5;0), (17;-1;-2), (7;3;4), (5;7;2).

6.Сколько натуральных трёхзначных чисел n обладают тем свойством, что первая и последняя цифра числа n^2 равна единице?

Ответ: 22 числа.

7. Сколько раз нужно выписать число а)1984; б) 2010, чтобы получилось число, делящееся на 99?

Ответ: а) $99 \cdot k$ $раз$; $k \in N$; б) $33 \cdot k$ $раз$; $k \in N$.

8.Найдите все цифры a и b, такие, что $\overline{3baab6ba} \vdots 99$. Ответ:

a	0	3	6
b	3	6	9

9.Найдите все целочисленные решения системы $\frac{5}{3}t = 2k + 1 = \frac{3l+1}{2} = 6m - 1; t, k, l, m \in \{0;1;2;3;...\}$.

Ответ: $t = -18p - 105$; $k = -15p - 88$; $l = -20p - 117$; $m = -5p - 29$; $p \in \{-6;-7;-8;....\}$.

10.Решите в натуральных числах уравнение $(x_1^2+1)(x_2^2+2^2)...(x_{2011}^2+2011^2) = 2^{2011} \cdot 2011! \cdot x_1 \cdot ... \cdot x_{2011}$. Ответ: $\{1;2;...,2011\}$.

11. Найдите все тройки целых чисел (x;y;z), удовлетворяющих неравенству $\log_2(2x+3y-6z+3) + \log_2(3x-5y+2z-2) + \log_2(2y+4z-5x+2) > z^2 - 9z + 17$. Ответ: (5,4,4)

МАКСЮТИН А.А.

Задания С6 для ЕГЭ 2012

1. Найдите все трёхзначные числа n, в записи которых цифры не повторяются; такие, что разность числа n и ему обращённого (т.е. записанного теми же цифрами, но в обратном порядке) является также трёхзначным числом, состоящим из тех же цифр, что и число n. Ответ:954 и 459.
2. Существует ли натуральное число, которое удваивается от перестановки его крайней левой цифры в конец записи? Ответ: нет.
3. Найдите все двузначные натуральные числа, у которых четвёртая степень суммы цифр равна сумме цифр четвёртой степени самого числа. Ответ : 10 и 11.
4. Приведите пример двух последовательных натуральных чисел, сумма цифр каждого из которых делится на 11. Сколько существует чисел, обладающих таким свойством? Ответ: например, 2899999и 2900000; бесконечно много.
5. Сколько вершин имеет выпуклый многоугольник, если известно, что число его диагоналей делится на число его вершин? Ответ: число вершин равно $2k+3, k \in N$.
6. Найдите все трёхзначные числа $\overline{xyz}$, удовлетворяющие равенству $\overline{xyz} = x + y^2 + z^3$. Ответ:135, 175, 518, 598.
7. Найдите наименьшее значение выражения $|36^m - 5^n|$, где n, m – натуральные числа. Ответ: 11.
8. Верно ли, что целая часть числа $(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2, n \in N$ является нечётной? Ответ: да.
9. Найдите цифры x,y,z, при которых выполняется равенство $\overline{xyz} = y \cdot \overline{xz}$. Ответ: нет таких цифр.
10. Может ли число $2013^n - 1, n \in N$ оканчиваться на 2013 нулей? Ответ: да.
11. В числе $(\sqrt{26}+5)^{101}$ определите: а) первую цифру после запятой; б)первые десять цифр после запятой; в) первые сто цифр после запятой. Ответ: после запятой стоит сто нулей.
12. Последняя цифра натурального числа n отлична от 0 и 5. Какой цифрой оканчивается число а) $n^5(n+5)^3$? б) $n^{10}(n+5)^6$? в) $n^{100}(n+5)^{60}$? Ответ:6.
13. Натуральное число n является произведением четырёх последовательных натуральных чисел, больших 5. Последняя цифра числа n отлична от 0. Можно ли однозначно определить а) две последние цифры числа n? б) три последние цифры числа n? в) четыре последние цифры числа n? Ответ: а)24; б)024; в)нельзя: четвёртая цифра может быть 3;4;…

14. Найдите все натуральные числа x,y,z, удовлетворяющие равенству $x^y - 2^z = 1$. Ответ: тройки чисел вида $(2^t, 1, t)\quad t \in N$.

15. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{1000}}$? Ответ:9.

