Многоуровневая система задач по теме Преобразование иррациональных выражений, решение уравнений, неравенств, систем, в том числе с модулем, параметром.

А.А. Максютин, к.п.н., почётный работник образования РФ

Оглавление

Цель изучения математики - научиться находить идею решения незнакомой задачи. Содержательные вопросы программы -это технический инструмент достижения цели.
Фольклор.

Предисловие

Построенная многоуровневая система задач по теме преобразование иррациональных выражений, решение уравнений, неравенств, систем, в том числе с модулем, параметром (кратко: МСЗ Иррациональности) имеет несколько отличительных особенностей от других пособий и задачников.

1. Полнота системы предполагает, анализ и отбор всех типовых, а также интересных и достойных внимания задач по теме, всех шедевров конкурсной математики в ведущие вузы страны с 1955 года до наших дней, всего банка задач ЕГЭ с 2001 по 2021 годы (в эти годы автор - эксперт ЕГЭ, составитель кимов), многочисленных тренировочных материалов для подготовки к профильному экзамену. Не только типовые, но и все интересные, оригинальные и ценные задачи темы собраны здесь.

2. Большое внимание уделено **расположению задач**. Задачи выстроены в **целесообразной последовательности,** помогающей достигать поставленной цели: научиться самостоятельно восходить от решения простой задачи к решению видоизменённой задачи, рождать идею решения незнакомой задачи. В изменяющихся обстоятельствах человек не может функционировать только на основе прошлого опыта. Для достижения цели приходится адаптировать, переносить, модифицировать свой опыт к новым незнакомым условиям. Целесообразность последовательности задач предполагает три уровня, отличающиеся уровнем сложности и трудности их решения. Задачи ***первого, знакомого уровня***, решаются применением знакомого из учебника алогритма. Задачи второго***, модифицированного уровня***, решаются применением знакомого из учебника алогритма, но с небольшой модернизацией хотя бы на одном шаге, приспособлением алгоритма к изменившимся условиям задачи, с переносом алгоритма в новую задачную ситуацию. Задачи третьего ***уровня незнакомых задач***, решаются применением знакомого или модифицированного алгоритма, но в последовательности или комбинации, которая ранее не встречалась решателю. Именно это является наиболее трудной частью решения задачи. Незнакомые задачи могут быть на поиск закономерности с целью последующего её применения, на поиск алгоритма, их можно отнести к поисково-исследовательским задачам (например, задачи в целых числах, задачи с параметром, многие иррациональные уравнения и неравенства и другие, встречающиеся во второй части кимов). За идеал расположения задач были взяты слова **великого Диофанта Александрийского(середина 3 века н.э.)** из его «Арифметики», где он изложил решение 288 уравений в целых числах: ***«А теперь мы перейдём к задачам, в которых собрано бошое количество предложений относительно видов.***

Поскольку они имеются в очень большом числе и требуют много труда, то они медленно усваиваются и запоминаются учащимися.

Я постарался распределить всё содержащееся так, чтобы в начале находились элементарные и от более простых совершался переход к более трудным, как и полагается.

Так облегчится путь начинающим и запомнится его развитие(стр.41)».

3. Исторические сведения о математиках, портреты творцов математических формул, создателей математических символов, исторические задачи, которые решали и пересылали учёные в письмах друг други, - всё это позволяет почувствовать дух и аромат времени, ощутить живую ткань развивающейся науки, «потому что есть эмоциональная окраска, и решение задачи происходит по-разному, в зависимости от того, какая окраска» (Г.Р.Иваницкий, д.ф-м.н). Предполагаем, что такие эмоциональные штрихи способны вызвать интерес и личностное отношение к изучаемому предмету.

4. Подробная пошаговая инструкция проведения исследования иррационального уравнения тремя различными способами: алгебраическим, графическим, координатно-параметрическим. Её выполнение формирует навык самостоятельного проведения поисково-исследовательской деятельности.

5. Достаточно полное собрание типов иррациональных уравнений, содержащих радикалы не только второго, но и третьего, четвёртого и пятого порядков, и демонстрация способов решений уравненний сориентирует решателя в многообразии задач и приёмах решения. Типы иррациональных уравнений собраны в удобной таблице **«Некоторые виды иррациональных уравнений и возможные методы их решения».**

6. Наличие индивидуальных итоговых зачётных работ, составленных согласно принципам полноты и целесообразности, даёт возможность самооценки сформированных умений по абсолютной 100-бальной шкале, учитывая полноту системы задач (***МСЗ Иррациональности).*** Эти индивидуальные зачётные работы логично назвать ЕГЭ по Иррациональностиям, т.к. они охватывают все типы заданий во всём диапазоне возрастающей сложности и трудности. По возможности задачи расположены так, чтобы решения предыдущей задачи можно было использовать для решения последующей. **Первый вариант такой зачётной работы снабжен ответами и подробными решениями,** что позволяет в классе или самостоятельно провести разбор решений. Остальные аналогичные варианты предназначены для индивидуальной самостоятельной проверочной работы учащихся.

Пособие содержит три части: 1)таблица *видов иррациональных уравнений и возможных методов их решения*.

2) индивидуальные зачётные работы (ЕГЭ по Иррациональностиям).

3)тренировочные подготовительные задания для самостоятельной работы, разбитые на типы уравнений с предусмотренными 12-24 вариантами для индивидуализации работы учащихся класса.

Предусматривается пополнение пособия по мере поступления новых задач.

Успехов! Per aspera ad astra!

Некоторые виды иррациональных уравнений и возможные методы их решения

	Вид уравнения	***Метод решения***	***Пример***
		Нахождение ОДЗ х уравнения иногда ускоряет решение. ОДЗ – это пересеченние областей определения всех функций, входящих в уравнение.	Р.у. $\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}=\sqrt{9x+7}-\sqrt{x-2}$ ОДЗ х: х=2, проверка подтверждает, что это-корень. Р.у. $\sqrt{x-6}+\sqrt{4-x}=4x-x^2+1$ ОДЗ: $x\in\varnothing$. Ответ: нет корней.
1.	$\sqrt[2k]{A(x)}=B(x)$	$\Leftrightarrow\begin{cases}A(x)=B^{2k}(x)\\B(x)\ge 0,\end{cases}$ где $A(x)$, $B(x)$ -функции. Это основная теорема.	$\sqrt{x^2+x+1}=x-4\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x+1=(x-4)^2\\x-4\ge 0\end{cases}$ Ответ: нет корней.
2.	$\sqrt[2k]{A(x)}=\sqrt[2k]{B(x)}$	$\Leftrightarrow\begin{cases}A(x)=B(x)\\B(x)\ge 0,\end{cases}$	$\sqrt{-9x^2+3x-6}=\sqrt{-6x-24}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}-9x^2+3x-6=-6x-24\\-6x-24\ge 0\end{cases}$ Ответ: нет корней.

3.	$\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = $ $= h(x)$	Используя равенство $\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}\right) \times$ $\times \left(\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}\right) \overset{def}{=} \alpha(x)$, где $\alpha(x) = f(x) - g(x)$, получим: $\left(\sqrt{f} \mp \sqrt{g}\right) \cdot h(x) = \alpha(x)$. Тогда $\begin{cases} \sqrt{f} \pm \sqrt{g} = h(x), \\ \sqrt{f} \mp \sqrt{g} = \dfrac{\alpha(x)}{h(x)} \end{cases}$, $h(x) \neq 0$. Сложим и вычтем уравнения системы, далее очевидно. *Проверка обязательна.*	$\sqrt{3x^2 - 5x + 7} +$ $+ \sqrt{3x^2 - 7x + 2} = 3$ $A(x) = 3x^2 - 5x + 7$, $B(x) = 3x^2 - 7x + 2$ $\begin{cases} \sqrt{A} + \sqrt{B} = 3 \\ \sqrt{A} - \sqrt{B} = \dfrac{2x+5}{3} \end{cases}$, $\begin{cases} \sqrt{A} = \dfrac{x+7}{3} \\ x \geq -7 \end{cases}$ Ответ: $\left\{2; -\dfrac{7}{26}\right\}$

		Уравнения указанного типа можно решать двукратным возведением в квадрат с обязательной проверкой корней в конце решения. Если же на каждом шаге обеспечивалась равносильность преобразований, то проверка не нужна.	$\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}=7$ Ответ: $x=10\frac{37}{49}$
4.		В некоторых случаях требуется проведение исследования функций, входящих в уравнение (т.н. ***функционально-аналитический метод***).	$\sqrt{4x^2+9x+5}-$ $+\sqrt{2x^2+x-1}=\sqrt{x^2-1}$. Отв.-1;5.
5.	$\sqrt{ax+b}\pm$ $\pm\sqrt{cx+d}=f(x)$	Первое из уравнений при некоторых условиях на числа a, b, c, d и функцию $f(x)$ можно решать так: возведем в квадрат. $2\sqrt{(ax+b)(cx+d)}=$ $=f^2(x)-\left(ax+b+cx+d\right)$ Если окажется, что $f^2(x)-\left(ax+b+cx+d\right)=$ $=(ax+b)(cx+d)+A,$ где A – некоторая константа, то замена $t=\sqrt{(ax+b)(cx+d)}$ приводит к квадратному уравнению $t^2-2t+A=0$, $t\geq 0$. Далее очевидно.	$\sqrt{x+1}-\sqrt{12-x}=$ $=\sqrt{-x^2+11x-23}\Rightarrow$ $\Rightarrow 13-2\sqrt{-x^2+11x-23}=$ $=-x^2+11x+12,$ $t=\sqrt{-x^2+11x+12}\Rightarrow$ $\Rightarrow t^2-35=13-2t$ $t_1=6, t_2=-8$ Ответ: $x=8$ ——— $\sqrt{x+7}-\sqrt{9-x}=$ $=\sqrt{-x^2+2x+63}$ Ответ: $x=\sqrt{46+2\sqrt{17}}+1$

6.	$\sqrt{ax^2+bx+c}=$ $=mx^2+nx+r$	В некоторых случаях замена $t=\sqrt{ax^2+bx+c}$ сводит уравнение к квадратному относительно t. *В общем случае возводя в квадрат, получаем полное уравнение 4-ой степени, решаемое методом Феррари.* *См. восьмой пункт таблицы.*	$x^2-4x=3\sqrt{x^2-4x+20}-10$ $t=\sqrt{x^2-4x+20}\Rightarrow$ $t^2=3t+10\ldots$ Решите уравнения: $x^2+2\sqrt{x^2-3x+11}=3x+4.$ $x^2-4x=3\sqrt{x^2-4x+20}-10.$ $\sqrt{x^2-3x+7}=3x+(x-3)^2-22.$ $x^2+13-2\sqrt{x^2+13}=35.$ $x^2-2\sqrt{x^2-24}=39.$ $x^2+2\sqrt{41-x^2}=26.$
7.	$\sqrt{ax^2+bx+c}=$ $=mx^2+nx+r$	В некоторых случаях преобразование уравнения позволяет избавиться от радикала.	Р.у.: $3\sqrt{x^2-4x+4}-4-x=$ $=\left(\sqrt{-x^2+x+2}\right)^2\Leftrightarrow$ $\begin{cases}3\lvert x-2\rvert=-x^2+2x+6;\\-x^2+x+2\geq 0.\end{cases}\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x\in[-1;2]\\x\in\{0;5\}\end{cases}\Leftrightarrow x=0$ Решите уравнение: $3\sqrt{x^2+4x+4}-8-x=$ $=\left(\sqrt{-x^2-7x-10}\right)^2.$*отв.*$:-4.$
8.	$\sqrt{ax^2+bx+c}=$ $=mx^2+nx+r$	Замена: $\begin{cases}y=mx^2+nx+r\\y^2=ax^2+bx+c\end{cases}.$ Умножим первое уравнение на α и сложим со вторым: $y^2+\alpha y=\alpha mx^2+\alpha nx+\alpha r+$ $+ax^2+bx+c.$ Прибавим β к обеим частям уравнения: $y^2+\alpha y+\beta=(\alpha m+a)x^2+$ $+(\alpha n+b)x+\alpha r+c+\beta$ (*) α и β пока не определены. Для их нахождения наложим 2 ограничения: 1)	$\sqrt{3x^2-2x+1}=x^2-x+1$ $\begin{cases}y=x^2-x+1 & \mid\cdot\alpha\\y^2=3x^2-2x+1\end{cases}\oplus$ $y^2+\alpha y+\beta=x^2(3+\alpha)+$ $+x(-2-\alpha)+1+\alpha+\beta$ (*) $\begin{cases}\alpha^2-4\beta=0\\(2+\alpha)^2-4(\alpha+3)\times\\\times(1+\alpha+\beta)=0\end{cases}$ $\begin{cases}\beta=\dfrac{\alpha^2}{4}\\\alpha^3+6\alpha^2+12\alpha+8=0\end{cases}$

дискриминанты обеих частей (*) должны быть равны 0;

$$\begin{cases} D_1=0\\ D_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha^2-4\beta=0\\ (\alpha n+b)^2- \\ -4(\alpha m+a)\times\\ \times(\alpha r+c+\beta)=0\end{cases}$$

Подставляя $\beta=\dfrac{\alpha^2}{4}$ во 2-е уравнение, получим кубическое уравнение относительно α. Решив его, свернем левую и правую части (*) в квадраты двучленов:

$$\left(y+\frac{\alpha}{2}\right)^2=(kx+p)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y+\frac{\alpha}{2}=\pm(kx+p)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{\alpha}{2}+kx+p\\ y=-\dfrac{\alpha}{2}-kx-p\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} mx^2+nx+r=-\dfrac{\alpha}{2}+kx+p\\ mx^2+nx+r=-\dfrac{\alpha}{2}-kx-p\end{array}\right.$$

Получили совокупность двух квадратных уравнений.
Проверка обязательна.
В частном случае, если ax^2+bx+c является квадратом двучлена $kx+l$, то уравнение приводится к виду $\pm(kx+l)=mx^2+nx+r$.

$$\begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=1\end{cases}$$

Уравнение (*) примет вид:
$y^2-2y+1=x^2$,
$(y-1)^2=(x)^2$

$$\left[\begin{array}{l} y-1=x\\ y-1=-x\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-x+1-1=x\\ x^2-x+1-1=-x\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-2x=0\quad \{0;\,2\}\\ x^2=0,\quad 0\end{array}\right.$$

Проверка.
Ответ: $\{0;\,2\}$.
Пример:
Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение
$$x^2+ax+3=\sqrt{33x^2+6ax+9}$$
имеет ровно три корня. Решите уравнение при найденных значениях параметра. Отв.
$\left[-\frac{10}{\sqrt3};-3\sqrt3\right)\cup\left(-3\sqrt3;3\sqrt3\right)\cup\left(3\sqrt3;\frac{10}{\sqrt3}\right]$

Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение
$$x^2+ax+5=\sqrt{28x^2+10ax+25}$$
имеет ровно три различных корня. Решите уравнение при найденных значениях параметра. Отв.
$\left[-\frac{23}{3\sqrt2};-3\sqrt2\right)\cup\left(-3\sqrt2;3\sqrt2\right)\cup\left(3\sqrt2;\frac{23}{3\sqrt2}\right]$

Решите уравнение

			$8\cdot\sqrt{x+5}=\dfrac{x^2+34x+161}{x+9}\Leftrightarrow$ $(x+1)^4=0\Leftrightarrow x=-1$ Отв.-1.
9.	$\sqrt{kx+b}+$ $+\sqrt{px+q}=$ $=\sqrt{mx^2+nx+l}$	Возводя на ОДЗ обе части уравнения в квадрат, получим уравнение вида (8).	$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=$ $=\sqrt{2x^2+11x+12}$
10.	$A\sqrt{k_1x+b_1}+$ $+B\sqrt{k_2x+b_2}+$ $+2AB\times$ $\times\sqrt{(k_1x+b_1)}\times$ $\times\sqrt{(k_2x+b_2)}+$ $+A^2(k_1x+b_1)+$ $+B^2(k_2x+b_2)=C$	Замена: $t=A\sqrt{(k_1x+b_1)}+$ $+B\sqrt{(k_2x+b_2)}$ Уравнение примет вид: $t+t^2=C$ $t_{1,2}=-\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{C+\dfrac{1}{4}}$ Далее очевидно.	$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2x+$ $2\sqrt{x^2+7x}=35$ $t=\sqrt{x}+\sqrt{x+7}$ $t^2+t=42$ $\left[\begin{array}{ll}\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=6 & x=\dfrac{841}{144}\\ \sqrt{x}+\sqrt{x+7}=-7 & \varnothing\end{array}\right.$
Уравнения, сводящиеся к однородным			
11.	$A\sqrt{f(x)}+$ $+B\sqrt{g(x)}+$ $+C\sqrt[4]{f(x)g(x)}=0$	Разделим на $\sqrt{g(x)}\neq 0$ (или $\sqrt{f(x)}\neq 0$) $\Rightarrow A\cdot\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}+C\sqrt[4]{\dfrac{f(x)}{g(x)}}+$ $+B=0$ Замена: $t=\sqrt[4]{\dfrac{f(x)}{g(x)}}>0$ приводит к квадратному уравнению.	$\sqrt{x+2}+2\sqrt{-x+2}-$ $-3\sqrt[4]{4-x^2}=0$ $t=\sqrt[4]{\dfrac{2+x}{2-x}}$ $t^2-3t+2=0$ $t_1=1, t_2=2$ $x_1=0,\ x_2=\dfrac{30}{17}$

12.	$A(kx+b)^2+$ $+B(kx+b)\times$ $\times\sqrt{k_1x+b_1}+$ $+C\left(\sqrt{(k_1x+b_1)}\right)^2=$ $=0$	Делим на $(kx+b)^2\neq 0$ или на $\left(\sqrt{k_1x+b_1}\right)^2\neq 0$. Замена: $t=\dfrac{\sqrt{k_1x+b_1}}{kx+b}$ приводит к квадратному уравнению относительно t.	$x^2+12x+4=6(x+2)\sqrt{x}$ Выделим элементы $(x+2)$ и $\sqrt{x}$, относительно которых уравнение однородно. $(x+2)^2+8x=6(x+2)\sqrt{x}$ $(x+2)^2+8\left(\sqrt{x}\right)^2=6(x+2)\sqrt{x}$ Делим на $(x+2)^2\neq 0$: $1+8\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x+2}\right)^2=6\dfrac{\sqrt{x}}{x+2}$ $t=\dfrac{\sqrt{x}}{x+2}$; $8t^2-6t+1=0$; $t\in\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right\}$ $\left[\begin{array}{ll} x+2=\sqrt{x} & \varnothing \\ x+2=4\sqrt{x} & x=6\pm 4\sqrt{2}\end{array}\right.$
13.	$A(x^2-ax+a^2)+$ $+B(x+a)+$ $+C\sqrt{x^3+a^3}=0$	***1 способ.*** Разделим на квадрат одного из элементов однородности, т.е. на (x^2-ax+a^2) или $(x+a)$, и т.д. ***2 способ.*** Замена: $u=\sqrt{x^2-ax+a^2}$, $v=\sqrt{x+a}$ $\Rightarrow Au^2+Bv^2+Cuv=0$ - однородное уравнение 2-го порядка, которое можно решать как квадратное относительно u, или v, или $\dfrac{u}{v}$, или $\dfrac{v}{u}$.	$2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}$ $2\left((x^2-x+1)+(x+1)\right)=$ $=5\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}$ $u=\sqrt{x+1}$, $v=\sqrt{x^2-x+1}$ $\Rightarrow 5uv=2(u^2+v^2)$ $u=0.5v; u=2v.$ $x=0.5\left(5\pm\sqrt{37}\right)$

			$\sqrt{5x^2+14x+9}-$ $-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$ $\begin{cases} x\ge 5 \\ 4x^2-10x+4= \\ =10\sqrt{x^2-x-20}\sqrt{x+1} \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 5 \\ 2x^2-5x+2= \\ =5\sqrt{(x+4)(x^2-4x-5)} \end{cases}$ Выделим элементы $\sqrt{x+4}$ и $\sqrt{x^2-4x-5}$, относительно которых уравнение однородно. Используя метод неопределённых коэффициентов, левую часть уравнения запишем так: $2x^2-5x+2=$ $=A\left(\sqrt{x^2-4x-5}\right)^2+$ $+B\left(\sqrt{x+4}\right)^2 \Rightarrow A=2,\ B=3.$ $\begin{cases} x\ge 5 \\ 2\left(\sqrt{x^2-4x-5}\right)^2+ \\ +3\left(\sqrt{x+4}\right)^2= \\ =5\sqrt{(x+4)(x^2-4x-5)} \end{cases}$ Получили однородное уравнение 2-го порядка. $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-4x-5}=\sqrt{x+4} \\ \sqrt{x^2-4x-5}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x+4} \end{array}\right.$

			$x_1=\frac{5+\sqrt{61}}{2}\geq 5$, $x_2=\frac{5-\sqrt{61}}{2}<5$, $x_3=8>5$, $x_4=-\frac{7}{4}<5$. Ответ: $\left\{\frac{5+\sqrt{61}}{2};8\right\}$.
14.	$\sqrt{P_3(x)}=P_2(x)$, $P_3(x)=ax^3+$ $+bx^2+cx+d$, $P_2(x)=mx^2+$ $+nx+r$	${P_2}^2(x)=P_3(x), P_2\ (x)\geq 0$. Далее метод неопределённых коэффициентов или метод Феррари.	Р.у. $\sqrt{2x^3-2x^2+10x+1}=$ $=x^2-5x+2$. Решите уравнение $8\cdot\sqrt{x+5}=\frac{x^2+34x+161}{x+9}\Leftrightarrow$ $(x+1)^4=0\Leftrightarrow x=-1$.
15	$\sqrt{P_4(x)}=P_2(x)$, $P_4(x)=ax^4+$ $+bx^3+cx^2+$ $+dx+e$, $P_2(x)=mx^2+$ $+nx+r$	Если возможно, то выделить квадрат трёхчлена. Если нет, то перейти к системе: Далее МНК или метод Феррари.	$\sqrt{P_4(x)}=P_2(x)$, $P_4(x)=x^4+6x^3+5x^2-$ $-2x+6$, $P_2(x)=x^2-2x+3$
16	$\sqrt[3]{P_3(x)}=P_2(x)$, где $P_3(x)$ является кубом двучлена	Выделить куб двучлена и получить квадратное уравнение. *Вопрос:* как определить, является ли данный кубический многочлен кубом некоторого двучлена?	$\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}=$ $=x^2+2x-3$ $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$
17.	$\sqrt[4]{P_4(x)}=P_2(x)$, где $P_4(x)$ является четвёртой степенью некоторого	Выделить четвёртую степень двучлена и получить квадратное уравнение с модулем *Вопрос:* как определить, является ли данный	$\sqrt[4]{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}=$ $=x^2+5x+6$; $\lvert x-1\rvert=x^2+5x+6$. $x_1=-1;\ x_2=-5$

	двучлена	многочлен 4-й степени квадратом некоторого квадратного трёхчлена?	
18.	$\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{g(x)} = \varphi(x)$	Возводя в куб по формуле сокращенного умножения $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$, получаем следствие $f(x) \pm g(x) \pm 3\sqrt[3]{f(x)g(x)} \cdot \varphi(x) = \varphi^3(x)$. Проверка обязательна.	$\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 3x + 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 3 \Rightarrow \sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 1 - x \Rightarrow x^3 - x^2 = 0$ Ответ: $x = 1$

		Уравнения указанного вида можно решать, переходя к системе с помощью введения новых переменных $u=\sqrt[3]{f(x)},\ v=\sqrt[3]{g(x)}\Rightarrow$ $\Rightarrow\begin{cases}u\pm v=\varphi(x)\\ u^3\pm v^3=h(x),\end{cases}$ $h(x)=f(x)\pm g(x)$ $\begin{cases}u\pm v=\varphi(x)\\ u^2\mp uv+v^2=\dfrac{h(x)}{\varphi(x)},\end{cases}$ $\varphi(x)\neq 0$ Далее очевидно. Удобно использовать формулу $u^4+v^4=\left(u^2+v^2\right)^2-2u^2v^2=$ $=\left((u+v)^2-2uv\right)^2-2u^2v^2$ $=(u+v)^4-4(u+v)^2uv+2(uv)^2$. $u^5+v^5=\left(u^3+v^3\right)\left(u^2+v^2\right)-u^2v^2(u+v)$	$\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$ $u=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}},\ v=\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$ $\begin{cases}u+v=2\\ u^3+v^3=2\end{cases}$ Разделив 2-е уравнение на 1-е, получим: $u^2-uv+v^2=1,$ $(u+v)^2-3uv=1\Rightarrow$ $\Rightarrow uv=1$ $\begin{cases}u+v=2\\ uv=1\end{cases}$ $u=1,\ x=0$ --- Решите уравнение $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{54-\sqrt{x}}=$ $=\sqrt[3]{18}$ Ответ: $x=4416$ Решите уравнение $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2$ $отв:\pm 0{,}5$ Решите уравнение $\sqrt[3]{76+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{76-\sqrt{x}}=$ $=8$ Ответ: $x=2401$
		Вопрос: почему уравнения $\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=\varphi(x)$ и $f(x)+g(x)+$ $+3\sqrt[3]{f(x)g(x)}\cdot\varphi(x)=\varphi^3(x)$ неравносильны?	
		Уравнения вида $\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=\varphi(x)$	При всех значениях а решите уравнение

		можно решать заменой	$\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}=a$. Замена $y=\sqrt[3]{1+x}\Rightarrow y+\sqrt[3]{2-y^3}=a,$ $\Rightarrow 3ay^2-3a^2y+a^3-2=0$ $y_{1,2}=\dfrac{3a^2\pm\sqrt{3a\left(8-a^3\right)}}{6a}$ При $a\in(0;2]$. Итак, при $a\in(0;2]$ есть два корня: $x_{1,2}=\left(\dfrac{3a^2\pm\sqrt{3a\left(8-a^3\right)}}{6a}\right)^3-1$ При других а корней нет.
19.	$\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=$ $=\sqrt[3]{h(x)}+\sqrt[3]{r(x)}$	Является частным случаем предыдущего вида уравнений и решается возведением в куб, далее разложением на множители с обязательной проверкой корней в конце решения	$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^3-x+1}=$ $=\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^3-x}$ Ответ: $\left\{-1;\,0;\,\pm\sqrt{2}\right\}$.
20.	$A\sqrt[3]{f^2(x)}+$ $+B\sqrt[3]{f(x)g(x)}+$ $+C\sqrt[3]{g^2(x)}=0$	Делим на $\sqrt[3]{g^2(x)}\neq 0$. Замена: $t=\sqrt[3]{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$ приводит к квадратному уравнению $At^2+Bt+C=0$.	$\sqrt[3]{\left(2x+\sqrt{1+x^2}\right)^2}-$ $-5\sqrt[3]{3x^2-1}+$ $+6\sqrt[3]{\left(2x-\sqrt{1+x^2}\right)^2}=0$ Решение. $3x^2-1=\left(2x+\sqrt{1+x^2}\right)\times$ $\times\left(2x-\sqrt{1+x^2}\right)$. Т.к. $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ не является корнем исходного уравнения, то, разделив на

			$2x-\sqrt{1+x^2}\neq 0$, получим равносильное уравнение. Замена: $t=\sqrt[3]{\dfrac{2x+\sqrt{1+x^2}}{2x-\sqrt{1+x^2}}}\Rightarrow$ $\Rightarrow t^2-5t+6=0\Rightarrow$ $\Rightarrow t_1=2,\ t_2=3\Rightarrow$ $\Rightarrow x_1=\dfrac{9}{\sqrt{115}},\ x_2=\dfrac{7}{2\sqrt{30}}$
21.	$\sqrt[3]{f^2(x)}+\sqrt[3]{g^2(x)}$ $\mp\sqrt[3]{f(x)g(x)}=$ $=\varphi(x)$	Домножаем обе части уравнения на $\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{g(x)}\neq 0$ и переходим к следствию $f(x)\pm g(x)=$ $\varphi(x)\left(\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{g(x)}\right)$	$\sqrt[3]{(1+x)^2}-\sqrt[3]{1-x^2}+$ $+\sqrt[3]{(1-x)^2}=1$ Умножаем на $\sqrt[3]{(1+x)}+\sqrt[3]{(1-x)}\neq 0\Rightarrow$ $\Rightarrow(1+x)+(1-x)=$ $=\sqrt[3]{(1+x)}+\sqrt[3]{(1-x)}\Rightarrow$ $\Rightarrow\sqrt[3]{(1+x)}+\sqrt[3]{(1-x)}=2$ Это уравнение рассмотренного ранее вида.
		Замена: $u=\sqrt[3]{f(x)}$, $v=\sqrt[3]{g(x)}\Rightarrow$ $\Rightarrow\begin{cases}u^2\mp uv+v^2=\varphi(x),\\ u^3\pm v^3=h(x),\end{cases}$ где $h(x)=f(x)\pm g(x)$. Разделим 2-е уравнение на 1-е: $\begin{cases}u\pm v=\dfrac{h(x)}{\varphi(x)},\ \varphi(x)\neq 0,\\ u^2\mp uv+v^2=\varphi(x)\end{cases}$	$\dfrac{A^2(x)}{B(x)}=\dfrac{49}{3}$, где $A(x)=\sqrt[3]{(12-x)^2}+$ $+\sqrt[3]{(12-x)(x-3)}+$ $+\sqrt[3]{(x-3)^2}$, $B(x)=\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{x-3}$. Замена: $u=\sqrt[3]{12-x}$, $v=\sqrt[3]{x-3}\Rightarrow$ $\begin{cases}u^3+v^3=9,\\ \dfrac{\left(u^2+uv+v^2\right)^2}{u+v}=\dfrac{49}{3}.\end{cases}$

			Ответ: $\left\{4;11;\ 7.5\pm\frac{7}{4}\sqrt{\frac{47}{3}}\right\}$
22.	$\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{x-b}=$ $=d,\ a>b,\ d>0$	Возводим в квадрат: $\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}=$ $=d^2-2\sqrt[4]{(a-x)(x-b)}$ Повторно возводим в квадрат и делаем подстановку $t=\sqrt[4]{(a-x)(x-b)}$. Получаем квадратное уравнение относительно *t:* $a-b+2t^2=\left(d^2-2t\right)^2$. Пусть $t_1,t_2\ge 0$ - корни квадратного уравнения $\Rightarrow$ $\begin{cases} t_1^4=(a-x)(x-b),\\ t_2^4=(a-x)(x-b)\end{cases}$ и т.д. Если не проверялась равносильность хотя бы одного перехода, то проверка обязательна.	$\sqrt[4]{17-x}+\sqrt[4]{x+15}=4,$ $t_1=4,\ t_2=28.$ Проверка (!) Ответ: $x=1$. ——— Решение уравнения с проверкой равносильности. $\sqrt[4]{17-x}+\sqrt[4]{x+15}=3\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}\sqrt[4]{(17-x)(x+15)}=\frac{18+\sqrt{226}}{2}\\ \sqrt[4]{(17-x)(x+15)}=\frac{18-\sqrt{226}}{2}\end{array}\right.$ 1-е уравнение решений не имеет. $x_{1,2}=1\pm\sqrt{256-\left(\frac{18-\sqrt{226}}{2}\right)^2}$ Т.к. при решении на каждом этапе проверялась равносильность, то проверка не нужна.
23.	$\sqrt[4]{a-x}-\sqrt[4]{x-b}=$ $=d,\ a>b$	Двукратное возведение в квадрат, замена $t=\sqrt[4]{(a-x)(x-b)}$, проверка корней или отслеживание равносильности	
24.	$\sqrt[4]{a-f(x)}+$ $+\sqrt[4]{f(x)-b}=d$	Заменой $t=f(x)$ сводится к уравнениям рассмотренных выше видов. ——— Решение уравнений	$\sqrt[4]{10+x^2+x}+\sqrt[4]{7-x-x^2}=3$ $u=\sqrt[4]{10+x^2+x},$ $v=\sqrt[4]{7-x-x^2}$

		возможно путём сведения к системе $\begin{cases} u=\sqrt[4]{a-f(x)} \\ v=\sqrt[4]{f(x)-b} \end{cases}$ $\begin{cases} u+v=d \\ u^4+v^4=a-b \end{cases}$ Удобно использовать формулу $u^4+v^4=\left(u^2+v^2\right)^2-2u^2v^2=$ $=\left((u+v)^2-2uv\right)^2-2(uv)^2$	$\begin{cases} u+v=3 \\ u^4+v^4=17 \end{cases}$ $\begin{cases} u_1=1 \\ v_1=2 \end{cases}$ $\begin{cases} u_2=2 \\ v_2=1 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \sqrt[4]{10+x+x^2}=1\Rightarrow\varnothing \\ \sqrt[4]{7-x-x^2}=2\Rightarrow x_1=2, \end{array}\right.$ $x_2=-3$ Проверка. Ответ: $\{2;-3\}$
	$\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{b-x}=$ $=\sqrt[4]{a+b-2x}$	ОДЗ: $x\le a; x\le b$.Замена $u=\sqrt[4]{a-x};\quad v=\sqrt[4]{b-x}$ Уравнение примет вид: $u+v=\sqrt[4]{u^4+v^4}$	Возводим в 4-ю степень: $uv\left(2u^2+3uv+2v^2\right)=0$; $u=0$ и $v=0$. С учётом ОДЗ получаем ответ: $a\ge b\Rightarrow x=b$; $a<b\Rightarrow x=a$.
25.	$f\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)=$ $=0$	Замена: 1) $x=a\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ или $x=a\sin t, t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 2) $x=a\cos t, t\in[0,\pi]$ или $x=a\cos t, t\in(0,\pi)$ Возможна замена $t=\sqrt{a^2-x^2}$.	$\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{35}{12}$ 1) Решение с помощью тригонометрической подстановки. 2) Решение с помощью замены $t=\sqrt{1-x^2}$. Ответ: $\left\{\frac{3}{5};\frac{4}{5};-\frac{5+\sqrt{73}}{14}\right\}$
26.	$f\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)=$ $=0$	$x=a\,\mathrm{tg}\,t, t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$\sqrt{x^2+1}-x=\frac{5}{2\sqrt{x^2+1}}$ $x=a\,\mathrm{tg}\,t, t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

			$\frac{1}{\cos t}-\operatorname{tg} t=\frac{5\cos t}{2}$, $2-2\sin t=5\left(1-\sin^2 t\right)$, $\left[\begin{array}{l}\sin t_1=1,\ t_1\notin\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin t_2=-\frac{3}{5},\ t_2\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\end{array}\right.$ $x=\operatorname{tg}\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$ Ответ: $x=-\frac{3}{4}$.

27.	$f\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) = 0$	$x=\dfrac{a}{\sin t}$, $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)\cup\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$	$x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12}$ Т.к. $x>1$, то $t\in\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. $x=\dfrac{a}{\sin t}$. $\dfrac{1}{\sin t}+\dfrac{1}{\cos t}=\dfrac{35}{12}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 12(\sin t+\cos t)=$ $=35\sin t\cos t$ $z=\sin t+\cos t$; $35z^2-24z-35=0$ $z_1=-\dfrac{5}{7}$; $z_2=\dfrac{7}{5}$ $-\dfrac{5}{7}$ не удовлетворяет условию $t\in\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. $\sin t+\cos t=\dfrac{7}{5}$, $\sin t+\sqrt{1-\sin^2 t}=\dfrac{7}{5}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin t_1=\dfrac{3}{5}\\ \sin t_2=\dfrac{4}{5}\end{array}\right.$ $t_1, t_2\in\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ Ответ: $x_1=\dfrac{5}{3}$; $x_2=\dfrac{5}{4}$.

28	$\sqrt[5]{f(x)}+\sqrt[5]{g(x)}=$ $=a$	Замена: $u=\sqrt[5]{f(x)},\ v=\sqrt[5]{g(x)}$. $\begin{cases} u+v=a, \\ u^5+v^5=h(x), \end{cases}$ где $h(x)=f(x)+g(x)$. Используя формулу $u^5+v^5=\left(u^3+v^3\right)\left(u^2+v^2\right)-$ $-u^3v^2-u^2v^3=\left(u^3+v^3\right)\times$ $\times\left(u^2+v^2\right)-u^2v^2(u+v)=$ $=(u+v)\left[(u+v)^2-3uv\right]\times$ $\times\left[(u+v)-2uv\right]-u^2v^2(u+v),$ получим систему: $\begin{cases} u+v=a, \\ a\left(a^2-3uv\right)\left(a-2uv\right)- \\ -u^2v^2a=h(x) \end{cases}$ 2-е уравнение является квадратным относительно uv . Пусть t_1,t_2 - его корни. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u+v=a, \\ uv=t_1 \end{cases} \\ \begin{cases} u+v=a, \\ uv=t_2 \end{cases} \end{array}\right.$ Далее очевидно.	$\sqrt[5]{\frac{1}{2}+x}+\sqrt[5]{\frac{1}{2}-x}=1$ Отв. $\pm 0{,}5$ $\sqrt[5]{33-x}+\sqrt[5]{x}=5$ Отв.:1;32.
29	$\sqrt{f(x)}+$ $+g(x,y)=0$	Выделяем квадрат двучлена и переходим к системе	$\sqrt{x^2+3x-4}+y^2-2xy+$ $+x^2=0$
30	$\sqrt{f(x,y)}+$ $+g(x,y)=0$	Выделяем квадрат двучлена и переходим к системе	$\sqrt{x^2-2xy+4y^2}+$ $+x^2+4x+4=0$
31	$\sqrt[2n]{f(x)}+$ $+g(x,y)=0$	Выделяем квадрат двучлена и переходим к системе	$\sqrt[4]{x^2+3x-4}+x^2+8x+$ $+16=0$

32	$\sqrt{a_1x+b_1+p}=$ $=a_2x+b_2$ или $\sqrt{a_1x+b_1}=$ $=a_2x+b_2+p$	Замена: $t=\sqrt{a_1x+b_1+p}$, $t\ge 0$, $t^2=a_1x+b_1+p$, $x=\dfrac{t^2-p-b_1}{a_1}$, $\begin{cases} t=\dfrac{a_2\left(t^2-p-b_1\right)}{a_1} \\ t\ge 0 \end{cases}$ и далее решить квадратное уравнение относительно t с параметром p. Для разрешимости уравнения необходимо и достаточно $D(p)\ge 0$. Если же требуется, чтобы оба корня t_1,t_2 были неотрицательны, то можно использовать вторую ключевую задачу на расположение корней квадратного трехчлена (см. «Математику-10», с. 488)	$\sqrt{x-1}=x-a;\ t=\sqrt{x-1}, t\ge 0.$ $t^2-t+1-a=0,$ $t=\dfrac{1\pm\sqrt{D}}{2}, D=4a-3.$ $4a-3\ge 0\Rightarrow a\ge\dfrac{3}{4}$. Ответ: $x_1=\dfrac{2a+1-\sqrt{4a-3}}{2}$, $x_2=\dfrac{2a+1+\sqrt{4a-3}}{2}$, при $a\in[0.75;1]$. При $a>1$ x_2-единственный корень. При $a<0.75$ решений нет.
33	$\sqrt{a_1x+b_1}+$ $+\sqrt{a_2x+b_2}=p$, $a_1,a_2>0$	$f(x)\uparrow$ на $D(f)=[\alpha;+\infty)$. $\min\limits_{D(f)} f(x)=f(\alpha)=m\ \Rightarrow$ при $p\ge m$ уравнение имеет единственное решение; при $p<m$ решений нет. $\begin{cases} p\ge m \\ \sqrt{a_1x+b_1}=p-\sqrt{a_2x+b_2} \end{cases}\Rightarrow$ $\begin{cases} p\ge m \\ a_1x+b_1=p^2-2p\sqrt{a_2x+b_2}+a_2x+b_2 \end{cases}$ Получено уравнение из п. 29: $t=\sqrt{a_1x+b_1}$, $t\ge 0$.	$\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}=a$ (1) $f(x)=\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}$ $f\uparrow, x\in D(f)=\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right)$. $E(f)=\left[\dfrac{2\sqrt{6}}{3};+\infty\right)\Rightarrow$ при $a\ge\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ (1)имеет единственный корень, приводим (1) к виду $2(x+2)+2a\sqrt{x+2}-a^2-8=0$

			$\sqrt{x+2}=\frac{-a-\sqrt{3a^2+16}}{2}$ (2) $\sqrt{x+2}=\frac{-a+\sqrt{3a^2+16}}{2}$ (3). При $a\geq\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (2)не имеет корней, а (3) имеет корень $x=\frac{2a^2+4-a\sqrt{3a^2+16}}{2}$
34.	$\sqrt{a_1x+b_1}+$ $+\sqrt{a_2x+b_2}=$ $\sqrt{a_3x+b_3}+$ $+\sqrt{a_4x+b_4}$,	Иногда удаётся упростить решение, если суммы коэффициентов при х слева и справа совпадают. Тогда после возведения уравнения в квадрат эти слагаемые взаимно уничтожаются. Для обеспечения равносильности получаемых уравнений важно отслеживать неотрицательность левых и правых частей уравнения.	Р.у. $\sqrt{6x+1}+\sqrt{4x+2}=\sqrt{8x}+\sqrt{2x+3}$ Отв. 0,5. Р.у. $\sqrt{8-x}-\sqrt{9+5x}-\sqrt{4-5x}+\sqrt{x+5}=0$ Отв. -1;-1/6. Р.у. $\sqrt{5x+1}-\sqrt{6x-2}-\sqrt{x+6}+\sqrt{2x+3}=0$ Отв. 3;5/4. Р.у. $\sqrt{4x+2}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{8x}-\sqrt{6x+1}$ Отв. 0,5. Р.у. $\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x-2}$ Отв. 3.