16. Решите в натуральных числах уравнение $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{1856}$. Ответ: $(29,783),(232,232),(783,29)$.

17. Если к двузначному числу прибавить число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то получится квадрат некоторого числа. Найдите все двузначные числа, обладающие этим свойством. Ответ: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92. **Существуют ли трёхзначные числа, обладающие этим свойством?**

Тренировочные материалы к ЕГЭ 2013.

С6

1. Класс делится на две подгруппы: физико-математической направленности, т.е. «физиков» и историко-филологической направленности, т.е. «лириков». Каждый ученик класса посещает спецкурс по естествознанию или по истории Японии, причём, возможно, что кто-то посещает и один и другой спецкурсы.

Известно, что на спецкурсе по естествознанию «физиков» было не более $\frac{2}{11}$ от общего числа учеников, посещающих спецкурс по естествознанию.

На спецкурсе по истории Японии «физиков» было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учеников, посещающих спецкурс по истории Японии.

А)Могло ли в классе из 20 человек быть 9 «физиков»?

Б)Какое наибольшее количество «физиков» могло быть в классе, если всего в нём учатся 20 человек?

В)Какую наименьшую долю могли составлять «лирики» от общего числа учащихся класса без дополнительных условий а) и б) ?

Отв: а)да; б)9; в) $\frac{9}{17}$.

2. На интерактивной доске светятся числа $1; \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}$.

А)Докажите, что при любой расстановке знаков «+» или «-» между этими числами вместо запятых полученная сумма не будет равна нулю.

Б)Можно ли, стерев некоторое количество чисел, так расставить перед оставшимися числами знаки «+» или «-», чтобы полученная сумма равнялась нулю? Ответ обоснуйте.

В) Какое наименьшее количество написанных чисел необходимо стереть, чтобы после некоторой расстановки знаков «+» или «-» перед оставшимися числами получилась сумма, равная нулю?

Отв:а)при любой расстановке знаков после приведения к общему знаменателю всех дробей в числителе получится алгебраическая сумма одного нечётного и нескольких чётных чисел; нечётное число не равно нулю. Б)например $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 0$ и др.В)6.

3. А)Найдите сумму чисел $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + ... + \frac{1}{10712} - \frac{25}{104}$.

Б)Даны числа $\frac{1}{4\cdot5}, \frac{1}{5\cdot6}, \frac{1}{6\cdot7}, \frac{1}{7\cdot8}, ..., \frac{1}{(n+3)\cdot(n+4)}, \frac{n}{4n+16}; n \in N$. Докажите, что существует такая расстановка знаков «+» или «-», что полученная сумма будет равна нулю.

Отв:а)0; б)все, кроме последнего «плюсы», последний «минус».

4. А)Найдите сумму чисел $\frac{7}{1\cdot 8}+\frac{7}{8\cdot 15}+\frac{7}{15\cdot 22}+\ldots+\frac{7}{(7n-6)(7n+1)}+\frac{1}{7n+1}, n\in N$

Б)Даны числа $\frac{7}{8},\frac{7}{120},\frac{7}{330},\frac{7}{638},\ldots,\frac{7}{486494},\frac{1}{701},1$. Докажите, что существует такая расстановка знаков «+» или «-», что полученная сумма будет равна нулю.

Отв: а)1; б)все, кроме последнего «плюсы», последний «минус».

5. А)Найдите сумму чисел $1+4+9+\ldots+4048144$.

Б)Даны числа $1,\quad 4,\quad 9,\ldots,\quad 4052169,\quad 2722383213$. Докажите, что существует такая расстановка знаков «+» или «-», что полученная сумма будет равна нулю.

Отв: а)2716979650; б)все, кроме последнего «плюсы», последний «минус».

6. А)Число 2012 представьте в виде суммы 62 попарно различных натуральных слагаемых.

Б)Можно ли число 2012 представить в виде суммы 63 попарно различных натуральных слагаемых.

В)Натуральное число N представлено в виде суммы нескольких натуральных слагаемых. Найдите наибольшее возможное количество слагаемых в таком представлении.

Отв: а) да, например, $1+2+3+\ldots61+121$;б) нет, т.к. $a_1+a_2+a_3+\ldots a_{63}\geq 2016$; в) наибольшее возможное количество слагаемых в таком представлении равно $k_{\max}=\left[\frac{\sqrt{8N+1}-1}{2}\right]$, где $[x]$ целая часть числа х.

7. А)Число 1955 представьте в виде суммы 62 попарно различных натуральных слагаемых.

Б)Можно ли число 1955 представить в виде суммы 63 попарно различных натуральных слагаемых.

В)Натуральное число N представлено в виде суммы нескольких натуральных слагаемых. Найдите наибольшее возможное количество слагаемых в таком представлении.

Отв: а) да, например, $1+2+3+\ldots61+64$;б) нет, т.к. $a_1+a_2+a_3+\ldots a_{63}\geq 2016>1955$; в) наибольшее возможное количество слагаемых в таком представлении равно $k_{\max}=\left[\frac{\sqrt{8N+1}-1}{2}\right]$, где $[x]$ целая часть числа х.

8. А) Возможно ли число 5047 представить в виде суммы $k+(k+1)+(k+2)+\ldots+(k+l), k,l\in N$ чисел некоторого отрезка натурального ряда?

Б) Возможно ли число 5039 представить в виде суммы $k+(k+1)+(k+2)+\ldots+(k+l), k,l\in N$ чисел некоторого отрезка натурального ряда?

В)Укажите два числа, бо́льшие, чем 5000, которые нельзя представить в указанном виде.

Отв: а) например, $3+4+5+\ldots+100=5047$;б)нет; в)например, 5034, 5036.

9. А) Возможно ли число 2012 представить в виде суммы $k+(k+1)+(k+2)+\ldots+(k+l), k,l\in N$ чисел некоторого отрезка натурального ряда?

Б) Возможно ли число 2013 представить в виде суммы $k+(k+1)+(k+2)+\ldots+(k+l), k,l\in N$ чисел некоторого отрезка натурального ряда?

В)Укажите два числа, бо́льшие, чем 3000, которые нельзя представить в указанном виде.

Отв:а) нет; б) например, $3+4+5+\ldots+63=2013$;в)например, 3001, 3078.

10. Докажите, что при любом натуральном $n>1$число

а) 4^n+5;

б) $8^n + 9$;

в) $a^n + a + 1$, где а – целое, положительное, не кратное 8,

не является квадратом целого числа.

Указание: исп. рассуждение от противного и теорему об остатках при делении квадрата на 8.

11. Найдите все цифры a, b, c, d, такие, что числа $a, \overline{cd}, \overline{ad}, \overline{abcd}$ являются точными квадратами.

Отв:1,9, 3,6.

12. Существует ли такое натуральное число, которое после умножения на 2 становится квадратом, а после умножения его на 4 становится четвёртой степенью целого числа?

Отв: нет.

13. Докажите, что сумма 2880 квадратов последовательных натуральных чисел не может быть квадратом целого числа.

14. Может ли сумма 1984 квадратов последовательных натуральных чисел быть квадратом целого числа. Ответ обоснуйте.

Отв:нет.

15. Отношение среднего арифметического двух натуральных чисел к их среднему геометрическому является натуральным числом. Верно ли, что два натуральных числа равны.

Ответ:да.

16. Выписали друг за другом десятичную запись чисел 2^{2012} и 3^{2012}. Сколько всего цифр выписали? Известно, что $\lg 2 \approx 0{,}30103, \quad \lg 3 \approx 0{,}47712$.

Отв:1566.

С6

1. Выбрали несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляют одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если выбраны были числа 1,3, 3,4, то на доске будет записан набор 1,3,4,5,6,7,8,10,11. а)Приведите пример выбранных чисел, для которых на доске будет записан набор 1,2,3,4,5,6. б) Существует ли пример таких выбранных чисел, для которых на доске будет записан набор 1,3,4,5,6,7,8,9,14,15,16,17,18,19,20,22? в)Приведите примеры всех наборов выбранных чисел, для которых на доске будет записан набор 10,12,13,22,23,24,25,34,35,36,37,46,47,49,59? Ответ:а)1,1,1,1,1,1; б)нет; в)10,12,12,12,13 или 10,12,13,24.

2. (М.А.А.) Пусть $\mu(n)$- функция, вычисляющая значения показателя степени числа 5 в каноническом разложении $n!$ (эн факториал) на простые множители. а)Постройте график функции $y = \mu(n)$ при изменении аргумента n от 1 до 150. б)Решите уравнение $\mu(n) = 2020$. в) Решите уравнение $\mu(n) = 2021$. Ответ: б)8095;8096; 8097; 8098;8099.в)$\varnothing$.