Решение иррациональных неравенств

Решение иррациональных неравенств сводится к решению равносильной системы:

1. $\sqrt[2n]{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geq 0\\ g(x)>0\\ f(x)<g^{2n}(x)\end{cases}$.

2. $\sqrt[2n]{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)\geq 0\\ f(x)>g^{2n}(x)\end{cases}\\ \begin{cases}g(x)<0\\ f(x)\geq 0\end{cases}\end{array}\right.$.

3. $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}<h(x)\Leftrightarrow\begin{cases} h(x)>0 \\ f(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0 \\ \sqrt{f(x)}<h(x) \\ \sqrt{g(x)}<h(x) \\ f(x)<\left(h(x)-\sqrt{g(x)}\right)^2 \end{cases}.$

При $h(x)\leq 0$ решений нет. Пятое неравенство системы сводится к неравенству известного вида.

4. $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}>h(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x)\leq 0 \\ f(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} h(x)\geq 0 \\ f(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0 \\ \sqrt{f(x)g(x)}>\dfrac{h^2(x)-g(x)-f(x)}{2} \end{cases} \end{array}\right.$.

5. $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}<h(x)\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0 \\ h(x)>0 \\ \sqrt{f(x)g(x)}<\dfrac{h^2(x)-f(x)-g(x)}{2} \end{cases}.$

Функционально-аналитические способы решения иррациональных уравнений и неравенств

В ряде случаев уравнение удаётся решить, если **использовать свойства входящих в него функций (монотонность, ограниченность, область определения, дифференцируемость, теоремы Лагранжа, Ролля, числовые неравенства).**

Пример1: $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}=23-2x$. Уравнение решается графически, доказательство единственности корня x=9 основано на разной монотонности функций в левой и правой частях уравнения. Аналитическое решение приводит к полному уравнению четвёртой степени.

Пример 2: $\frac{5}{x+1}=8\sqrt{x}$. Уравнение решается графически, доказательство единственности корня x=0,25 основано на разной монотонности функций в левой и правой частях уравнения. Аналитическое решение приводит к кубическому уравнению.

Теорема: если функция $y=f(x)$ возрастает на множестве X, то уравнение $f(f(x))=x$ равносильно уравнению $f(x)=x$ на множестве X. Доказательство.

1)Пусть $f(x)=x$, тогда из $f(x)=x \Rightarrow f(f(x))=f(x)$, а значит, $f(f(x))=f(x)=x$, т.е. из $f(x)=x \Rightarrow f(f(x))=x$. Возрастание функции здесь не использовалось.
2)Пусть теперь $f(f(x))=x$, где функция $y=f(x)$ возрастает на множестве X. Докажем, что тогда $f(x)=x$. Преположим противное: т.е. условия выполнены, но $f(x)\neq x$. Последнее означает, что $f(x)>x$ или $f(x)<x$. В первом случае по свойству возрастания функция $y=f(x)$ из неравенства $f(x)>x$ следует $f(f(x))>f(x)\Leftrightarrow x=f(f(x))>f(x)$,что противоречит исходной предпосылке. Во втором случае по свойству возрастания функция $y=f(x)$ из неравенства $f(x)<x$ следует $f(f(x))<f(x)\Leftrightarrow x=f(f(x))<f(x)$,что противоречит исходной предпосылке. В обоих случаях источником противоречия было предположение противного, следовательно оно неверно, а верно доказываемое утверждение. QED, как писали средневековые учёные на латыни. ***Вопрос***: будет ли верно заключение теоремы, если функция $y=f(x)$ убывает?

Пример 3. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\sqrt{5a+\sqrt{5a-x-\frac{x^2}{4}}}+x+\frac{x^2}{4}=0$ имеет корни. Найдите эти корни. Отв. $\left[-\frac{1}{20};0\right]$.

Решение. Данное уравнение запишем в виде $\sqrt{5a+\sqrt{5a-x-\frac{x^2}{4}}}=-x-\frac{x^2}{4}$.

Правая часть неотрицательна при $x\in[-4;0]$, и принимает при этом значения от 0 до 1. Обозначим $t(x) = -x - \frac{x^2}{4}$; $D(t(x)) = [-4;0]$; $E(t) = [0;1]$, графиком функции $t(x) = -x - \frac{x^2}{4}$ является парабола с ветвями вниз, с вершиной в точке (-2;1). Рассмотрим функцию $f(t) = \sqrt{5a + t}$, функция возрастает на отрезке $t \in [0;1]$, $f(f(t)) = \sqrt{5a + f(t)} = \sqrt{5a + \sqrt{5a + t}}$. Данное уравнение запишется в виде $f(f(t)) = t$, где $t = -x - \frac{x^2}{4}$. По доказанной **Теореме** уравнение $f(f(t)) = t$ заменяем уравнением $f(t) = t$, т.е. уравнением

$$\sqrt{5a + t} = t, t \in [0;1] \Leftrightarrow \begin{cases} 5a + t = t^2, \\ t \in [0;1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - t - 5a = 0, \\ t \in [0;1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{20a + 1}}{2}, \\ t_{1,2} \in [0;1] \end{cases}$$

Корни существуют при неотрицательном дискриминанте, т.е. при $a \geq -\frac{1}{20}$. Удовлетворяя требованию $t_{1,2} \in [0;1]$, решая соответствующие неравенства $0 \leq \frac{1 \pm \sqrt{20a + 1}}{2} \leq 1$, получаем неравенство $-\frac{1}{20} \leq a \leq 0$. Возвращаемся к неизвестной x, решаем уравнение

$$-x - \frac{x^2}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{20a + 1}}{2}, \quad при -\frac{1}{20} \leq a \leq 0. \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{2} + 2x + \left(1 \pm \sqrt{20a + 1}\right) = 0, -\frac{1}{20} \leq a \leq 0 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{2 \pm 2\sqrt{20a + 1}}, -\frac{1}{20} \leq a \leq 0.$$

Пример 4. Решите уравнение

$$(4x + 1)\left(1 + \sqrt{(4x + 1)^2 + 7}\right) + 3x\left(1 + \sqrt{9x^2 + 7}\right) = 0.$$

Отв. $-\frac{1}{7}$. Подсказка: введите функцию и исследуйте её на монотонность.

Пример 5. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\sqrt{1+a+\sqrt{a+2\cos^2 x}}=\cos 2x$ имеет решение. Отв. $\left[-\frac{5}{4};-1\right]$. Подсказка: введите функцию и исследуйте её на монотонность.

Пример 6. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x)=\sqrt{5x^2+20}+\sqrt{5x^2-32x+64}+\sqrt{5x^2-40x+100}+\sqrt{5x^2-8x+16}.$$

Отв. $4\sqrt{145}$. Подсказка: рассмотрите векторы $\vec{a}(5x,10);\quad \vec{b}(16-5x,8);\quad \vec{c}(20-5x,10);\quad \vec{d}(5x-4,8)$, их модули, модуль суммы и сумму модулей.

Пример 7. Решите уравнения

$$\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}=-1, \qquad (1)$$

$$\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}=1 \qquad (2)$$

и объясните, почему в одном случае посторонние корни появляются, а в другом – нет.

Решение. Решим первое уравнение. Возведем его в куб:

$2+3\cdot\sqrt[3]{1-x}\cdot\sqrt[3]{1+x}\cdot(-1)=-1;\ (-3)\cdot\sqrt[3]{1-x}\cdot\sqrt[3]{1+x}=-3;$

$\sqrt[3]{1-x^2}=1\ \Rightarrow x=0$ - не удовлетворяет исходному уравнению, является посторонним корнем.

Ответ: $\varnothing$.

Решим второе уравнение. Возведем его в куб:

$2+3\cdot\sqrt[3]{1-x}\cdot\sqrt[3]{1+x}\cdot 1=1;\ 3\cdot\sqrt[3]{1-x^2}=-1;\ 1-x^2=\frac{1}{27};\ x^2=\frac{28}{27};\ x=\pm\sqrt{\frac{28}{27}}.$

В том, что это истинные корни, надо убедиться проверкой, но она затруднительна. Обоснуем истинность полученных корней иначе. Рассмотрим уравнение

$$\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{a+x}=p. \qquad (*)$$

Пусть $u=\sqrt[3]{a-x},\ v=\sqrt[3]{a+x}$; $u+v=p$ - уравнение, равносильное $(*)$. Возведем его в куб:

$u^3+v^3+3uv(u+v)=p^3$. Это уравнение тоже равносильно $(*)$. Если подставить $u+v=p$, то равносильность нарушается. Покажем, как и почему это происходит.

$u^3+v^3+3uvp=p^3$; $(u+v)^3-3uv(u+v)+3uvp=p^3$;

$(u+v)^3-p^3-3uv(u+v-p)=0;$

$(u+v-p)\left((u+v)^2+(u+v)p+p^2\right)-3uv(u+v-p)=0;$

$(u+v-p)\left(u^2+v^2+p^2+2uv+up+vp\right)-3uv(u+v-p)=0;$

$(u+v-p)\left(u^2+v^2+p^2-uv+up+vp\right)=0.$

Последнее уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} u+v=p; \\ u^2+v^2+p^2-uv+up+vp=0. \end{array}\right.$$

Первое из них – это исходное уравнение, а второе – новое уравнение, которое при некоторых условиях является генератором посторонних корней. Изучим его подробнее.

$2u^2+2v^2+2p^2-2uv+2up+2vp=0$; $(u-v)^2+(v+p)^2+(u+p)^2=0$.

Последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} u-v=0, \\ v+p=0, \\ u+p=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=v, \\ u=-p, \\ v=-p. \end{cases}$$

Т.е. $u=v=-p \Leftrightarrow \sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{a+x}=-p$. $\qquad (**)$

Это и есть необходимое и достаточное условие появления посторонних корней при решении уравнения $(*)$ изложенным методом.

В уравнении (1) $a=1,\ p=-1$ и условие $\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{1+x}=1$ выполняется только при $x=0$, который является посторонним.

В уравнении (2) $a=1,\ p=1$ и условие $\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{1+x}=-1$ не выполняется ни при каких x, поэтому посторонних корней не появляется.

Ответ. $x=\pm\sqrt{\frac{28}{27}}$.

Самостоятельно выясните, при каких значениях p уравнение

$\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{a+x}=-p$ имеет решение, и найдите это решение.

(Ответ: $0<p\le 2$.)

Пример 8. . Функция $y=f(x)$ определена, возрастает и отрицательна на всей числовой прямой. Решите неравенство

$$\frac{2\cdot f\left(x^2-2x-112\right)+\left|f\left(x^2-2x-112\right)-3\cdot f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)\right|}{\left(3\cdot f\left(-2x\sqrt{32-2x}-112\right)-2\cdot f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)\right)^7}>0$$

Отв. $\left(-13-\sqrt{57};8\right)$.

Решение. Для возрастающей функции $x_1<x_2 \Leftrightarrow f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$. Анализируя знаменатель, замечаем, что аргументы функции удовлетворяют неравенству

$-2x\sqrt{32-2x}-112<-2x\sqrt{32-2x}$, значит, по свойству возрастания функции, будет выполнено неравенство : $f\left(-2x\sqrt{32-2x}-112\right)-f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)<0$.
Следовательно, знаменатель отрицателен :

$$3\cdot f\left(-2x\sqrt{32-2x}-112\right)-2\cdot f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)=$$

$$=f\left(-2x\sqrt{32-2x}-112\right)+2\cdot\left(f\left(-2x\sqrt{32-2x}-112\right)-f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)\right)<0$$

как сумма двух отрицательных слагаемых. Тогда и числитель отрицателен, т.е. из условия получаем

$$2\cdot f\left(x^2-2x-112\right)+\left|f\left(x^2-2x-112\right)-3\cdot f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)\right|<0\Leftrightarrow$$

$$\left|f\left(x^2-2x-112\right)-3\cdot f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)\right|<-2\cdot f\left(x^2-2x-112\right)\Leftrightarrow$$

$$2\cdot f\left(x^2-2x-112\right)<f\left(x^2-2x-112\right)-3\cdot f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)<-2\cdot f\left(x^2-2x-112\right)$$

Последнее двойное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}2\cdot f\left(x^2-2x-112\right)<f\left(x^2-2x-112\right)-3\cdot f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)\\ f\left(x^2-2x-112\right)-3\cdot f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)<-2\cdot f\left(x^2-2x-112\right)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}f\left(x^2-2x-112\right)<-3\cdot f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)\\ 3\cdot f\left(x^2-2x-112\right)<3\cdot f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)\end{cases};$$

Первое неравенство верно, т.к. по условию функция отрицательна. Второе неравенство системы в силу возрастания функции равносильно неравенству $\left(x^2-2x-112\right)<\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)$, которое имеет смысл только при $x\le 16$.
Намерение возводить в квадрат даже с соблюдением промежутков знакоположительности левой и правой частей неравенства оставим, как безнадёжное (для неравенства четвёртой степени). Применяя «метод пристального взгляда» к неравенству $x^2+2x\sqrt{32-2x}+\left(32-2x\right)-144<0;\quad x\le 16,$ замечаем полный квадрат:

$\left(x+\sqrt{32-2x}\right)^2<144;\quad x\le 16.$ Значит, неравенство равносильно системе:

$$-12 < x+\sqrt{32-2x} < 12; \quad x \le 16. \Leftrightarrow \begin{cases} -12 < x+\sqrt{32-2x} \\ x+\sqrt{32-2x} < 12 \\ x \le 16. \end{cases}$$

, последняя система равносильна совокупности двух систем: (1) $\begin{cases} -x-12 < \sqrt{32-2x} \\ x \le 16. \end{cases}$ и

(2) $\begin{cases} \sqrt{32-2x} < 12-x; \\ x \le 16. \end{cases}$

Замечаем, что первая система на отрезке $x \in [-12;16]$ выполняется, просто положительное число больше отрицательного. При x<-12 неравенство первой системы возводим в квадрат (обе части неравенства положительны)

(1)

$$\begin{cases} -x-12 < \sqrt{32-2x} \\ x < -12. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+24x+144 < 32-2x \\ x < -12. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+26x+112 < 0, \\ x < -12. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \in \left(-13-\sqrt{57};-12\right)$. Объединяя с $x \in [-12;16]$,

Вторая система на отрезке $x \in [12;16]$ решений не имеет, просто положительное число не может быть меньше отрицательного числа. При x<12 возведение в квадрат даёт:

$$\begin{cases} \sqrt{32-2x} < 12-x; \\ x < 12. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 32-2x < 144-24x+x^2; \\ x < 12. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 112-22x+x^2; \\ x < 12. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < (x-8)(x-14); \\ x < 12. \end{cases} \Leftrightarrow x < 8.$ Это решение второй системы. Пересекая множества решений двух систем, получим **ответ**: $x \in \left(-13-\sqrt{57};8\right)$.

Пример 9. Найдите все значения *x*, которые не могут быть корнями уравнения $3\cdot\sqrt{3x^4-2x^3} = a\cdot\sqrt[4]{6-a^4}\cdot\left(x-3x^2+6\right)$ ни при каких значениях *a*.

Решение. 1) Рассмотрим $f(a)=a\cdot\sqrt[4]{6-a^4}$; $D(f)=\left[-\sqrt[4]{6};\sqrt[4]{6}\right]$. Так как $\left|f(a)\right|=\sqrt[4]{9-\left(a^4-3\right)^2}$, то $-\sqrt{3}\le f(a)\le\sqrt{3}$, $f_{\max}\left(\sqrt[4]{3}\right)=\sqrt{3}$; $f_{\min}\left(-\sqrt[4]{3}\right)=-\sqrt{3}$. Функция $f(a)$ непрерывна, принимает все значения от $-\sqrt{3}$ до $\sqrt{3}$, следовательно, $E(f)=\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$

2) Область определения функции $3\cdot\sqrt{3x^4-2x^3}$ есть $(-\infty;0]\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$. Ясно, что все $x\in\left(0;\frac{2}{3}\right)$ не могут быть корнями исходного уравнения.

3) Не могут быть корнями исходного уравнения и корни трёхчлена $x-3x^2+6$, т.е. числа $\frac{1\pm\sqrt{73}}{2}$ т.к. при этих значениях левая часть уравнения $\neq 0$, а правая равна 0.

4) Рассмотрим $\varphi(x)=\frac{3\sqrt{3x^4-3x^3}}{x-3x^2+6}$.

$$D(\varphi)=\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{73}}{2}\right)\cup\left(\frac{1-\sqrt{73}}{2};0\right]\cup\left[\frac{2}{3};\frac{1+\sqrt{73}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{73}}{2};+\infty;\right)$$

Равенство $\varphi(x)=f(a)$не выполнится, если
1) $x\notin D(\varphi)$ или 2) $E(\varphi)\cap E(f)=\varnothing$.

Первое условие даёт $x\in\left(0;\frac{2}{3}\right)\cup\left\{\frac{1-\sqrt{73}}{2};\frac{1+\sqrt{73}}{2}\right\}$.Второе приводит к неравенству: $3\cdot\sqrt{3x^4-2x^3}>\sqrt{3}\cdot\left|x-3x^2+6\right|\Leftrightarrow 9\cdot\left(3x^4-2x^3\right)>3\cdot\left(x-3x^2+6\right)^2\Leftrightarrow$

$35x^2-12x-36>0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{6}{7}\right)\cup\left(\frac{6}{5};+\infty\right)$.

Ответ: $x\in\left(-\infty;-\frac{6}{7}\right)\cup\left(0;\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{6}{5};+\infty\right)$.

Пример 10. Найдите все значения x , которые не могут быть корнями уравнения $3\cdot\sqrt{3x^4-2x^3}=\left(\sqrt{2}\sin a+\cos a\right)\cdot\left(x-3x^2+6\right)$ни при каких значениях *a*.

Пример 11. При всех значениях а решите уравнение $a\cdot\sqrt[4]{1+x}+\frac{a}{x}\cdot\sqrt[4]{1+x}=\sqrt[4]{x}$.

Решение. ОДЗ x>0. Тогда $E\left(\sqrt[4]{x}\right)=\left(0;+\infty\right)$, следовательно, a>0. Уравнение приводим к виду $a\cdot\left(1+x\right)^{\frac{5}{4}}=x^{\frac{5}{4}}\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{5}{4}}=\frac{1}{a}\Leftrightarrow x=\frac{a^{\frac{4}{5}}}{1-a^{\frac{4}{5}}}$. Учитывая ОДЗ x>0, решаем систему $\begin{cases}\frac{a^{\frac{4}{5}}}{1-a^{\frac{4}{5}}}\\ a>0\end{cases}\Leftrightarrow a\in\left(0;1\right)$. Отв. $x=\frac{a^{\frac{4}{5}}}{1-a^{\frac{4}{5}}}, при\, a\in\left(0;1\right)$. При других a корней нет.

Пример 12. Функция $y=f\left(x\right)$ определена на отрезке $x\in\left[\frac{1}{6};6\right]$ и удовлетворяет на этом отрезке системе: $\begin{cases}\frac{1}{\cos^2 f\left(x\right)-0{,}5}-12\cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{10}{x};\\ 0\le f\left(x\right)\le\frac{\pi}{4}.\end{cases}$. Решите неравенство $f\left(x\right)\le\frac{\pi}{8}$.