3. Попарные суммы пяти целых чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 равны 0,2,4,4, 6,8,9,11,13,15. Найдите наименьшее и наибольшее из этих чисел. Ответ: $x_{\min} = -1; x_{\max} = 10$

4. Группа спортсменов на олимпиаде в Сочи может быть перемещена из дворца спорта на горнолыжную трассу двумя способами: либо на двух автобусах за несколько рейсов, либо на трёх электромобилях, причём, в этом случае число рейсов каждого электромобиля будет на один меньше, чем при первом способе. Транспорт во всех случаях должен быть полностью загружен. Оргкомитету олимпиады необходимо узнать, какое максимальное количество спортсменов можно перевезти, если в электромобиль входит на 7 человек меньше, чем в автобус. Ответ: 504.

5. Найдите сумму чисел, одновременно являющихся членами арифметических прогрессий: 2,5,8,…332 и 7,12, 17,….157. Ответ: 845.

6. Последние члены двух арифметических прогрессий $a_1=5, a_2=8,..., a_M$ и $b_1=9, b_2=14,..., b_K$ совпадают. Сумма всех общих членов обеих прогрессий (т.е. чисел, принадлежащих обеим прогрессиям) равна 815. Найдите М и К. Ответ: К=29, М=49.

7. Сумма трёх натуральных чисел (не обязательно различных) равна 100. Из этих чисел составляют три попарные разности (при вычислении разности из большего числа вычитают меньшее). Какое наибольшее значение может принимать сумма попарных разностей. Ответ: 194.

8. Найдите четыре действительных числа x_1, x_2, x_3, x_4 таких, что каждое, сложенное с произведением остальных, равно 2. Ответ: $(1,1,1,1);(-1,3,3,3);(3,-1,3,3);(3,3,-1,3);(3,3,3,-1)$

9. Каких пятизначных чисел больше: чётных с суммой цифр, равной 36, или нечётных с суммой цифр, равной 38? Ответ: вторых чисел больше.

10. У каждого из чисел от 1 до 1000 000 000 подсчитывают сумму его цифр. Затем у каждого числа из получившегося миллиарда чисел подсчитывают сумму его цифр и так далее, пока не получится миллиард однозначных чисел. Каких чисел получится больше: 1 или 2? Ответ: 1 получится на одну больше, чем 2.

11. Решите уравнение $105^x+211^y=106^z$ в целых числах. Ответ:x=2,y=1, z=2.

12. Решите уравнение $2x^2y^2+y^2-6x^2-12=0$ в целых числах. Ответ: $(2;2);(2;-2);(-2;2);(-2;-2)$

13. Решите уравнение $10x^4-2y^4+x^2y^2+29y^2-113x^2+171=0$ в целых числах. Ответ: $(3;1);(3;-1);(-3;1);(-3;-1)$

14. Решите уравнение $(x^2+y^2)(x+y-3)=2xy$ в целых числах. Ответ: $(0;0);(3;0);(0;3);(2;2)$

15. Решите уравнение $\log_2(2x+3y-6z+3)+\log_2(3x-5y+2z-2)+\log_2(2y+4z-5x+2)>z^2-9z+17$ в целых числах. Ответ: $(5;4;4)$

16. Эстафета олимпийского огня сочинской олимпиады 2014 стартовала из города А в город В и в первый день преодолела $\frac{1}{n}$- ю часть всего пути. В следующий день она прошла $\frac{1}{m}$- ю часть оставшегося пути. В следующие дни эстафета преодолевала попеременно то $\frac{1}{n}$- ю, то $\frac{1}{m}$- ю часть пути, оставшегося к концу предыдущего дня. Через 10 дней такого движения выяснилось, что эстафета прошла $\frac{31}{32}$ всего расстояния между городами А и В. Найдите m и n, если известно, что они – целые числа и m>n. Ответ: m=4,n=3.