Решение. После умножения числителя и знаменателя первой дроби в уравнении, знаменатель $2\cos^2 f\left(x\right)-1$ очень напоминает формулу понижения степени косинуса: $2\cos^2 f\left(x\right)=1+\cos 2f\left(x\right)$, т.о. дробь и уравнение можно записать в виде: $\frac{1}{\cos 2f\left(x\right)}-6\cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{5}{x}$. Тот факт, что по условию $x\in\left[\frac{1}{6};6\right]$ наводит на мысль сделать подстановку в уравнении $x\to\frac{1}{x}$, ведь и $\frac{1}{x}$ тоже $\frac{1}{x}\in\left[\frac{1}{6};6\right]$. Получаем из условия второе уравнение $\frac{1}{\cos 2f\left(\frac{1}{x}\right)}-6\cos\left(2f\left(x\right)\right)=5x$. Решим полученную систему относительно

$\cos 2f(x)$, для этого выразим $\cos 2f\left(\frac{1}{x}\right)$ из каждого уравнения и приравняем полученные результаты друг другу:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos 2f(x)} - 6\cos\left(2f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{5}{x}; \\ \dfrac{1}{\cos 2f\left(\dfrac{1}{x}\right)} - 6\cos(2f(x)) = 5x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\cos 2f(x)} - \dfrac{5}{x} = 6\cos\left(2f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right); \\ \dfrac{1}{5x + 6\cos(2f(x))} = \cos 2f\left(\dfrac{1}{x}\right); \end{cases}$$

Домножим второе уравнение на 6 и приравняем левыечасти уравнений:

$\dfrac{1}{\cos 2f(x)} - \dfrac{5}{x} = \dfrac{6}{5x + 6\cos(2f(x))}$, умножаем обе части уравнения на произведение знаменателей $x \cdot \cos 2f(x) \cdot (5x + 6\cos(2f(x))) \neq 0$, после преобразований получаем: $30\cos^2 2f(x) + 25x\cos(2f(x)) - 5x^2 = 0$ квадратное относительно $\cos(2f(x))$ уравнение. Решаем его через дискриминант:

$$\cos(2f(x)) = \frac{-25x \pm \sqrt{625x^2 + 600x^2}}{60} = \frac{-25x \pm 35x}{60};\ \cos(2f(x))_1 = -x;$$

$\cos(2f(x))_2 = \dfrac{x}{6}$. Выясним, какой из двух вариантов удовлетворяет условию

$0 \le f(x) \le \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 \le 2 \cdot f(x) \le \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(2f(x)) \in [0;1]$. Но функция $y = -x$ на отрезке $x \in \left[\dfrac{1}{6};6\right]$ принимает другие значения: $\left[-6;-\dfrac{1}{6}\right]$, следовательно, функция $y = -x$ не удовлетворяет условию задачи. Функция $y = \dfrac{x}{6}$ принимает на отрезке $x \in \left[\dfrac{1}{6};6\right]$ значения $\left[\dfrac{1}{36};1\right]$ и, поэтому, равенство $\cos(2f(x)) = \dfrac{x}{6}$. может выполняться. Следовательно, $f(x) = \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{x}{6}$, решим неравенство

$\frac{1}{2}\arccos\frac{x}{6}\le\frac{\pi}{8}$ графически: построим график функции $y=\frac{1}{2}\arccos\frac{x}{6}$ путем растяжения арккосинусоиды вдоль оси абсцисс в 6 раз и сжатия вдоль оси ординат в 2 раза. Горизонтальная прямая $y=\frac{\pi}{8}$ пересекает график арккосинусоиды в точке $x=3\sqrt{2}$, неравенство $\frac{1}{2}\arccos\frac{x}{6}\le\frac{\pi}{8}$ как видно из графика и в силу убывания функции $y=\frac{1}{2}\arccos\frac{x}{6}$ выполняется при $x\in\left[3\sqrt{2};6\right]$. Ответ: $x\in\left[3\sqrt{2};6\right]$.

Заметим, что абсциссу пересечения графиков можно найти и из уравнения

$$\arccos\frac{x}{6}=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\frac{x}{6}=\cos\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}.$$

Пример 13. Функция $y=f(x)$ определена на отрезке $x\in\left[\frac{1}{36};36\right]$ и удовлетворяет на этом отрезке системе:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\cos^2 f(x)-0{,}5}-12\cos\left(2f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=\dfrac{10}{\sqrt{x}};\\ 0\le f(x)\le\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

. Решите неравенство $f(x)\le\frac{\pi}{8}$.

Отв. $x\in[18;36]$.

Некоторые виды систем иррациональных уравнений и возможные способы их решений.

Решите систему уравнений:

$\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3;\\ x^2+y^2=65.\end{cases}$ **Замена**: $u=\sqrt[3]{x};v=\sqrt[3]{y}$ приводит к системе $\begin{cases}u+v=3;\\ u^6+v^6=65.\end{cases}$

Замена: $w=u+v;t=uv$ приводит к системе

$\begin{cases}w=3;\\ w^6-6w^4t+9w^2t^2-2t^3=65.\end{cases}\Rightarrow t=4.$ Далее понятно. Отв.(1;8);(8;1).

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt[2]{x}+\sqrt[2]{y}=2;\\ \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=2\sqrt{2}.\end{cases}$$ **ОДЗ**: $x\geq 0; y\geq 0.$

$$\begin{cases}\sqrt[2]{x}+\sqrt[2]{y}=2;\\ \sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{2}-\sqrt{2xy}.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=4-2\sqrt{xy};\\ x^2+y^2=8+2xy-8\sqrt{xy};\\ xy\leq 4.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=4-2\sqrt{xy};\\ (x+y)^2=8+4xy-8\sqrt{xy}\\ xy\leq 4.\end{cases}$$

Подставляя первое уравнение во второе, получаем $\sqrt{xy}=1\Leftrightarrow xy=1$.
Далее очевидно. Отв. (1;1).

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt[4]{\dfrac{x+y}{y}}+\sqrt[4]{\dfrac{y}{x+y}}=2{,}5;\\ x^2+y^2=226.\end{cases}$$ **Замена**: $t=\sqrt[4]{\dfrac{x+y}{y}}$ приводит первое уравнение к

виду $t+\dfrac{1}{t}=2{,}5\Leftrightarrow t=2; t=0{,}5$. Обратная замена $\sqrt[4]{\dfrac{x+y}{y}}=2$ или

$\sqrt[4]{\dfrac{x+y}{y}}=0{,}5$. Исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases}\sqrt[4]{\dfrac{x+y}{y}}=2;\\ x^2+y^2=226.\end{cases}$$ или $$\begin{cases}\sqrt[4]{\dfrac{x+y}{y}}=0{,}5;\\ x^2+y^2=226.\end{cases}$$ Из первого уравнения выражаем x:

$$\begin{cases}x=3y;\\ x^2+y^2=226.\end{cases}$$ или $$\begin{cases}x=-\dfrac{3}{4}y;\\ x^2+y^2=226.\end{cases}$$ Далее очевидно.

Отв.(15;1);(-15;-1); (-15a;16a); (15a;-16a); где $a=\dfrac{226}{481}$.

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 2\sqrt{x^2-1} + y^2 = 3; \\ 3(x-y) + \dfrac{2y}{\sqrt{x^2-1}-x} + 3y^2 = 0. \end{cases}$$ Отв. $\left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{9+\sqrt{21}}{6}\right); \left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{9-\sqrt{21}}{6}\right)$.

Решение. **ОДЗ**: $|x| \geq 1; y \neq 0$. В первом уравнении **выделяем полный квадрат** $\left(\dfrac{x}{y}+y\right)^2 - 2\left(\sqrt{x^2-1}+x\right) = 3$. Теперь ясно, к чему надо стремиться во втором уравнении: делим его на $y \neq 0$, в дроби домножаем числитель и знаменатель на сопряжённое к знаменателю, получим $3\left(\dfrac{x}{y}+y\right) - 2\left(\sqrt{x^2-1}+x\right) = 3$.

Замена: $u = \dfrac{x}{y} + y; \quad v = -2\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)$; система примет вид: $\begin{cases} u^2 + v = 3; \\ 3u + v = 3. \end{cases}$

Вычитая из первого уравнения второе, получим $u = 3; v = -6.$ Или $u = 0; v = 3.$ Обратная замена, исходная система равносильна совокупности двух систем: 1)

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + y = 3; \\ -2\left(\sqrt{x^2-1}+x\right) = -6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y^2 = 3y; \\ \sqrt{x^2-1} = 3 - x \\ x \in [1;3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 3y + \dfrac{5}{3} = 0; \\ x = \dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{9 \pm \sqrt{21}}{6}; \\ x = \dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + y = 0; \\ -2\left(\sqrt{x^2-1}+x\right) = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = -x; \\ \sqrt{x^2-1} = -x - 1{,}5; \\ x \leq -1{,}5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = -x; \\ x = -13/12; \Leftrightarrow \varnothing. \\ x \leq -1{,}5. \end{cases}$$

Ответ: $x=\frac{5}{3}; y=\frac{9\pm\sqrt{21}}{6}$.

Решите систему уравнений (МГУ мехмат):

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{2x+4y}=4+\sqrt{2};\\ \sqrt{x+2y}-\sqrt{2x+2y}=2\sqrt{2}-2.\end{cases}$$

Отв:(-4;6).

Решение. **ОДЗ** $x+y\ge 0; x+2y\ge 0$. **Замена** $u=\sqrt{x+2y}; v=\sqrt{x+y}$ приводит систему к виду $\begin{cases}\sqrt{2}u+v=4+\sqrt{2};\\ u-\sqrt{2}v=2\sqrt{2}-2.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=2\sqrt{2};\\ v=\sqrt{2}.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+y=2;\\ x+2y=8.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-4;\\ y=6.\end{cases}$

Решите систему уравнений (МГУ мехмат):

$$\begin{cases}\sqrt[x-y]{x+y}=2\sqrt{3};\\ (x+y)\cdot 2^{y-x}=3.\end{cases}$$

Отв:(7;5).

Решение. **ОДЗ** $x+y\ge 0;$ по определению корня $x-y\in N; x-y\ge 2$. Умножим второе уравнение на 2^{-y+x}, получим $x+y=3\cdot 2^{-y+x}$, **подставим** это выражение в первое уравнение:

$$\begin{cases}\sqrt[x-y]{3\cdot 2^{-y+x}}=2\sqrt{3};\\ x+y=3\cdot 2^{-y+x}.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt[x-y]{3}\cdot 2=2\sqrt{3};\\ x+y=3\cdot 2^{-y+x}.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=2;\\ x+y=3\cdot 2^{-y+x}.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=2;\\ x+y=12.\end{cases}$$

Во втором переходе было использовано свойство монотонности показательной функции. Отв:(7;5).

Решите систему уравнений (МГУ мехмат):

$$\begin{cases}x^{\sqrt{y}+\sqrt[4]{x}}=y^{\frac{8}{3}};\\ y^{\sqrt{y}+\sqrt[4]{x}}=x^{\frac{2}{3}}.\end{cases}$$

Отв: $\left(\frac{4}{9};\frac{16}{81}\right)$; (1;1).

Решение. ОДЗ $x>0; y>0.$ Прологарифмируем (например, по основанию 10) оба уравнения $\begin{cases}\left(\sqrt{y}+\sqrt[4]{x}\right)\cdot\lg x=\dfrac{8}{3}\lg y;\\ \left(\sqrt{y}+\sqrt[4]{x}\right)\cdot\lg y=\dfrac{2}{3}\lg x.\end{cases}$ Замечаем, что x=1;y=1удовлетворяют системе. Это одно из решений. Пусть теперь $x\neq1; y\neq1.$ Разделив первое уравнение на второе, получим $\dfrac{\lg x}{\lg y}=4\dfrac{\lg y}{\lg x}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\lg x=2\lg y\\ \lg x=-2\lg y\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y^2;\\ x=y^{-2}\end{array}\right.$.

Имеем две системы: 1) $\begin{cases}x^{\sqrt{y}+\sqrt[4]{x}}=y^{\frac{8}{3}};\\ x=y^2.\end{cases}$ и 2) $\begin{cases}x^{\sqrt{y}+\sqrt[4]{x}}=y^{\frac{8}{3}};\\ x=y^{-2}.\end{cases}$ Из первой системы получаем $\begin{cases}\left(y^2\right)^{\sqrt{y}+\sqrt[4]{y^2}}=y^{\frac{8}{3}};\\ x=y^2.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(y\right)^{4\sqrt{y}}=y^{\frac{8}{3}};\\ x=y^2.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_2=\dfrac{4}{9};\\ x_2=\dfrac{16}{81}.\end{cases}$. Вторая система рассматривается аналогично, корней она не имеет. Отв: $\left(\dfrac{4}{9};\dfrac{16}{81}\right)$; (1;1).

Решите систему уравнений (МГУ мехмат):

$$\begin{cases}\sqrt[x-y]{x+y}=\dfrac{\sqrt{52-2x}}{\sqrt[4]{x-y}};\\ \dfrac{3}{2}\log_8(x-y)-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x-y)=5.\end{cases}$$

Отв:(20;16).

Решение. ОДЗ $x+y\geq0; x-y\in N; x\leq26; x-y\neq1.$ По свойствам логарифма преобразуем второе уравнение

$$\frac{3}{2}\log_8(x-y)-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x-y)=5\Leftrightarrow\frac{1}{2}\log_2(x-y)+2\log_2(x-y)=5,$$

$\frac{5}{2}\log_2(x-y)=5 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(x-y)=1 \Leftrightarrow x-y=4.$ Возвращаемся к исходной системе $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}=\dfrac{\sqrt{52-2x}}{\sqrt[4]{4}}; \\ x-y=4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{x+y}=\sqrt{26-x}; \\ x-y=4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=(26-x)^2; \\ x-y=4. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=(26-x)^2; \\ y=x-4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-54x+680=0; \\ y=x-4. \end{cases}$ Квадратное уравнение имеет два корня:20 и 34, но второй-посторонний. Ответ:x=20; y=16.

Решите систему уравнений (МФТИ):

$\begin{cases} \sqrt[2]{x-4y}-2\cdot\sqrt{x+3y}=1; \\ 7\cdot\sqrt{x+3y}+22y+5x=13. \end{cases}$ Отв:(13;-3).

Решение. ОДЗ $x+3y\geq 0; x-4y\geq 0.$ Умножая первое уравнение на 7 а второе на 2 и складывая, получим: $7\cdot\sqrt{x-4y}=-44y-10x+33$, добавим к нему первое уравнение системы

$\begin{cases} \sqrt{x-4y}-2\cdot\sqrt{x+3y}=1; \\ 7\cdot\sqrt{x-4y}=-44y-10x+33. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-4y}-1=2\cdot\sqrt{x+3y}; \\ 7\cdot\sqrt{x-4y}=-44y-10x+33. \end{cases}$ после возведения в квадрат первого уравнения получаем два представления для $\sqrt{x-4y}$:

$\begin{cases} 2\cdot\sqrt{x-4y}=-3x-16y+1 \\ 7\cdot\sqrt{x-4y}=-44y-10x+33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14\cdot\sqrt{x-4y}=-21x-112y+7 \\ 14\cdot\sqrt{x-4y}=-88y-20x+66 \end{cases}$ которые можем приравнять: это даёт $x=-24y-59$.

Возвращаясь к исходной системе, запишем

$$\begin{cases} x=-24y-59; \\ 7\cdot\sqrt{x+3y}+22y+5x=13. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-24y-59; \\ 7\cdot\sqrt{-21y-59}=98y+308. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -24y - 59; \\ \sqrt{-21y - 59} = 14y + 44. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -24y - 59; \\ -21y - 59 = 196y^2 + 1232y + 1936; \\ y \geq -\dfrac{22}{7}. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -24y - 59; \\ \left[\begin{array}{l} y_1 = -3; \\ y_2 = -\dfrac{665}{196} < -\dfrac{22}{7}; п.к. \end{array} \right. \\ y \geq -\dfrac{22}{7}. \end{cases} \quad x=13;y=-3.$$

Заметим, что возможно было аналогично получить два представления для

$$\sqrt{x+3y}: \begin{cases} 4 \cdot \sqrt{x+3y} = -3x - 16y - 1 \\ 7 \cdot \sqrt{x+3y} = -22y - 5x + 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 28 \cdot \sqrt{x+3y} = -21x - 112y - 7 \\ 28 \cdot \sqrt{x+3y} = -88y - 2x + 52 \end{cases},$$

откуда, приравняв правые части уравнений, получить $x = -24y - 59$.Далее аналогично.

Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} \sqrt{25 - x^2} - \sqrt{25 - y^2} = \sqrt{8}; \\ \sqrt{25 - x^2} + \sqrt{25 - y^2} = \sqrt{16 + (x+y)^2}. \end{cases}$$

Зачетные работы по теме «Преобразование иррациональных выражений, решение иррациональных уравнений, неравенств, систем»

Даосский совет математика своему ученику:
« вы можете понять этот предмет, если вы будете искренне и непрерывно размышлять над ним».

Цель изучения математики - научиться находить решения незнакомой задачи.
Содержательные вопросы программы-это технический инструмент для достижения главной цели. Фольклор .

Вариант 1

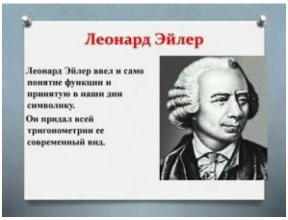
1.Для многочлена $P_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5$ вычислите $P_3\left(1+\sqrt{2}\right) + P_3\left(1-\sqrt{2}\right)$.
Этот пример можно обобщить, доказав, что значение выражения $P_3\left(a+\sqrt{b}\right) + P_3\left(a-\sqrt{b}\right)$ является целым числом для натуральлных чисел a,b, при условии, что b не является квадратом целого числа.
Как это доказать?

2. Вычислите $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{750}} \cdot \left(6 \cdot \sqrt[3]{6} - 2 \cdot \sqrt[3]{162} + 22{,}5 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{128}{9}}\right)$

3. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{10}{\sqrt{5} - \sqrt{10} + \sqrt{20} + \sqrt{40} + \sqrt{80}}$.

4. Представьте данное выражение в виде квадрата двучлена: $3 - \sqrt{8}$

5. *Решите историческую задачу Леонарда Эйлера*: докажите, что данное число является целым и найдите его значение (возможно два решения: выделение куба двучлена или с применением формулы куба суммы через уравнение): $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.



Это историческая задача Л.Эйлера (15.04.1707 Швейцария-18.09.1783 Санкт-Петербург), С 1726г. по 1740 и с 1776 по 1783 жил и работал в России, создал научную школу, автор 865 научных работ, большинство из которых являются шедеврами научной работы. Похоронен в Александро-Невской лавре СпБ.

6. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$ при $x = \dfrac{2}{a + \dfrac{1}{a}}$

7. Упростите выражение $\left(\dfrac{\left(x^2+a^2\right)^{-1/2} + \left(x^2-a^2\right)^{-1/2}}{\left(x^2+a^2\right)^{-1/2} - \left(x^2-a^2\right)^{-1/2}}\right)^{-2}$ при $x = a\left(\dfrac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{1/2}, m > 0, n > 0$.

8. Докажите иррациональность числа $\sqrt{5}$.

9. Не используя калькуляторов и ЭВМ, сравните числа $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}$ и $\sqrt{9+4\sqrt{5}}+0{,}011$.

10. Вычислите предел $\sqrt{2\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt{\ldots}}}}}$

11. Если 20% числа равны $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right):\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+2\sqrt{6}$, то чему равно это число?

Любопытна история возникновения математической символики $\sqrt{\ }$; $\sqrt[3]{\ }$ и других. В **Древнем Вавилоне** математики около 4тысяч лет назад нашли способ решения квадратных уравнений, решение словесное, никаких корней в нём нет. Правда, после этого около двух тысяч лет не могли продвинуться в решении кубического уравнения, пока эту задачу не решил 13.02.1535г. Никколо Тарталья (1500-1557).
Сохранилась вавилонская глиняная табличка с пошаговой инструкцией, как решить квадратное уравнение, но никакие символы там не использовались. Нет в клинописных табличках (может быть, не сохранилось?) доказательства ***алгоритма,*** нет и вывода формулы. Заметим, что термин *алгоритм* происходит от имени ***Ал-Хорезми***.