Контрольная работа по структуре ЕГЭ Тема «Многочлены»

Вариант 1

А1. Укажите номера неверных утверждений:

1) $4719^3-2734^3 \vdots 1985$
2) $731^5-611^5 \vdots 120$
3) $123456^7-121453^7 \vdots 2003$
4) $328^3-172^3 \vdots 2000$
5) $54^3-24^3 \vdots 1080$
6) $79^3-29^3 \vdots 50$
7) $10^6-5^7 \vdots 59$
8) $11^{100}-1 \vdots 100$
9) $2^{55}+1$ составное, т.к. делится на 33
10) $313\cdot 299-313^2$ составное, т.к. делится на 7

11) $10^{57}-1$ составное, т.к. делится на 3
12) $\left(2^{80}+3^{80}\right)$ простое
13) $\left(10^{6}-6^{7}\right)\vdots 58$
14) $1^3+2^3+\dots+2003^3$ не делится на $(1+2+\dots+2003)$
15) 2003 является дискриминантом некоторого квадратного уравнения с целыми коэффициентами
16) $\left(5^{30}+7^{30}\right)$ простое
17) $1^3+2^3+\dots+2004^3$ не делится на $(1+2+\dots+2004)$
18) 3003 является дискриминантом некоторого квадратного уравнения с целыми коэффициентами
19) $\overline{ab}$ + $\overline{ba}$ делится на 11
20) $\overline{abc}$ + $\overline{bca}$ + $\overline{cab}$ делится на 37
21) $\overline{aaa}$ делится на 37

А2. Запишите в виде многочлена $\overline{ab}+2a-3b$

1) $10a-3b$ 2) $12a-3b$ 3) $2a-3b$ 4) $12a-2b$

5) правильных ответов нет.

А3. Два натуральных числа при делении на 13 дают в остатке соответственно 1 и 2. Тогда сумма кубов этих чисел при делении на 13 даёт остаток:

1) 2 2) 4 3) 6 4) 7 5) 9

А4. Выделите полный квадрат в выражении cx^2+ax+b

1) $\left(\sqrt{c}x+\frac{a}{\sqrt{c}}\right)^2-\frac{a^2-4bc}{4c}$; 2) $\left(\sqrt{c}x+\frac{a}{2\sqrt{c}}\right)^2+\frac{a^2-4bc}{4c}$;

3) $\left(\sqrt{c}x+\frac{a}{2\sqrt{c}}\right)^2-\frac{a^2-bc}{4c}$; 4) $\left(\sqrt{c}x+\frac{a}{2\sqrt{c}}\right)^2-\frac{a^2-4bc}{4c}$

А5. Выделив полный квадрат, докажите, что многочлен $(x+y+z)^2+6x+6y+6z+10$ при любом значении входящих в него букв принимает только неотрицательные значения.

А6. Результат упрощения выражения $(y-5k)\cdot\left(y^2+5ky+25k^2\right)\cdot\left(125k^3+y^3\right)$ равен:

1) $\left(y^3-125k^3\right)^2$
2) $\left(125k^3+y^3\right)^2$
3) $y^6-15625\cdot k^6$
4) $\left(125k^3\right)^2-y^6$

А7. Представьте многочлен $P_3(x)=x^3-8x^2+23x-24$ в виде суммы степеней $(x-2)$, т.е. найдите числа a, b, и c из тождественного равенства $x^3-8x^2+23x-24=(x-2)^3+a(x-2)^2+b(x-2)+c$:

1) $a=2$, $b=3$, $c=2$ 2) $a=-2$, $b=3$, $c=2$

3) $a=-2$, $b=3$, $c=-2$ 4) $a=-2$, $b=-3$, $c=-2$

А8. Найдите все значения упорядоченной пары $(a;b)$, при которой многочлен $P_4(x)=6x^4-x^3+ax^2+bx+4$ делится нацело на многочлен $Q_2(x)=x^2-4$:

1) (4; 25)   2) (-4; -25)   3) (-25; -4)   4) (-25; 4)

A9. Найдите остаток при делении многочлена $P_4(x)=4x^3-24x^2+21x-5$ на многочлен $Q(x)=2x-1$:

1) 0   2) 1   3) 2   4) 3   5) 4   6) 5

A10. Сократите дробь $\dfrac{x^4-2x^3+2x-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$:

1) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, при $x\neq\pm1$ 2) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, при $x\neq1$

3) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, при $x\neq\pm1$ 4) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, при $x\neq1$

A11. Найдите числа a, b и c при которых справедливо тождество $\dfrac{3x+x^2}{(x-1)\cdot(4x^2+8x+1)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{4x^2+8x+1}$. В ответе укажите упорядоченную тройку (a,b,c).