12. Найдите значение выражения $\sqrt[5]{0.(296)\cdot 0.(4)}-0.1(6)$, используя прогрессию для обращения периодической дроби в обыкновенную.

13. Определите, рационально или иррационально число $a=\sqrt{-100+0.(901)\cdot 111}$
.

14. Сумма корней уравнения $(x^2-5x+6)\cdot\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x^2-9}=0$ равна:
1) 4; 2) 3; 3) 2; 4) 5; 5) **6**.

15. При каком натуральном *n* (*n* > *2*) значение выражения
$\dfrac{n^3-3n+(n^2-1)\cdot\sqrt{n^2-4}-2}{n^3-3n+(n^2-1)\cdot\sqrt{n^2-4}+2}$ ближе всего к $\dfrac{12}{55}\cdot\sqrt{21}$?
$\left(\text{Подсказка}: n^3-3n-12098=(n^2+23n+526)\cdot(n-23)\right)$.

16. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $(5a-x)\sqrt{2x-2}=0$ имеет ровно один корень.

17. Решите уравнение $x^3-(2\sqrt{6}+\sqrt{7})x^2+(1+2\sqrt{42})x-\sqrt{7}=0$, если известно, что произведение двух его корней равно 1.(Запишите теорему Франсуа Виета для приведённого кубического уравнения).

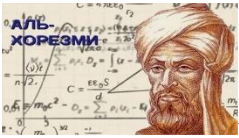
18. Решите уравнение $\sqrt[4]{x^2}+\sqrt{-x}=6$.

19. Решите уравнение $\sqrt[6]{x^2-x}+(x^2+x-2)^{0.222}=0$.

20. При каких значениях параметра *a* уравнение $(3x+2a)^{2.1}=\left((3x+2a)^{0.7}-(\sqrt{3}+1-x)^{0.4}\right)^3$ не имеет корней?

21. Решите уравнение $x+\sqrt{10-3x}=0$.

22. Решите уравнение $x+\sqrt{1-3x^2}=0$.



Первый известный (геометрический, как у Евклида) вывод формулы для корней квадратного уравнения находим в работе **Ал-Хорезми** «Китаб ал-джебр ал-Мукабала» т.е. «Книга о восстановлении и противопоставлении», в ней даются правила перенесения слагаемых с изменением знака в другую сторону равенства и приведения подобных. Изложение словесное. Неизвестная величина у Ал-Хорезми называется по традиции *вещь,* позже, в латинском переводе стало *res*, в переводе на итальянский - *cosa* (« вещь »). В Италии алгебра стала известна как *l'arte della cosa* , в Англии как *cossike arte* , или *правило coss* , а в Германии *die Coss*. В средние века алгебраистов в Германии называли *коссистами.*

23. Решите уравнение $\sqrt{2x-x^2}=4-x$.

24. Решите неравенство $\sqrt{x+1}>x-1$.

25. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}-\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=\dfrac{3}{2}$.

26. Решите уравнение $6\sqrt[5]{x}-11\sqrt[5]{\dfrac{1}{x}}=2x^{-3/5}$.

27. Решите неравенство $\sqrt{x^2-x-2}>x-1$.

28. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{8+10x-3x^2}}{6-2x}\ge 0$.

29. Решите уравнение $\sqrt{4-4x+x^2}\le\dfrac{2}{4-x}$.

30. При каких a уравнение $\sqrt{2a-x}=3-x$ имеет единственное решение? Найдите это решение. Возможны три способа решения: 1)*алгебраический* с переходом к равносильной системе; 2)**графический** с построением графиков функций в левой и правой частях уравнения; 3)*комбинированный* с исследованием ***параметра, как функции аргумента x***.

31. Решите неравенство $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{x^2+2x-3}\ge 4-2x$.

32. Решите уравнение $\dfrac{\sin x-2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{x}{4}\right)-1}{\sqrt{-x^2+\pi x+110\pi^2}}=0$.

33. Решите уравнение $\left(\operatorname{tg}\dfrac{19\pi}{4}-\operatorname{tg}x\right)\sqrt{6\cos\dfrac{15\pi}{4}\cos\dfrac{x}{2}-\cos x-3}=0$.

34. Найдите все значения **а,** при которых каждое из уравнений $\sqrt{41+9\cos x}-a\cdot\cos x=0$ и $|x-a|+7|x+2|+5x=0$ имеет хотя бы один корень. Отв. $a\in\left[-12;-4\sqrt{2}\right]\cup\left[5\sqrt{2};8\right]$. Возможны три способа решения: 1)*алгебраический* с переходом к равносильной системе; 2)**графический** с построением графиков функций в левой и правой частях уравнения; 3)*комбинированный* с исследованием ***параметра, как функции аргумента x***.

В средние века, например, у **Кардано**(24.09.1501-21.09.1576), встречаем вместо знака корня букву R или Rx, как сокращение от латинского radix, что означает корень. У Кардано запись $5+\sqrt{-15}$ выглядит так: $5p:$Rx m:15, где p означает +, а m означает -.

Современное обозначения ввёл в 1525 году немецкий (чешский) математик **Х.Рудольф (Christoph Rudolf)** (1499, Силезия – 1545, Вена), автор первого немецкого учебника алгебры. С 1517 по 1521 год Рудольф был учеником Хенрикуса Грамматеуса (Шрейбер из Эрфурта) в Венском университете, позже работал домашним учителем математики (репетитором). Рудольф написал книгу «Проворные и красивые вычисления с помощью хитрых правил алгебры, которые часто называют «косс». Использованный им знак $\sqrt{}$ есть видоизменённая первая буква radix, черта над подкоренным выражением вначале отсутствовала, её позже в 1637 г. ввёл Р.Декарт и она вскоре слилась со знаком корня.

35. Найдите все значения **а,** при которых уравнение $\sqrt{16-x}+\sqrt{a^2-x}=16+a$ имеет единственный корень.

Отв. $a\in\left[-8{,}5;+\infty\right)$.

36. Найдите все значения **а,** при которых система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+2xy+2y^2}=\sqrt{x^2-y^2};\\ \dfrac{x^8}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot(a-x)=1.\end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

Отв. $a\in\left(\dfrac{5\sqrt[5]{4}}{4};\dfrac{5\sqrt[5]{2028}}{12}\right)$.

37. Найдите все значения **а,** при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-2a}\cos x=\sqrt{x-2a}\sin x$ имеет единственный корень на оотрезке $[0;\pi]$.

Отв. $(-\infty;0)\cup\left[\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{2}\right]$.

38. Найдите все неотрицательные значения а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}\sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{(y-1)^2+x^2}=\sqrt{a^2+1}\\ y=\left|4-a^2\right|\end{cases}$ имеет единственное решение. Отв. $a\in\left[\sqrt{3};\sqrt{5}\right]$.

39. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\ln(6x-1)\cdot\sqrt[2]{x^2-2x+2a-a^2}=0$ имеет ровно один корень, принадлежащий отрезку $[0;1]$. Отв. $a\in\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{5}{3};\frac{11}{6}\right)$.

40. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $x^2+ax+4=\sqrt{20x^2+8ax+16}$ имеет ровно три различных корня. Отв. $\left[-\frac{8}{\sqrt{3}};-2\sqrt{3}\right)\cup\left(-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)\cup\left(2\sqrt{3};\frac{8}{\sqrt{3}}\right]$.

41. При всех значениях параметра а решите уравнение $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}=a$. Отв. при $a\geq\frac{2\sqrt{6}}{3}$ имеет единственный корень, $x=\frac{2a^2+4-a\sqrt{3a^2+16}}{2}$.

42.Решите уравнение $x^4+x-1=2\sqrt{x-1}$.

43.ЕГЭ2021.Найти все значения а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}\sqrt{9-y^2}=\sqrt{9-a^2x^2},\\ x^2+y^2=-6x+3y.\end{cases}$ имеет ровно 3 различных решения.

Отв. $a\in[-0{,}5;0)\cup(0;0{,}5]$.

44. Найдите все значения а, при которых уравнение $\frac{a^2-3x^2+2ax+2a+8x+1}{\left(\sqrt{2x+1}\right)^2}=\log_p p$, где $p=\frac{5}{3}-\frac{x^2}{6}-\frac{a^2}{6}$ имеет ровно один

корень. Отв. $a \in (-3;-2{,}5] \cup \{-2;-3\sqrt{0{,}4};0\} \cup [1;1{,}5)$. Используйте координатно-параметрическую плоскость.

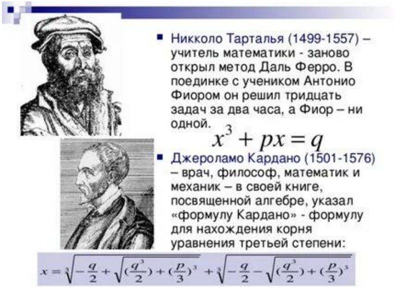
Жирар Альберт (1595-1632), голландский математик, закончил Лейденский университет, был учеником С. Стевина.Главный его труд **«Новые открытия в алебре» (Амстердам,1629**) содержал новые результаты: была высказана основная теорема алгебры, доказанная в 1799 году К.Гауссом, дано объяснение отрицательных и нулевых корней уравнения, для общности результатов рассматриваются комплексные корни, впервые введён кубический радикал, т.е. символ $\sqrt[3]{\ }$. Жирар дал окончательный современный вывод общей формулы для корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

45.Найдите все значения параметра а, при каждом из которых решение неравенства $\dfrac{(x-a)(a-3\sqrt{x})}{\sqrt{12-x-2a}} \ge 0$ содержит отрезок длиной не менее 2. Отв. $a \in [3;3\sqrt{19}-9)$.

46. Решите неравенство $\dfrac{7-3x+\sqrt{x^2+3x-4}}{x-3} < -1$.Отв. $x \in (-\infty;-4] \cup [1;3) \cup (5;+\infty)$.Можно перейти к совокупности двух равносильных систем или применить метод интервалов.

47. (ЕГЭ2021)Найти все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $|x^2-4a^2| = |x+2a| \cdot \sqrt{x+18}$ имеет ровно два различных решения. Отв. $\left\{-9\frac{1}{8};-1\frac{1}{8};1\right\} \cup (9;+\infty)$. Используйте координатно-параметрическую плоскость.

48. Известно, что $\sqrt{2}$ является корнем уравнения $x^3-(a+2)x^2+bx-2a=0$ ($a,b \in Z$). Найдите значения a,b и остальные корни уравнения.



49.*Решите историческую задачу Никколо Тартальи:* **для решения уравнения $x^3 = ax + b$ найти такую замену $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$, которая выражает искомую неизвестную x через коэффициенты a,b. Найдите выражения для u,v.**

(Подсказка: u,v являются решениями системы $\begin{cases} u + v = b, \\ uv = \left(\dfrac{a}{3}\right)^3 \end{cases}$. Формула, полученная в результате этих действий, позволила Никколо Тарталье победить в математическом диспуте и войти в историю, как автору гениального открытия. Сама формула несправедливо названа другим именем).

50. **Решите исследовательскую задачу**.

Проведите исследование уравнения $x + \sqrt{x(a - x)} = 1$ по следующему плану.

I. **Решение алгебраическое, путём перехода к равносильной системе.**

1) Решите данное уравнение при а=-5; а=1; а=10. Какую закономерность удалось заметить?

2)Преобразуйте исходное уравнение к равносильной системе из квадратного уравнения и ограничения на х.

3)Надо ли проверять, что корни полученного квадратного уравнения принадлежат ОДЗ исходного уравнения?

4)Найдите все значения параметра а, при каждом из которых существуют корни $x_1(a)$; $x_2(a)$ полученного квадратного уравнения (без учёта ограничения на х)?

Здесь $x_1(a)$ обозначает левый корень, который получается при выборе знака «-» перед радикалом, а $x_2(a)$- правый корень, соответствующий знаку «плюс» перед радикалом.

5)Найдите те контрольные значения параметра а, при которых корни совпадают, т.е. $x_1(a) = x_2(a)$.

$x_1(a)$ обозначает левый корень, который получается при выборе знака «-» перед радикалом, а $x_2(a)$- правый корень, соответствующий знаку «плюс» перед радикалом.

6)При каких значениях а $x_1(a) \le 1$?

7) При каких значениях а $x_2(a) \le 1$?

8) Составьте таблицу, показывающую, сколько корней имеет исходное уравнение в зависимости от а (т.е. развёртку по параметру).

II. **Решение графическое, путём построения графика функций** $y = \sqrt{x(a-x)}$; $y = 1 - x$.

1)Покажите, что графиком функции $y = \sqrt{x(a-x)}$ является полуокружность, найдите её радиус и координаты центра.

2)Постройте график функции $y = \sqrt{x(a-x)}$ при различных а: $a \in \{-5; -4; -2; 0{,}5; 1; 2; 10\}$.

3)При каких значениях а прямая $y = 1 - x$ касается графика функции $y = \sqrt{x(a-x)}$? Найдите координаты точки касания и соответствующее $a_{кас}$.

4)По графику определите число корней исходного уравнения в зависимости от а.

5) Составьте таблицу, показывающую, сколько корней имеет исходное уравнение в зависимости от а (т.е. развёртку по параметру).

6)Как использовать полученные результаты для решения уравнения $\sqrt{x(a-x)} = 1 + x$?

III. Решение комбинированное: исследование функции $a = a(x)$ **алгебраическим и графическим способами.**

1)Выразите из уравнения а, как функцию переменной х. Какова область определения этой функции $a = a(x)$?

2)Постройте график функции $a = a(x)$. Найдите экстремумы функции. Найдите область значений функции $a = a(x)$.
3)По графику $a = a(x)$ определите число корней исходного уравнения в зависимости от а.
4)При каких целых значениях параметра а корень уравнения х является целым?
5)Составьте таблицу, показывающую, сколько корней имеет исходное уравнение в зависимости от а (т.е. развёртку по параметру).

51. Найдите все значения *x*, которые не принадлежат множеству корней уравнения $\sqrt{81x^4-126x^3}=\left(\cos\sqrt{a}\cdot\sin a^2+\cos a^2\cdot\sin\sqrt{a}\right)\cdot\left(1+7x-9x^2\right)$ ни при каких значениях *a*.

52.(ЕГЭ2008)Даны уравнения:

$$\left(3+3^{\frac{p-4}{p-3}}\right)^x=73-3x \quad и \quad \sqrt{7p-13-\left(2p^2-3p-5\right)x}=5p-x-7$$

Значения параметра выбираются так, чтобы оба уравнения имели смысл и при делении числа различных корней второго уравнения на число различных корней первого уравнения получается 4-р. Решите первое уравнение при каждом значении р, выбранном таким способом. Отв: р=4, х=3.

53.Найдите область определения функции $y=\sqrt{(x-x_0)tg\,\pi x}$**, где** x_0**-меньший корень уравнения** $3^{\frac{1}{2x}}\cdot 27^{\frac{1}{4x}}\cdot 243^{\frac{1}{20x}}=3\cdot 3^{\frac{x}{2}}$**. (СГАУ1997, 6ф-т).**

54.Дана система уравнений $\begin{cases}\sqrt{y+3x+1}=2;\\ \sqrt{2y-x+2}=2-x.\end{cases}$ **Найдите область допустимых значений и изобразите её на координатной плоскости. Решите данную систему уравнений. (СГАУ1997, 6ф-т).**

55. (ЕГЭ). Для чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{28}$ верны равенства $a_{n+1}=f\left(a_n\right)$, n=1,2,…27. Найдите $a_9+a_7-a_6$, если известно, что $a_{28}=0$ и

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{3x-3}{x-3}, x<3;\\ \sqrt[5]{\dfrac{x-4}{x-2}}+\sqrt{\dfrac{27x-17}{3x+7}}; x\geq 3.\end{cases}$$

Отв.2.

56.Решите неравенство $\sqrt{\dfrac{3x+4}{2x-1}}+\sqrt{\dfrac{2x-1}{3x-5}}\geq 2\cdot\sqrt[4]{\dfrac{3x+4}{3x-5}}$.

57.Решите неравенство $-2+\sqrt{7+9x}\geq\dfrac{x+13}{4x-3}$.

Отв. $\left[-\dfrac{7}{9};\dfrac{3}{4}\right]\cup\left[2;+\infty\right)$.

58.Найдите все натуральные значения параметра n>1, при которых отрезок длины n является областью определения функции $y=\sqrt[n]{\left(5n-6-x\right)^3\left(2x-32+3n\right)^{7n-5}}$.
Отв.4.

59.(ЕГЭ). При каких положительных значениях параметра a область определения функции $y=\left(a^x-a^{ax-2}\right)^{-0,5}$ **содержит только три натуральных числа?** **Отв.** $a\in\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{3}\right]$**.**

60.Решите систему уравнений $\begin{cases} (x+y)^{\sqrt{x-y}} = x-y; \\ (x-y)^{\sqrt{x-y}} = (x+y)^9; \quad x+y>0. \end{cases}$ **Отв.**

$\left(\frac{\sqrt[3]{9}+9}{2}; \frac{\sqrt[3]{9}-9}{2}\right)$.

61. Решите уравнение $3^{2x+1} = 3^{x+2} + \sqrt{1-6\cdot 3^x + 3^{2(x+1)}}$.

Отв. $2 \pm \sqrt{\frac{11}{3}}$.

62. Решите неравенство $\sqrt{4^x - 2^x - 2} \ge 4 - 2^x$.

63. При каких а уравнение

$$\left(\sqrt{x^2-3ax+8} + \sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x + \left(\sqrt{x^2-3ax+8} - \sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x = 2^{1+\frac{x}{2}}$$

имеет единственное решение? **Отв.** $a \in \left(-\frac{2}{3}\sqrt{6}; \frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$.

Подсказка: используйте неравенство Огюстена Коши.

64. Решите уравнение $\sqrt[2]{1-x^8} + \sqrt[2]{1-x^4} + \sqrt[2]{1+x^4} = 3$.
Отв.0. Подсказка: используйте неравенство О.Коши.

65. Точка А лежит на графике функции $y = f(x)$, точка В – на оси ОХ и её абсцисса в два раза больше ординаты точки А. Найдите наибольшее значение площади треугольника АОВ, где точка О – начало координат и

$f(x) = \sqrt{(7x+3)\sin x + 7\cos x + 8}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{5}; \frac{4\pi}{5}\right]$. Отв. **3,5** π +11.

65*. Решите уравнение $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}$. Отв. -1.

Почему появляется посторонний корень x=0?

66. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $x^2+\frac{2x}{\sqrt{\sin a}}+\frac{1}{\cos a}+2\sqrt{2}=0$ имеет единственное решение.

Отв. $\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{12}+2\pi k;n,k\in Z$

67.Решите систему уравнений $\begin{cases}\frac{9x^2-6y-31}{3x+2y+11}=-14x+8y+13;\\ \sqrt{10-(2x-3y-9)^2}=\sqrt{10-(5x-y+2)^2}\end{cases}$.

68.Дано: $x+\sqrt{y}+\sqrt[3]{z}=7,\quad 2x+3\sqrt{y}+4\sqrt[3]{z}=29.$ Вычислите значение выражения $x+3\sqrt{y}+5\sqrt[3]{z}$. Подсказка: разложите третью сумму по базису двух первых слагаемых.

69. Найдите $f(x)$, если $2f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=\sqrt{x}$. Постройте эскиз графика функции $y=f(x)$.

70.Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+100-16x-12y}+\sqrt{x^2+y^2+104+4x-20y}=2\sqrt{29},\\ x^2+y^2-14x-10y+58=0\end{cases}$

Отв. $y=\frac{180+2\sqrt{415}}{29};x=\frac{217-52\sqrt{415}}{29}$.

Подсказка: используйте геометрический смысл системы, первое уравнение задаёт отрезок прямой $y=-\frac{2}{5}x+\frac{46}{5}$, а второе – окружность.

71.Найдите все значения параметра a, при каждом из которых число решений уравнения $2x^3+6x=\left(3^{6a}-9\right)\sqrt{2^{8a}-\frac{1}{6}-(3a-1)^2\cdot 12^x}$ не меньше числа решений уравнения $3\left(5x^2-a^4\right)-2x=2a^2(6x-1)$.

Отв. $\frac{1}{3}$. Подсказка: дискриминант второго уравнения равен $D(a)=\left(9a^2-1\right)^2\geq 0$.

72. Изобразите множество точек M(a,b) координатной плоскости Oab таких, что уравнение $\sqrt{2x-b}=\sqrt{x^2+2ax-b}$ имеет два различных корня относительно x. Отв. в плоскости Oab множество точек на сторонах и внутри тупого угла со сторонами на прямых b=0 (ось абсцисс) и 6a+b-4=0 за исключением точек вертикальной прямой $a=\dfrac{2}{3}$.

73. Решите неравенство $\sqrt[3]{x-a}+\sqrt[3]{x-b}+\sqrt[3]{x-c}\ge 0$, где $a,b,c\in R$.

Отв. $x\ge x_0$, где $x_0=6\cdot\dfrac{\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3-abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$.

Если a=b=c, то $x_0=a$.

Подсказка: исследуйте функцию $f(x)=\sqrt[3]{x-a}+\sqrt[3]{x-b}+\sqrt[3]{x-c}$ на монотонность и решите уравнение $f(x)=0$.

74. Решите уравнение $\sqrt[4]{77+x}+\sqrt[4]{20-x}=5$. Отв.4;-62.

75. Найдите все a, при которых корни уравнения $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=a$ существуют и принадлежат отрезку $[2;17]$. Отв. $[1;3]$.

76. Решите уравнения

$$\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}=-1, \qquad (1)$$

$$\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}=1 \qquad (2)$$

и объясните, почему в одном случае посторонние корни появляются, а в другом – нет.

Решение. Решим первое уравнение. Возведем его в куб:

$2+3\cdot\sqrt[3]{1-x}\cdot\sqrt[3]{1+x}\cdot(-1)=-1;\ (-3)\cdot\sqrt[3]{1-x}\cdot\sqrt[3]{1+x}=-3;$

$\sqrt[3]{1-x^2}=1\ \Rightarrow x=0$ - не удовлетворяет исходному уравнению, является посторонним корнем.

Ответ: $\varnothing$.

Решим второе уравнение. Возведем его в куб:

$2+3\cdot\sqrt[3]{1-x}\cdot\sqrt[3]{1+x}\cdot 1=1;\ 3\cdot\sqrt[3]{1-x^2}=-1;\ 1-x^2=\frac{1}{27};\ x^2=\frac{28}{27};\ x=\pm\sqrt{\frac{28}{27}}.$

В том, что это истинные корни, надо убедиться проверкой, но она очень затруднительна.
Обоснуем истинность полученных корней иначе. Рассмотрим уравнение

$$\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{a+x}=p. \qquad (*)$$

Пусть $u=\sqrt[3]{a-x},\ v=\sqrt[3]{a+x}$; $u+v=p$ - уравнение, равносильное $(*)$. Возведем его в куб:

$u^3+v^3+3uv(u+v)=p^3$. Это уравнение тоже равносильно $(*)$. Если подставить $u+v=p$, то равносильность нарушается. Покажем, как и почему это происходит.

$u^3+v^3+3uvp=p^3$; $(u+v)^3-3uv(u+v)+3uvp=p^3$;

$(u+v)^3-p^3-3uv(u+v-p)=0$;

$(u+v-p)\left((u+v)^2+(u+v)p+p^2\right)-3uv(u+v-p)=0$;

$(u+v-p)\left(u^2+v^2+p^2+2uv+up+vp\right)-3uv\left(u+v-p\right)=0$;

$(u+v-p)\left(u^2+v^2+p^2-uv+up+vp\right)=0.$

Последнее уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} u+v=p; \\ u^2+v^2+p^2-uv+up+vp=0. \end{array}\right.$$

Первое из них – это исходное уравнение, а второе – новое уравнение, которое при некоторых условиях является генератором посторонних корней. Изучим его подробнее.

$2u^2+2v^2+2p^2-2uv+2up+2vp=0$; $(u-v)^2+(v+p)^2+(u+p)^2=0$.

Последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} u-v=0, \\ v+p=0, \\ u+p=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=v, \\ u=-p, \\ v=-p. \end{cases}$$

Т.е. $u=v=-p \Leftrightarrow \sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{a+x}=-p$. $\qquad (**)$

Это и есть необходимое и достаточное условие появления посторонних корней при решении уравнения $(*)$ изложенным методом.

В уравнении (1) $a=1,\ p=-1$ и условие $\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{1+x}=1$ выполняется только при $x=0$, который является посторонним.

В уравнении (2) $a=1,\ p=1$ и условие $\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{1+x}=-1$ не выполняется ни при каких x, поэтому посторонних корней не появляется.

Ответ. $x=\pm\sqrt{\frac{28}{27}}$.

Самостоятельно выясните, при каких значениях p уравнение $\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{a+x}=-p$ имеет решение, и найдите это решение.
(Ответ: $0<p\le 2$.)

№77.Могут ли числа $\sqrt{2};\sqrt{3};\sqrt{5}$ быть членами одной арифметической прогрессии?

Если Бог хочет сделать тебя счастливым, он ведёт тебя трудной дорогой, потому что лёгких путей к счастью не бывает. Омар Хайям, известный математик.

Ответы к варианту 1.

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10
28	2	$\frac{2\sqrt{5}(7-\sqrt{2})}{47}$	$(1-\sqrt{2})^2$	4	$\frac{1}{a}, a\in(0;1]\cup\cup(-\infty;-1]$. $a, a\ge 1;$ $a\in[-1;0)$	$\left(\frac{n}{m}\right)^2, m>n.$ $\left(\frac{m}{n}\right)^2, m<n.$		выделить куб и квадрат двучленов	$\sqrt[3]{12}$

№11	№12	№13	№14	№15	№16	№17	№18	№19	№20
25	0,5	$\frac{1}{3}$	6, т.к. 3-двукратный корень.	23	$a\le 0,2$	$\sqrt{7};\sqrt{6}-\sqrt{5};$ $\sqrt{6}+\sqrt{5}$	-9	1	$a<-1,5-$ $-1,5\sqrt{3}$

№21	**№22**	**№23**	**№24**	**№25**	**№26**	**№27**	**№28**	**№29**	**№30**
-5	**-0,5**	$\varnothing$	$[-1;3)$	**0,6**	$4\sqrt{2}$	$(-\infty;-1]\cup$ $(3;+\infty)$	$\left[-\frac{2}{3};3\right)$	$[3-\sqrt{3};4)$	$a\in\left\{\frac{11}{8}\right\}\cup$ $(1{,}5;+\infty)$

№ 31	**№32**	**№33**	**№34**	**№35**	**№36**	**№37**	**№38**	**№39**	**№40**
$[1;+\infty)$	$\frac{\pi}{2}+4\pi n,$ $n\in\{\pm 2;\pm 1;0\}$ **5корней.**	$-\frac{\pi}{4}+4\pi n,$ $n\in Z$	$a\in$ $\left[-12;-4\sqrt{2}\right]\cup$ $\left[5\sqrt{2};8\right]$	$a\geq -8{,}5$	$a\in\left(\frac{5\sqrt[5]{4}}{4};\frac{5\sqrt[5]{2028}}{12}\right)$	$(-\infty;0)\cup\left[\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{2}\right]$	$a\in\left[\sqrt{3};\sqrt{5}\right]$	$a\in\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{5}{3};\frac{11}{6}\right)$	$\left[-\frac{8}{\sqrt{3}};-2\sqrt{3}\right)\cup$ $\left(-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)\cup$ $\left(2\sqrt{3};\frac{8}{\sqrt{3}}\right]$

№41	**№ 42**	**№43**	**№44**	**№45**	**№46**	**№47**	**№48**	**№ 49**	**№ 50**
$a\geq\frac{2\sqrt{6}}{3}$ $x=\frac{2a^2+4-a\sqrt{3a^2+16}}{2}$	$\varnothing$	$a\in[-0{,}5;0)\cup$ $(0;0{,}5]$	$a\in(-3;-2{,}5]\cup$ $\left\{-2;-3\sqrt{0{,}4};0\right\}\cup$ $[1;1{,}5)$	$a\in\left[3;3\sqrt{19}-9\right)$	$x\in(-\infty;-4]$ $\cup[1;3)\cup$ $(5;+\infty)$	$\left\{-9\frac{1}{8};-1\frac{1}{8};1\right\}\cup$ $(9;+\infty)$	$\pm\sqrt{2};$ $1;$ **b=-2;** **a=-1.**		

№51	**№ 52**	**№53**	**№54**	**№55**	**№56**	**№57**	**№58**	**№59**	**№60**
$\left(\frac{-7-\sqrt{18}}{31};\frac{7-\sqrt{85}}{18}\right)$ $\cup$ $\left(0;\frac{14}{9}\right)$	**p= 4, x= 3.**	$x_0=-3$ $x\le-3\Rightarrow$ $n+0{,}5<x\le n+1$ $n\le-4.$ $x\ge-3\Rightarrow$ $n\le x<n+0{,}5$ $n\ge-3$	$(-4;15)$ $(1;0)$	**2**	$x\le-\frac{4}{3}$; $x>\frac{5}{3}$.	$\left[-\frac{7}{9};\frac{3}{4}\right]\cup$ $[2;+\infty)$	**4**	$a\in\left[\frac{3}{2};\frac{5}{3}\right)$	$\left(\frac{\sqrt[3]{9}+9}{2};\frac{\sqrt[3]{9}-9}{2}\right)$ **;** $(0;1)$

№61	**№62**	**№63**	**№ 64**	**№65**	**№66**	**№67**	**№ 68**	**№69**	**№70**
$x=\log_2\left(2+\sqrt{\frac{11}{3}}\right)$	$x\ge\log_2\frac{18}{7}$	$a\in\left(-\frac{2}{3}\sqrt{6};\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$	**0**	**3,5 π +11**	$\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{12}+2\pi k;$ $n,k\in Z$	**x=-1; y=-3,5**	**37**	$\frac{3-2x}{5\sqrt{x}}$ **x>0**	$x=\frac{217-52\sqrt{415}}{29}$ $y=\frac{180+2\sqrt{415}}{29}$

Решения варианта 1.

№1. **Применяя формулы сокращённого умножения, преобразуем выражение:**

$$P_3\left(a+\sqrt{b}\right)+P_3\left(a-\sqrt{b}\right)=$$
$$2\left(\left(a+\sqrt{b}\right)^3+\left(a-\sqrt{b}\right)^3\right)-3\left(\left(a+\sqrt{b}\right)^2+\left(a-\sqrt{b}\right)^2\right)+4\left(\left(a+\sqrt{b}\right)+\left(a-\sqrt{b}\right)\right)+10=$$
$$=2\left(\left(a+\sqrt{b}\right)^3+\left(a-\sqrt{b}\right)^3\right)-3\left(\left(a+\sqrt{b}\right)^2+\left(a-\sqrt{b}\right)^2\right)+4\left(\left(a+\sqrt{b}\right)+\left(a-\sqrt{b}\right)\right)+10=$$
$$=2\cdot 2a\left(2(a)^2+(2b)-\left(a^2-b\right)\right)-6\left((a)^2+(b)\right)+8a+10=$$

При a=1,

$$=4a\left((a)^2+(3b)\right)-6\left((a)^2+(b)\right)+8a+10-\textit{целое}\quad\textit{число}.\quad QED.$$

b=2 $\Rightarrow 4(1+6)-6(1+2)+8+10=28.$

При a=1, b=3 $\Rightarrow 4(1+9)-6(1+3)+24+10=50.$

№2. **Применяя разложение натуральных чисел на множители, т.е. в произведение степеней простых оснований, получаем возможность частичного извлечения корня (где это возможно):** $\frac{1}{3\sqrt[3]{750}}\cdot\left(6\cdot\sqrt[3]{6}-2\cdot\sqrt[3]{162}+22{,}5\cdot\sqrt[3]{\frac{128}{9}}\right)=$

$$\frac{1}{3\cdot5\cdot\sqrt[3]{6}}\left(6\cdot\sqrt[3]{6}-2\cdot3\cdot\sqrt[3]{6}+\frac{45}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{64\cdot2}{9}}\right)=\frac{1}{15\cdot\sqrt[3]{6}}\left(\frac{45}{2}\cdot4\cdot\sqrt[3]{\frac{2\cdot3}{9\cdot3}}\right)=$$

$$=\frac{1}{15\cdot\sqrt[3]{6}}\left(\frac{90}{3}\cdot\sqrt[3]{6}\right)=2.$$

№3. Вынося за скобки общий множитель, получим:

$$\frac{10}{\sqrt{5}-\sqrt{10}+\sqrt{20}+\sqrt{40}+\sqrt{80}}=\frac{10}{\sqrt{5}\left(1-\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+4\right)}=\frac{10}{\sqrt{5}\left(7+\sqrt{2}\right)}$$

Домножая числитель и знаменатель на $\sqrt{5}$ и на сопряжённое к знаменателю, избавимся от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{10\sqrt{5}\left(7-\sqrt{2}\right)}{5\left(7+\sqrt{2}\right)\left(7-\sqrt{2}\right)}=\frac{2\sqrt{5}\left(7-\sqrt{2}\right)}{(49-2)}=\frac{14\sqrt{5}-2\sqrt{10}}{47}.$$

№4. Перепишем данное выражение $3-\sqrt{8}$ в виде: $1-2\sqrt{2}+2=\left(1-\sqrt{2}\right)^2.$

№5. 1-ый способ. Используем формулу $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$. Пусть x= $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$, тогда

$$x^3=\left(20+14\sqrt{2}\right)+\left(20-14\sqrt{2}\right)+3\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)=$$

$$x^3=\left(20+14\sqrt{2}\right)+\left(20-14\sqrt{2}\right)+3\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)=$$

$$x^3=40+3\sqrt[3]{400-392}\cdot(x)=40+6x\Leftrightarrow x^3-6x-40=0$$

$x^3-6x-40=0\Leftrightarrow(x-4)\left(x^2+4x+10\right)=0$. $\exists! x=4$, следовательно, данная сумма радикалов равна 4.

2-ой способ. Высказываем гипотезу, что подкоренные выражения можно свернуть в куб двучлена с целыми коэффициентами a,b: $20+14\sqrt{2}=\left(a+b\sqrt{2}\right)^3=a^3+3a^2b\sqrt{2}+3ab^2\cdot 2+2\sqrt{2}b^3$. Приравнивая целое число 20 к сумме целых, иррациональное к сумме иррациональных, получаем диофантову систему $\begin{cases}20=a^3++3ab^2\cdot 2,\\ 14\sqrt{2}=3a^2b\sqrt{2}+2\sqrt{2}b^3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$.

Проверка: $20+14\sqrt{2}=\left(2+\sqrt{2}\right)^3$.

Аналогично, $20-14\sqrt{2}=\left(2-\sqrt{2}\right)^3$.

Значит, $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4.$

Ответ:4.

№6. ОДЗ: $x \in [-1;1]; a \neq 0$.

При a>0 $a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2 - 2a + 1}{a} \geq 0 \quad \textit{верно}$.

Аналогично, при a<0 $a + \frac{1}{a} \leq -2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + 2a + 1}{a} \leq 0 \quad \textit{верно}$. Следовательно,

$x = \dfrac{2}{a + \frac{1}{a}} \in [-1;1] \quad \forall a \neq 0$. На ОДЗ домножаем числитель и знаменатель дроби

на сопряжённое к знаменателю:

$$\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \frac{2 + 2\sqrt{1-x^2}}{2x} = \frac{1}{x} + \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1} = \frac{a + \frac{1}{a}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a + \frac{1}{a}}{2}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left|a - \frac{1}{a}\right|.$$

Подмодульное выражение неотрицательно и модуль раскрывается со знаком

«плюс», если $a - \frac{1}{a} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2 - 1}{a} \geq 0 \Leftrightarrow a \in [-1;0) \cup [1;+\infty)$.

Итак, данное выражение равно a, при $a \in [-1;0) \cup [1;+\infty)$.

Данное выражение равно $\dfrac{1}{a}$, если $a \in (-\infty;-1] \cup (0;1]$.

Заметим, что при $a = \pm 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} = \pm 1 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{a}$.

№7. ОДЗ: $a \neq 0$. $\left(\dfrac{\left(x^2+a^2\right)^{-1/2}+\left(x^2-a^2\right)^{-1/2}}{\left(x^2+a^2\right)^{-1/2}-\left(x^2-a^2\right)^{-1/2}}\right)^{-2}$ при

$x = a\left(\dfrac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{1/2}, m>0, n>0$. Обозначим $r = x^2 - a^2; \quad s = x^2 + a^2$, тогда

данное выражение запишется в виде

$$\left(\frac{(s)^{-1/2}+(r)^{-1/2}}{(s)^{-1/2}-(r)^{-1/2}}\right)^{-2} = \left(\frac{(s)^{-1/2}-(r)^{-1/2}}{(s)^{-1/2}+(r)^{-1/2}}\right)^{2} = \frac{\frac{1}{s}+\frac{1}{r}-\frac{2}{\sqrt{sr}}}{\frac{1}{s}+\frac{1}{r}+\frac{2}{\sqrt{sr}}} =$$

$$\frac{r+s-2\sqrt{sr}}{r+s+2\sqrt{sr}} = \left(\frac{\sqrt{r}-\sqrt{s}}{\sqrt{r}+\sqrt{s}}\right)^2 = \ldots$$

Вычислим предварительно

$$\sqrt{r} = \sqrt{\left(a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{1/2}\right)^2 - a^2} = |a|\sqrt{\frac{m^2+n^2}{2mn}-1} = |a|\sqrt{\frac{(m-n)^2}{2mn}} = \frac{|a(m-n)|}{\sqrt{2mn}}.$$

$$\sqrt{s}=\sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{\left(a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{1/2}\right)^2+a^2}=|a|\sqrt{\frac{m^2+n^2}{2mn}+1}=,$$

$$|a|\sqrt{\frac{(m+n)^2}{2mn}}=\frac{|a(m+n)|}{\sqrt{2mn}}$$

тогда

$$\left(\frac{\sqrt{r}-\sqrt{s}}{\sqrt{r}+\sqrt{s}}\right)^2=\left(\frac{|a(m-n)|-|a(m+n)|}{|a(m-n)|+|a(m+n)|}\right)^2=\left(\frac{|(m-n)|-|(m+n)|}{|(m-n)|+|(m+n)|}\right)^2=\frac{|(m-n)|^2-2|(m^2-n^2)|+|m+n|^2}{|(m-n)|^2+2|(m^2-n^2)|+|m+n|^2}=$$

$$\frac{m^2+n^2-|m^2-n^2|}{m^2+n^2+|m^2-n^2|}=\begin{cases}\dfrac{n^2}{m^2}, m>n;\\ \dfrac{m^2}{n^2}, m<n\end{cases}.$$

№8. Допустим противное, что $\sqrt{5}$ рациональное число, т.е. выполняется равенство $\sqrt{5}=\dfrac{p}{q}$, где p,q – натуральные, взаимно простые числа. Тогда $q\sqrt{5}=p\leftrightarrow 5q^2=p^2$, т.к. левая часть делится на 5, то и равная ей правая часть делится на 5, значит p кратно 5, т.е.p=5p_1, где p_1 натуральное число;

$5q^2=p^2\leftrightarrow 5q^2=25{p_1}^2\leftrightarrow q^2=5{p_1}^2$, откуда следует, что q кратно 5, противоречие. Источник противоречия – предположение противного, значит, предположение противного неверно, а верно прямое утверждение об иррациональности $\sqrt{5}$. **Доказательство аналогично доказательству иррациональности $\sqrt{2}$, данному пифагорийцем Гиппасом из Метапонта. Этот факт разрушил доктрину пифагорийцев, что всё есть натуральное число (мы бы сейчас сказали, моделируется, выражается в натуральных числах, наподобии 18-ой задачи егэ), это не только уничтожило пифагорейскую общину, но и привело к первому в истории кризису математики. Кризис был преодолён благодаря Евдоксу и его теории пропорций.**

№9. Что-то подсказывает нам, что надо выделить под корнем $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}$ куб двучлена, что $38+17\sqrt{5}=\left(a+b\sqrt{5}\right)^3$, $a,b\in N$. Проверим нашу гипотезу, тогда выполняется равенство:

$38+17\sqrt{5}=\left(a+b\sqrt{5}\right)^3=a^3+3a^2b\sqrt{5}+3ab^2 5+5b^3\sqrt{5}$; приравнивая сумму целых чисел к 38, а сумму иррациональных чисел к $17\sqrt{5}$, получим диофантову систему (после сокращения на $\sqrt{5}$: $\begin{cases}38=a^3+3ab^2 5;\\ 17=3a^2b+5b^3\end{cases}$ решением которой являются a=2,b=1, в чём убеждаемся проверкой! Гипотеза нашла свое полное подтверждение $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}=2+\sqrt{5}.$ Аналогично, получаем $\sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}=2+\sqrt{5}.$ Так что решение сравнения $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}\ \vee\ \sqrt{9+4\sqrt{5}}+0{,}011$ очевидно эквивалентно решению сравнения $2+\sqrt{5}\ \vee\ 2+\sqrt{5}+0{,}011.$

Ответ: $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}\ <\ \sqrt{9+4\sqrt{5}}+0{,}011.$

№10. Как известно, при произведении степеней с равными основаниями показатели степени складываются. В данном выражении стоят произведения различных степеней двойки и **произведения раз**личных степеней тройки. Преобразуем выражение, найдя сумму показателей степени двойки, а затем сумму показателей степени тройки: $\sqrt{2\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt{\ldots}}}}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots}\cdot 3^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots}$ в показателях степени обнаружилась бесконечно убывающая прогрессия, сумма которой находится по формуле $S_\infty=\dfrac{b_1}{1-q}$, тогда

$$2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots}\cdot 3^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots}=2^{\frac{0{,}5}{1-0{,}25}}\cdot 3^{\frac{0{,}25}{1-0{,}25}}=2^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{12}.$$

№11. $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right):\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+2\sqrt{6}=\dfrac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}{3-2}+2\sqrt{6}=5$. **Ответ:25.**

№12. $\sqrt[5]{0.(296)\cdot 0.(4)}-0.1(6)$;

$0.(4)=0{,}4444....=\dfrac{4}{10}+\dfrac{4}{100}+\dfrac{4}{100}+\dfrac{4}{1000}+...=\dfrac{0{,}4}{1-0{,}1}=\dfrac{4}{9}$; по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

$$0.1(6)=0{,}1+\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}+\frac{6}{10000}+...=0{,}1+\frac{0{,}06}{1-0{,}1}=0{,}1+\frac{6}{100-10}=$$

$$=0{,}1+\frac{6}{90}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}.$$

Аналогично, $0.(296)=\dfrac{0{,}296}{1-0{,}001}=\dfrac{296}{1000-1}=\dfrac{296}{999}$.