1) $\left(-\dfrac{4}{13};-\dfrac{3}{13};-\dfrac{4}{13}\right)$ 2) $\left(\dfrac{4}{13};-\dfrac{3}{13};\dfrac{4}{13}\right)$

3) $\left(\dfrac{4}{13};\dfrac{5}{13};\dfrac{3}{13}\right)$ 4) $\left(-\dfrac{4}{13};\dfrac{3}{13};\dfrac{4}{13}\right)$

A12. Укажите наименьший общий знаменатель данных алгебраических дробей:

$$\frac{1}{1-4x+3x^2};\frac{1}{x^2-5x^3+4x^4};\frac{1}{12x^2-7x+1}$$

1) $(4x-1)(x-3)(3x-1)$
2) $x(4x-1)(x-1)(3x-1)$
3) $x^2(4x-1)(x-1)(3x-1)$

A13. Многочлен $P(x)$, имеющий корни $x_1=1, x_2=2, x_3=-3$ с кратностями соответственно 3, 5 и 7 имеет вид:

1) $(x-1)^3\cdot(x-2)^5\cdot(x+3)^7$ 2) $((x-1)(x-2)(x+3))^{15}$

3) $(x+1)^3\cdot(x+2)^5\cdot(x-3)^7$ 4) $((x-1)(x-2)(x+3))^{35}$

A14. Кратность корня $x_0=\dfrac{2}{3}$ многочлена $P(x)=\left(x^2-\dfrac{2}{3}\right)\cdot\left(x^2-\dfrac{4}{9}\right)\cdot(3x+2)^3$ равна:

1) 7   2) 5   3) 4   4) 3   5) 1

A15. Составьте приведенное квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, один из корней которого равен $x_1=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

A16. При каких значениях параметра а наибольшее значение на отрезке $[0;2]$ функции $f(x)=x^2-3x+a$ равно $M=-\frac{1}{4}$

B1. Найдите целые корни уравнения $(6-x)(x-2)(x+3)(x+9)=24x^2$

B2. Решите неравенство $||x-1|-3|<2$

B3. Решите уравнение $3x^3-5x^2+3x-5=0$

B4. Решите неравенство $|5-2x|+|x+3|\geq 5$

B5. Решите уравнение $\frac{2x}{x^2+2}-\frac{3x}{x^2-x+2}=-\frac{13}{6}$ и укажите произведение корней

B6. Решите неравенство $f'(x)>0$, если $f(x)=2x\cdot(3x-1)^5$

B7. Многочлен $P(x)$ при делении на $(x-1)$ даёт остаток 3, а при делении на $(x-2)$ даёт остаток 5. Найдите остаток от деления $P(x)$ на x^2-3x+2

B8. Дан многочлен $P(x)=(2x^2-7x+1)^{16}-(x^9+x^2-3)^4$. Определите: 1) степень многочлена n; 2) старший коэффициент a_n и свободный член a_0; 3) сумму всех коэффициентов в каноническом разложении многочлена $\sum_{i=0}^{n}a_i$; 4) сумму при четных степенях x. В ответе укажите $\left(n;a_n;a_0;\sum_{i=0}^{n}a_i;\sum_{i=0}^{n/2}a_{2i}\right)$.

C 1. Решите уравнение $(x^3+x-2)^3=4-x^3$.

C 2. При каких значениях а уравнение $(x-a)(x^2-10x+9)=0$

имеет три различных корня, которые, взятые в некоторой последовательности, составляют : 1)арифметическую прогрессию; 2)геометрическую прогрессию. Выпишите все эти прогрессии.

C 3. Докажите, что для любого положительного а выполнено неравенство $(a+5)(a+4)(a+8)(a+2)>128a^2\sqrt{5}$.

C4. Докажите, что $\forall x,y\in R\quad x^2+10y^2-6xy+10x-26y+30>0$.

Вариант 1

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**A8**
4,12,13,14, **15,16,17,18,**	**4**	**5**	**4**	t^2+1, $t=x+y+z$	**3**	**3**	**4**

A9	**A10**	**A11**	**A12**	**A13**	**A14**	**A15**	**A16**
1	**2**	**2**	**3**	**1**	**5**	$x^2-4x+1=0$	**-0/25**

B1	**B2**	**B3**	**B4**
$\frac{-1-\sqrt{73}}{2};3;-6$	$(-4;0)\cup(2;6)$	$\frac{5}{3}$	**R**

B5	**B6**	**B7**	**B8**
2	**1.5**	$2x+1$	$(36;-1;-80;4^{16}-1;\ldots)$

C1	**C2**
$\sqrt[3]{2}$	

C3	**C4**
Исп. нер. **Коши**	$(x-3y+5)^2+(y+2)^2+1>0$