Подставим в исходное выражение:

$$\sqrt[5]{0.(296)\cdot 0.(4)}-0.1(6)=\sqrt[5]{\frac{296}{999}\cdot\frac{4}{9}}-\frac{1}{6}=\sqrt[5]{\frac{32\cdot 37}{243\cdot 37}}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

№13.

$$a=\sqrt{-100+0.(901)\cdot 111}=\sqrt{-100+\frac{901}{999}\cdot 111}=\sqrt{-100+\frac{901}{9}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}.$$

№14. Корень x=3 является двукратным, а кратные корни, как это принято в основной теореме алгебры, считаются столько раз, какова их кратность. Ответ 6.

№15. Преобразуем выражение, для этого разложим кубические многочлены n^3-3n-2 и n^3-3n+2 на множители (среди делителей свободного члена находятся корни многочлена, далее теорема Этьена Безу)

$$\frac{(n+1)^2(n-2)+(n^2-1)\cdot\sqrt{n^2-4}}{(n-1)^2(n+2)+(n^2-1)\cdot\sqrt{n^2-4}}=\frac{(n+1)\sqrt{n-2}\left((n+1)\sqrt{n-2}+(n-1)\sqrt{n+2}\right)}{(n-1)\sqrt{n+2}\left((n-1)\sqrt{n+2}+(n+1)\sqrt{n-2}\right)}=\frac{(n+}{(n-}$$

Выясним, имеет ли уравнение $\dfrac{(n+1)\sqrt{n-2}}{(n-1)\sqrt{n+2}}=\dfrac{12}{55}\cdot\sqrt{21}$ **решение в натуральных числах. После возведения в квадрат и приведения подобных получим кубическое уравненние** $n^3-3n-12098=0$**, имеющее единственный действительный корень n=23.**

№16. $(5a-x)\sqrt{2x-2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1; \\ \left[\begin{array}{l} x_1=1; \\ x_2=5a. \end{array}\right. \end{cases}$ Возникает вопрос: как из двух корней сделать один? Это осуществимо в двух случаях: если корни совпали при а=0,2, или второй корень не принадлежит ОДЗ, т.е.а<0,2. Отв. $a\le 0{,}2$.

№17. По теореме Франсуа Виета для приведённого кубического уравнения $x_1\cdot x_2\cdot x_3=\sqrt{7}$, но по условию произведение двух корней равно единице, следовательно, третий корень равен $x_3=\sqrt{7}$. По теореме Этьена Безу кубический многочлен делится на $\left(x-\sqrt{7}\right)$, в частном получается $x^2-2\sqrt{6}x+1$, остальные корни найдём, решая квадратное уравнение.

18. $\sqrt[4]{x^2}+\sqrt{-x}=6$. **ОДЗ:** $x\le 0$. **Используя свойство степени с рациональным показателем, запишем уравнение так**

$$\sqrt[4]{(-x)^2}+\sqrt{-x}=6 \Leftrightarrow \sqrt[2]{(-x)^1}+\sqrt{-x}=6 \Leftrightarrow 2\sqrt{-x}=6 \Leftrightarrow \sqrt{-x}=3 \Leftrightarrow x=-9.$$

19. $\sqrt[6]{x^2-x}+(x^2+x-2)^{0.222}=0$, **ОДЗ** $x\le -2; x\ge 1$. **Сумма двух неотрицательных слагаемых равна нулю только в одном случае:**

$$\sqrt[6]{x^2-x}+(x^2+x-2)^{0.222}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[6]{x^2-x}=0; \\ (x^2+x-2)^{0.222}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

№20. $(3x+2a)^{2.1}=\left((3x+2a)^{0.7}-(\sqrt{3}+1-x)^{0.4}\right)^3$. **ОДЗ:** $x\le\sqrt{3}+1; x\ge -\dfrac{2a}{3}$. **Необходимое условие существования корня - это чтобы отрезок** $-\dfrac{2a}{3}\le x\le\sqrt{3}+1$ **не был пустым , т.е. чтобы**

$-\dfrac{2a}{3}\le\sqrt{3}+1 \Leftrightarrow a\ge -1{,}5\sqrt{3}-1{,}5$. **Тогда корень единственный** $x=\sqrt{3}+1$.

Если же $a<-1{,}5\sqrt{3}-1{,}5$, **то корней нет. Отв.**

$a<-1{,}5\sqrt{3}-1{,}5 \Leftrightarrow \varnothing$.

№21. $x+\sqrt{10-3x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{10-3x}=-x\\ -x\geq 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}10-3x=(-x)^2\\ -x\geq 0,\end{cases} \Leftrightarrow x=-5.$

№22. $x+\sqrt{1-3x^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{1-3x^2}=-x;\\ -x\geq 0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-3x^2=(-x)^2;\\ -x\geq 0.\end{cases} \Leftrightarrow x=-0{,}5.$

№23. $\sqrt{2x-x^2}=4-x \Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 4;\\ 2x-x^2=(4-x)^2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 4;\\ x^2-5x+8=0\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$

№24. $\sqrt{x+1}>x-1$**. ОДЗ** $x\geq -1$. **Правая часть обращается в нуль при x=1. На отрезке от -1 до 1 неравенство выполняется потому, что нуль больше отрицательного числа (при x=-1) и потому, что положительное больше отрицательного. При x=1имеем** $\sqrt{2}>0$**, верно. При x>1 обе части неравенства положительны и возведение в квадрат приводитк равносильному неравенству:**
$\begin{cases}\sqrt{x+1}>x-1;\\ x>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+1>(x-1)^2;\\ x>1\end{cases} \Leftrightarrow x\in(1;3)$**.Объединяя с отрезком** $x\in[-1;1]$**, получим**
ответ: $x\in[-1;3)$**.**

№25. $\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}-\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=\dfrac{3}{2}$. ОДЗ $x\in(-1;1)$, замена $t=\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}} \Rightarrow t>0$,
уравнение примет вид: $t-\dfrac{1}{t}=1{,}5 \Leftrightarrow 2t^2-3t-2=0 \Leftrightarrow t=2;-0{,}5-п.к.$

Обратная замена $2=\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$ даёт $x=\dfrac{3}{5}$.

Отв. $x=\dfrac{3}{5}$.

№26. $6\sqrt[5]{x}-11\sqrt[5]{\dfrac{1}{x}}=2x^{-3/5}$**. Известно, что степень с рациональным показателем определена на множестве положительных чисел,** $D\left(x^{\frac{m}{n}}\right)=(0;+\infty)$**,**

следовательно необходимое условие существования корня, или ОДЗ, x>0. Домножим на ОДЗ обе части уравнения на $\sqrt[5]{x}$ **, получаем** $6\sqrt[5]{x^2}-11=2x^{-2/5}$**,**

замена $t=\sqrt[5]{x^2}, t>0$ **дает уравнение**

$6t-11=\dfrac{2}{t}\Leftrightarrow 6t^2-11t-2=0\Leftrightarrow t=2;-\dfrac{1}{6}$ $\quad$ *п.к.* **Обратная замена**

$2=\sqrt[5]{x^2}\Leftrightarrow x=4\sqrt{2}$.

Отв. $x=4\sqrt{2}$.

№27. $\sqrt{x^2-x-2}>x-1$. **ОДЗ** $x^2-x-2\ge 0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$. **На всём луче** $x\in(-\infty;-1]$ **неравенство выполняется, т.к. положительное число больше отрицательного (при x=-1получаем 0>-2, верно). При** $x\in[2;+\infty)$ **обе части неотрицательны, возведение в квадрат приводит к равносильному на этом луче неравенству** $\begin{cases}\sqrt{x^2-x-2}>x-1\\ x\in[2;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>3\\ x\in[2;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow x>3.$

Объединяя полученные множества, запишем ответ: $x\in(-\infty;-1]\cup(3;+\infty)$.

№28. $\dfrac{\sqrt{8+10x-3x^2}}{6-2x}\ge 0$. **Необходимое условие существования функций, входящих в неравенство, или ОДЗ:** $\begin{cases}8+10x-3x^2\ge 0;\\ x\ne 3.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left[-\dfrac{2}{3};4\right];\\ x\ne 3.\end{cases}\Leftrightarrow$

$x\in\left[-\dfrac{2}{3};3\right)\cup(3;4]$. **На первом полуинтервале неравенство выполняется, на втором знаменатель отрицателен, неравенство не выполнено.**

Отв. $x\in\left[-\dfrac{2}{3};3\right)$.

№29. $\sqrt{4-4x+x^2}\le\dfrac{2}{4-x}\Leftrightarrow|x-2|\le\dfrac{2}{4-x}$. **Разбиваем числовую прямую точками x=2; x=4 на три промежутка. Если** $x\ge 4$**, то решений нет: при x=4 неравенство не определено, при x>4 положительная левая часть не может быть меньше отрицательной правой части. Рассмотрим второй промежуток:**

$$\begin{cases} x\in[2;4); \\ |x-2|\le \dfrac{2}{4-x}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[2;4); \\ x-2\le \dfrac{2}{4-x}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[2;4); \\ (x-2)(4-x)\le 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[2;4); \\ -x^2+6x-10\le 0, \end{cases} \Leftrightarrow x\in[2;4)$$

,т.к. квадратное неравенство выполняется для всех x, и на полуинтервале тоже. Часть ответа получена.
Если x<2, то

$$\begin{cases} x<2; \\ 2-x\le \dfrac{2}{4-x}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2; \\ (2-x)(4-x)\le 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2; \\ x^2-6x+6\le 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2; \\ 3-\sqrt{3}\le x\le 3+\sqrt{3} \end{cases}$$

Объединяя полуинтервалы $x\in[2;4)$ **и** $3-\sqrt{3}\le x<2$**, получаем**

Ответ: $3-\sqrt{3}\le x<4.$

Возможно графическое решение неравенства $|x-2|\le \dfrac{2}{4-x}$: в одной системе координат строим график «галочки» $y=|x-2|$ и гиперболы $y=\dfrac{2}{4-x}$ с вертикальной ассимптотой x=4. Из графика видно, что правее ассимптоты решений нет. Левее ассимптоты при $3-\sqrt{3}\le x<4$ «галочка» ниже (не выше) гиперболы, при $x<3-\sqrt{3}$ «галочка» выше гиперболы.

№30. $\sqrt{2a-x}=3-x$ **. Воможны три подхода к решению задачи: 1)алгебраический через равносильную систему; 2) графический; 3)координатно-параметрический, где параметр рассматривается как функция x. Выберем графический способ: построим прямую, отсекающую от осей координат отрезки длиной 3 и часть параболы в верхней полуплоскости, с осью симметрии OX, с ветвями влево и вершиной параболы в точке (2a,0).**

Парабола может не иметь общих точек с прямой при a< $\dfrac{11}{8}$**, может касаться прямой при a=** $\dfrac{11}{8}$**, может дважды пересекать прямую; при a>1,5 парабола и прямая имеют одну общую точку.**

Значение $a_{кас}=\dfrac{11}{8}$ **может быть найдено либо из условия равенства нулю дискриминанта квадратного уравнения, получаемого при приравнивании выражений для функций:**

$$\sqrt{2a-x}=3-x\Leftrightarrow\begin{cases}3-x\ge 0,\\ 2a-x=x^2-6x+9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-x\ge 0,\\ 0=x^2-5x+9-2a\end{cases};$$

$$D(a)=25-4(9-2a)=0\Leftrightarrow a=\frac{11}{8}.$$

Либо же значение $a_{кас}=\dfrac{11}{8}$ **может быть найдено из условия касания графиков двух функций** $y=f(x);\quad y=\varphi(x)$, **которое имеет вид**

$$\begin{cases}f(x)=\varphi(x);\\ f'(x)=\varphi'(x).\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2a-x}=3-x;\\ \dfrac{-1}{2\sqrt{2a-x}}=-1.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{кас}=2{,}5;\\ a_{кас}=\dfrac{11}{8}.\end{cases}$$

Ответ: при $a\in\left\{\dfrac{11}{8}\right\}\cup(1{,}5;+\infty)$ **уравнение имеет единственное решение.**

№31. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{x^2+2x-3}\ge 4-2x$. **ОДЗ** $x\ge 1$. **«Метод пристального взгляда» позволяет переписав неравенство в виде** $x-1+2\sqrt{x^2+2x-3}+x+3+\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}\right)+\ge 6$, **заметить квадрат двучлена в скобках плюс этот самый двучлен. Замена** $t=\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}\right);\quad t>0$ **приводит неравенство к системе вида:**

$$\begin{cases}t>0;\\ t^2+t\ge 6;\end{cases}\Leftrightarrow t\ge 2.$$ **Обратная замена при** $x\ge 1$

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}\ge 2\Leftrightarrow 2x+2+2\sqrt{x^2+2x-3}\ge 4\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x-3}\ge 1-x.$$

Последнее неравенство на ОДЗ $x\ge 1$ **выполняется всегда, т.к. неотрицательная левая часть больше или равна неположительной правой части.**

Ответ: $x\ge 1$.

№32.

$$\frac{\sin x-2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{4}\right)-1}{\sqrt{-x^2+\pi x+110\pi^2}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}-x^2+\pi x+110\pi^2>0;\\ \sin x-2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{4}\right)-1=0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in(-10\pi;11\pi);\\ \sin x-\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right)-1=0,\end{cases}$$

$$\sin x-\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right)-1=0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{x}{2}-2=0;$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)-2=0;\quad (*)$$

замена

$$t=\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right];\quad t^2=1+2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2};\Rightarrow\quad t^2-1=2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2};$$

тогда $(*)$ примет вид:

$$t^2-1+\frac{1}{\sqrt{2}}t-2=0\Leftrightarrow t_{1,2}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}+12}}{2};t_1=-1{,}5\sqrt{2}<-\sqrt{2}\quad п.к.$$

$t_2=\sqrt{2}$ **, обратная замена**

$$\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)=1\Leftrightarrow\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow$$

$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=2\pi n\Leftrightarrow\quad x=\frac{\pi}{2}+4\pi n;n\in Z$ **. Заметим, что уравнение**

$\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}=\sqrt{2}$ **можно решить другим способом, возводя в квадрат:**

$\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}=\sqrt{2}\Rightarrow 1+\sin x=2\Leftrightarrow\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ **, однако, здесь при возведении в квадрат появляются посторонние корни и предстоит отсеивание посторонних корней. Поэтому второй способ менее надёжен. После этого получаются уже знакомые нам корни уравнения** $x=\frac{\pi}{2}+4\pi n;n\in Z$ **.**

Возвращаясь с системе

$$\begin{cases} x \in (-10\pi; 11\pi); \\ \sin x - \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right) - 1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-10\pi; 11\pi); \\ x = \frac{\pi}{2} + 4\pi n; n \in Z, \end{cases}$$ **находим**

корни, принадлежащие интервалу $(-10\pi; 11\pi)$**:**

$x = \frac{\pi}{2} + 4\pi n; \quad n \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$**, т.е. всего пять корней.**

№33. Используя периодичность тригонометрических функций и табличные значения, получим:

$$\left(\mathrm{tg}\frac{19\pi}{4} - \mathrm{tg}\, x\right)\sqrt{6\cos\frac{15\pi}{4}\cos\frac{x}{2} - \cos x - 3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\mathrm{tg}\frac{20\pi - \pi}{4} - \mathrm{tg}\, x\right)\sqrt{6\cos\frac{16\pi - \pi}{4}\cos\frac{x}{2} - \cos x - 3} = 0$$

$$(\mathrm{tg}\, x + 1)\sqrt{3\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} - \cos x - 3} = 0; \quad (*)$$

Теперь удобнее находить ОДЗ: $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in Z; \\ 3\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} - \cos x - 3 \geq 0. \end{cases}$

Решим неравенство

$$3\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} - \cos x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} - \left(2\cos^2\frac{x}{2} - 1\right) - 3 \geq 0 \Leftrightarrow -2\cos^2\frac{x}{2} + 3\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} - 2 \geq 0.$$

Для решения квадратного неравенства сделаем замену $t = \cos\frac{x}{2} \Rightarrow t \in [-1; 1]$,

решаем систему

$$\begin{cases} t \in [-1; 1] \\ -2t^2 + 3\sqrt{2}t - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in [-1; 1] \\ t \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right].$$

Обратная замена

$$\cos\frac{x}{2}\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]\Leftrightarrow\frac{x}{2}\in\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right]\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{\pi}{2}+4\pi n;\frac{\pi}{2}+4\pi n\right];n\in Z.$$

Итак, ОДЗ определена:

$$\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n;n\in Z;\\ 3\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2}-\cos x-3\geq 0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n;n\in Z;\\ x\in\left[-\dfrac{\pi}{2}+4\pi n;\dfrac{\pi}{2}+4\pi n\right];n\in Z.\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\pi}{2}+4\pi n;\frac{\pi}{2}+4\pi n\right);n\in Z.$$

Возвращаясь к исходному уравнению $(*)$, запишем, что на ОДЗ оно равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x+1=0;\\ 3\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2}-\cos x-3=0,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\\ \cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\end{array}\right.$$

Корни первого уравнения принадлежат ОДЗ только с периодом 4π, т.е. имеют вид $x=-\dfrac{\pi}{4}+4\pi n;n\in Z$, а корни второго уравнения не принадлежат ОДЗ. Ответ:

$$x=-\frac{\pi}{4}+4\pi n;n\in Z.$$

№34. При каких а каждое из уравнений $\sqrt{41+9\cos x}-a\cdot\cos x=0$ и $|x-a|+7|x+2|+5x=0$ имеет хотя бы один корень? Исследуем сначала каждое уравнение на разрешимость, а затем пересечём найденные значения параметра а. В уравнении $\sqrt{41+9\cos x}-a\cdot\cos x=0$ сделаем замену $t=\cos x\Rightarrow t\in[-1;1]$. Исследуем разрешимость уравнения $\sqrt{41+9t}-a\cdot t=0$ на отрезке $t\in[-1;1]$. Функция $f(t)=\sqrt{41+9t}-a\cdot t$ непрерывна на отрезке $t\in[-1;1]$, поэтому применима теорема Бернардо Больцано: если функция $f(t)=\sqrt{41+9t}-a\cdot t$ непрерывна на отрезке $t\in[-1;1]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков (т.е. $f(-1)\cdot f(1)\leq 0$), то на этом отрезке

функция обращается в нуль хотя бы в одной точке. Таким образом, теорема Больцано даёт достаточное условие существования корня на отрезке. Имеем:

$$f(-1)\cdot f(1)\le 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{41-9}+a\right)\left(\sqrt{41+9}-a\right)\le 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{32}+a\right)\left(\sqrt{50}-a\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow a\in\left(-\infty;-\sqrt{32}\right]\cup\left[\sqrt{50};+\infty\right)$$

Исследуем разрешимость уравнения $|x-a|+7|x+2|+5x=0$**. Функция** $\varphi(x)=|x-a|+7|x+2|+5x=0$ **убывает при** $x\le -2$**, так как коэффициент при x отрицателен, и возрастает при** $x\ge -2$**, так как коэффициент при x положителен, следовательно,** $x_{\min}=-2$**. Чтобы функция** $\varphi(x)$ **обращалась в нуль необходимо и достаточно, чтобы минимальное значение функции было меньше или равно нуля, т.е. условия** $\varphi(-2)\le 0$ **достаточно, чтобы уравнение** $\varphi(x)=|x-a|+7|x+2|+5x=0$ **имело корень. Имеем:**

$$\varphi(-2)\le 0 \Leftrightarrow |-2-a|+7|-2+2|+5(-2)\le 0 \Leftrightarrow |a+2|\le 10 \Leftrightarrow \quad -12\le a\le 8.$$

Осталось пересечь найденные множества: $a\in\left(-\infty;-\sqrt{32}\right]\cup\left[\sqrt{50};+\infty\right)$ **и** $-12\le a\le 8$.

Ответ: при $a\in\left[-12;-\sqrt{32}\right]\cup\left[\sqrt{50};8\right]$ **каждое из уравнений** $\sqrt{41+9\cos x}-a\cdot\cos x=0$ **и** $|x-a|+7|x+2|+5x=0$ **имеет хотя бы один корень.**

Заметим, что исследование уравнения $|x-a|+7|x+2|+5x=0$ **можно провести графически: запишем его в виде** $|x-a|=-7|x+2|-5x$ **и построим графики левой и правой частей уравнения. Перемещая «галочку»** $y=|x-a|$ вдоль оси абсцисс, найдём значения параметра а, при которых графики ломаных пересекаются.

Исследование разрешимости первого уравнения можно провести, если найти множество значений функции $a(x)=\dfrac{\sqrt{41+9\cos x}}{\cos x}$**, тогда уравнение разрешимо, если** $a\in E\left(\dfrac{\sqrt{41+9\cos x}}{\cos x}\right)$.

№35.Замечаем, что функция $y=\sqrt{16-x}+\sqrt{a^2-x}$ на области определения $D(y)=\left(-\infty;\min\left(16;a^2\right)\right]$ является монотонно убывающей, как сумма двух убывающих функций (иначе: производная $y'=\dfrac{-1}{2\sqrt{16-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{a^2-x}}$ отрицательна на области определения). А монотонная функция каждое своё значение из области значений принимает только один раз. Поэтому, если корень данного уравнения существует, то он единственный. Значит, достаточно найти условие существования корня, а единственность получится автоматически в силу свойств входящих в уравнение функций.

К этому выводу можно прийти и иначе: перепишем уравнение $\sqrt{16-x}+\sqrt{a^2-x}=16+a$ в виде $\sqrt{16-x}=16+a-\sqrt{a^2-x}$, в левой части уравнения стоит убывающая функция, а в правой – возрастающая. Графики функций различной монотонности могут пересекаться не более, чем в одной точке. Поэтому достаточно найти условие существования корня, тогда единственность его уже обеспечена. Применим графический метод решения задачи с параметром.

Графиком функции $y=\sqrt{16-x}$ является верхняя половина параболы с осью симметрии на оси абсцисс, ветвь направлена влево и с вершиной в точке (16;0). График расположен в верхней полуплоскости XOY.

Графиком функции $y=16+a-\sqrt{a^2-x}$ является нижняя половина параболы с осью симметрии y=16+a, параллельной оси абсцисс, ветвь направлена влево и с вершиной в точке $\left(a^2;16+a\right)$. График пересекает ось абсцисс в точке (-32a-256;0) и, если эта точка пересечения правее вершины первой параболы, т.е. если $-32a-256>16 \Leftrightarrow a<-8{,}5$ то пересечений нет, а, значит, корней нет. Итак, при a<-8,5 корней нет.

Если точка (-32a-256;0) совпадает с вершиной первой параболы, то будет один корень уравнения x=16 при a=-8,5.

С увеличением a, т.е. при $a\geq -8{,}5$ вторая парабола смещается влево и вверх, так, что её вершина $\left(a^2;16+a\right)$всегда расположена выше параболы $y=\sqrt{16-x}$, действительно,

$$\begin{cases} a \ge -8{,}5; \\ \sqrt{16-a^2} < 16+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge -8{,}5; \\ 16-a^2 < 256+32a+a^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a \ge -8{,}5; \\ 0 < 240+32a+2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge -8{,}5; \\ 0 < 56+(a+8)^2 \end{cases} \textit{верно},$$

а значит, пересечение парабол обеспечивает наличие единственного корня.

Заметим, что точка $(a^2;16+a)$ **движется по параболе** $x=(y-16)^2$ при $a \in [-16;0]$ от точки (256;0) по нижней ветви параболы до точки (0;16). А при a>0 движется от точки (0;16) по верхней ветви параболы вправо-вверх.

Ответ: при $a \ge -8{,}5$ существует единственный корень уравнения.

№36. $\begin{cases} \sqrt{x^2+2xy+2y^2} = \sqrt{x^2-y^2}; \\ \dfrac{x^8}{\left(x^2+y^2\right)^2} \cdot (a-x) = 1. \end{cases}$

ОДЗ: $x \ne 0; \quad y \ne 0; \quad x^2-y^2 \ge 0.$

При x=0 второе уравнение не выполняется, поэтому все точки оси ординат (0;y) не являются корнями системы. Из первого уравнения следует

$$\sqrt{x^2+2xy+2y^2} = \sqrt{x^2-y^2} \Leftrightarrow x^2+2xy+2y^2 = x^2-y^2 \Leftrightarrow$$

$$y(3y+2x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0; \\ 3y+2x=0, \end{array}\right.$$

Что данная система распадается на совокупность двух систем, корни которых подлежат объединению.

1) $\begin{cases} y=0; \\ \dfrac{x^8}{\left(x^2+y^2\right)^2} \cdot (a-x) = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0; \\ \dfrac{x^8}{\left(x^2+0^2\right)^2} \cdot (a-x) = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0; \\ x^4 \cdot (a-x) = 1. \end{cases}$

Исследуем первую систему. Сколько корней имеет уравнение $x^4\cdot(a-x)=1$ в зависимости от значений параметра а? Используя графический подход, исследуем функцию $y=x^4\cdot(a-x)$ и построим её график.

Что данная система распадается на совокупность двух систем, корни которых подлежат объединению.

$$1)\begin{cases} y=0; \\ \dfrac{x^8}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot(a-x)=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0; \\ \dfrac{x^8}{\left(x^2+0^2\right)^2}\cdot(a-x)=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0; \\ x^4\cdot(a-x)=1. \end{cases}$$

Исследуем первую систему. Сколько корней имеет уравнение $x^4\cdot(a-x)=1$ в зависимости от значений параметра а? Используя графический подход, исследуем функцию $y=x^4\cdot(a-x)$ и построим её график.

$y'=4x^3\cdot(a-x)-x^4=x^3\cdot(4a-5x)$, если a>0,то

$x_{\max}=\dfrac{4a}{5}\Rightarrow y_{\max}\left(\dfrac{4a}{5}\right)=\dfrac{256a^5}{3125}$. Если $\dfrac{256a^5}{3125}>1$, то система 1) имеет 3 корня. Если $\dfrac{256a^5}{3125}=1$, то система 1) имеет 2 корня.

Если $0<\dfrac{256a^5}{3125}<1$, то система 1) имеет 1 корень.

При $a\le 0$ **система имеет 1 корень.**

Решим записанные неравенства и уравнения относительно **а, результаты оформим в виде развёртки по параметру а:**

$a<\dfrac{5}{4}\cdot\sqrt[5]{4}$	$a=\dfrac{5}{4}\cdot\sqrt[5]{4}$	$a\ge\dfrac{5}{4}\cdot\sqrt[5]{4}$
1 корень у системы 1)	**2 корня у системы 1)**	**3 корня у системы 1)**

$$2)\begin{cases} y=-\dfrac{2}{3}x; \\ \dfrac{x^8}{\left(\left(x^2+\left(-\dfrac{2}{3}x\right)^2\right)\right)^2}\cdot(a-x)=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{2}{3}x; \\ \dfrac{x^8}{\left(x^2+\dfrac{4}{9}x^2\right)^2}\cdot(a-x)=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{2}{3}x; \\ x^4\cdot(a-x)=\dfrac{169}{81}. \end{cases}$$

Исследуем вторую систему. Сколько корней имеет уравнение $x^4\cdot(a-x)=\dfrac{169}{81}$ в зависимости от значений параметра а? Используя графический подход, исследуем функцию $y=x^4\cdot(a-x)$ и построим её график.

$y'=4x^3\cdot(a-x)-x^4=x^3\cdot(4a-5x)$, если а>0,то

$x_{\max}=\dfrac{4a}{5}\Rightarrow y_{\max}\left(\dfrac{4a}{5}\right)=\dfrac{256a^5}{3125}$. Если $\dfrac{256a^5}{3125}>\dfrac{169}{81}$, то система 1) имеет 3 корня.

Если $\dfrac{256a^5}{3125}=\dfrac{169}{81}$, то система 1) имеет 2 корня.

Если $0<\dfrac{256a^5}{3125}<\dfrac{169}{81}$, то система 1) имеет 1 корень.

При $a\le 0$ **система имеет 1 корень.**

Решим записанные неравенства и уравнения относительно **а, результаты оформим в виде развёртки по параметру а:**

$a<\dfrac{5}{12}\cdot\sqrt[5]{2028}$	$a=\dfrac{5}{12}\cdot\sqrt[5]{2028}$	$a\ge\dfrac{5}{12}\cdot\sqrt[5]{2028}$
1 корень у системы 1)	**2 корня у системы 1)**	**3 корня у системы 1)**

Анализируя обе развёртки по параметру и, учитывая, что $\dfrac{5}{4}\cdot\sqrt[5]{4}<\dfrac{5}{12}\cdot\sqrt[5]{2028}$, приходим к выводу, что исходная система имеет ровно четыре корня (решения) при $\dfrac{5}{4}\cdot\sqrt[5]{4}<a<\dfrac{5}{12}\cdot\sqrt[5]{2028}$.

Внесём порядок в хаос.
Неизвестный автор.

№37. Уравнение $\sqrt{x-2a}\cos x=\sqrt{x-2a}\sin x$ имеет единственный корень на отрезке $[0;\pi]$.

1)ОДЗ уравнения $\sqrt{x-2a}(\cos x-\sin x)=0$ состоит из двух условий

$\begin{cases}x-2a\ge 0;\\ x\in[0;\pi],\end{cases}$, определяющих значения x, при которых определены функции

$f(x)=\sqrt{x-2a};\quad \varphi(x)=(\cos x-\sin x)$ в задаче.

2)Произведение двух функций $f(x)=\sqrt{x-2a};\quad \varphi(x)=(\cos x-\sin x)$равно нулю, когда хотя бы одна из них обращается к нулю, а другая определена.

Очевидны корни множителей: $x_1=\dfrac{\pi}{4};\quad x_2=2a.$

Но требуется ещё проверка на принадлежность ОДЗ.

3)На оси ОХ мы имеем три фиксированные точки $0;\quad \dfrac{\pi}{4};\quad \pi$,

разбивающие ось абсцисс на четыре интервала и подвижную «плавающую» точку $x=2a$, которая может занимать семь различных позиций: слева, справа от фиксированных точек или совпадать с ними.

4)Последовательно рассмотрим эти семь случаев, начиная с правого интервала.

Исследование количества корней уравнения в зависимости от значений параметра а.

$2a<0$	$2a=0$	$0<2a<\dfrac{\pi}{4}$	$2a=\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{4}<2a<\pi$	$2a=\pi$
Один корень $\dfrac{\pi}{4}$, т.к. второй $x_2=2a$ не принадлежат ОДЗ.	**Два корня** $0=2a$ **и** $\dfrac{\pi}{4}$.	**Два корня** $2a$ **и** $\dfrac{\pi}{4}$.	**Один корень, т.к. совпадают** $x_1=x_2=\dfrac{\pi}{4}$	**Один корень** $x_2=2a$ т.к. $x_1=\dfrac{\pi}{4}$ не принадлежа т ОДЗ.	**Один корень** $x_2=2a=\pi$ т. $x_1=\dfrac{\pi}{4}$ не принадлежат О
$a<0\Rightarrow 1\quad k$	$a=0$ $\Rightarrow 2\quad k$	$0<a<\dfrac{\pi}{8}$ $\Rightarrow 2\quad k$	$a=\dfrac{\pi}{8}$ $\Rightarrow 1\quad k$	$\dfrac{\pi}{8}<a<\dfrac{\pi}{2}$ $\Rightarrow 1\quad k$	$a=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow 1\quad k$

Выбирая из результатов полного исследования количества корней в зависимости от значений параметра а интересующий нас случай 1 корня, получим **Ответ:** при $a \in (-\infty;0) \cup \left[\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{2}\right]$ будет 1 корень у уравненния на отрезке $[0;\pi]$.

№38. Система $\begin{cases} \sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{(y-1)^2+x^2}=\sqrt{a^2+1} \\ y=\left|4-a^2\right| \end{cases}$ имеет ясный геометрический смысл: в системе XOY рассмотрим точки A(0;1) и B(a;0), $a \ge 0$, принадлежащие I-ому квадранту, и точку M(x:y). Первое уравнение означает, что сумма расстояний от точки M до точек A и B равно расстоянию от точки A до точки B. Это возможно только для точки M, принадлежащей отрезку AB. Уравнение прямой, проходящей через точки A и B имеет вид $\frac{x}{a}+\frac{y}{1}=1$ (это уравнение «прямой в отрезках»). По сути, первое уравнение системы – это уравненние отрезка прямой AB. Второе уравнение системы – это уравнение некоторой горизонтальной прямой в верхней полуплоскости, она должна пересечь отрезок, это возможно только тогда, когда прямая пересекает проекцию отрезка на ось ординат, т.е. если

$$0 \le \left|4-a^2\right| \le 1 \Leftrightarrow \left|a^2-4\right| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le a^2-4 \le 1 \Leftrightarrow 3 \le a^2 \le 5 \Leftrightarrow$$

$\sqrt{3} \le a \le \sqrt{5}$, т.к. по условию $a \ge 0$.

Ответ: при $\sqrt{3} \le a \le \sqrt{5}$ система имеет единственное решение.

Заметим, что если бы условия $a \ge 0$ не было, получился бы ещё один отрезок $-\sqrt{5} \le a \le -\sqrt{3}$, симметричный первому. Решение исходной системы нетрудно получить из системы

$$\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{1}=1; a \ge 0; \\ y=\left|4-a^2\right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-\frac{x}{a}; a \ge 0; \\ y=\left|4-a^2\right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|4-a^2\right|=1-\frac{x}{a}; a \ge 0; \\ y=\left|4-a^2\right| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=a\left(1-\left|4-a^2\right|\right); a \ge 0; \\ y=\left|4-a^2\right|. \end{cases}$$

№39. $\ln(6x-1)\cdot\sqrt[2]{x^2-2x+2a-a^2}=0$ **имеет ровно один корень, принадлежащий отрезку** $[0;1]$.

1)ОДЗ:

$$\begin{cases}6x-1>0;\, x\in[0;1];\\ x^2-2x+2a-a^2\ge 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{1}{6};\, x\in[0;1];\\ (x-1)^2-(a-1)^2\ge 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left(\dfrac{1}{6};1\right];\\ (x-a)(x+a-2)\ge 0;\end{cases}\qquad(*)$$

Вводим координатно-параметрическую плоскость (КПП) AOX: по оси абсцисс откладываем параметр а, по оси ординат – координату х. Система $(*)$ **задаёт треугольник** $A\left(\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right);B\left(\frac{11}{6};\frac{1}{6}\right);C(1;1)$, **включая внутренние точки и границу, за исключением отрезка АВ прямой** $x=\frac{1}{6}$.

2)Приравняв множители к нулю, найдём на ОДЗ корни уравнения

$$x_1=\frac{1}{3};\quad x_2=a;\quad x_3=2-a.$$

3)Из рассмотрения построенного треугольника АВС ясно, что при $a\in\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right]$ **корень один** $x_2=a$.

При $a\in\left(\frac{1}{3};1\right]$ **уравнение имеет два корня** $x_1=\frac{1}{3};\ x_2=a$.

При $a\in\left(1;\frac{5}{3}\right)$ **уравнение имеет два корня** $x_1=\frac{1}{3};\quad x_3=2-a$.

При $a\in\left[\frac{5}{3};\frac{11}{6}\right)$ **уравнение имеет корень один** $x_3=2-a$. **Ответ: при** $a\in\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right]$; $a\in\left[\frac{5}{3};\frac{11}{6}\right)$ $\exists!$.

№40. уравнение $x^2+ax+4=\sqrt{20x^2+8ax+16}$ имеет ровно три различных корня.

Это уравнение типа $\sqrt{f(x)} = g(x)$ решается пареходом к равносильной системе

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0; \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

$$\sqrt{20x^2 + 8ax + 16} = x^2 + ax + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + 4 \geq 0, \\ \left(x^2 + ax + 4\right)^2 = 20x^2 + 8ax + 16, \end{cases}$$

Формула сокращённого умножения «квадрат суммы трёх чисел» выводится просто

$$(a+b+c)^2 = (a + (b+c))^2 = a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 = ,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

поэтому

$$\left(x^2 + ax + 4\right)^2 = 20x^2 + 8ax + 16 \Leftrightarrow$$

$$x^4 + a^2x^2 + 4^2 + 2\left(x^2ax + ax4 + x^24\right) = 20x^2 + 8ax + 16;$$

$$x^4 + 2ax^3 + x^2\left(a^2 - 12\right) = 0;$$

возвращаемся к системе:

$$\begin{cases} x^2 + ax + 4 \geq 0, \\ \left(x^2 + ax + 4\right)^2 = 20x^2 + 8ax + 16, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + 4 \geq 0, \\ x^4 + 2ax^3 + x^2\left(a^2 - 12\right) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

Уравнение в системе после нахождения корня x=0, сводим к квадратному:

$$x^2 + 2ax + \left(a^2 - 12\right) = 0, \Leftrightarrow x = -a \pm \sqrt{a^2 - 12}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + 4 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 0; \\ x_2 = -a - \sqrt{12}, \\ x_3 = -a + \sqrt{12}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Нам следует проверить контрольные значения параметра а, при которых корни уравнения, зависящие от параметра, могут совпасть. Рассматривая все три случая $x_1 = x_2$; $x_1 = x_3$; $x_2 = x_2$, получаем контрольные значения параметра а, при которых некоторые корни совпадают: $-\sqrt{12}; +\sqrt{12}$, эти значения исключаем.

Подставляя поочерёдно корни $x_1 = 0$, $x_2 = -a - \sqrt{12}$, $x_3 = -a + \sqrt{12}$ в неравенство $x^2 + ax + 4 \geq 0$, находим, что при $a \in \left[-\frac{8}{3}\sqrt{3};\quad \frac{8}{3}\sqrt{3}\right]$ неравенство выполняется для всех корней. Исключая из этого отрезка контрольные значения параметра а, при которых количество корней уменьшается из-за совпадения некоторых корней, получаем ответ: при

$a \in \left[-\frac{8}{3}\sqrt{3}; -\sqrt{12}\right) \cup \left(-\sqrt{12}; \sqrt{12}\right) \cup \left(\sqrt{12}; \frac{8}{3}\sqrt{3}\right]$ уравнение имеет ровно три различных корня.

№41. $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2} = a$

1) $D\left(\sqrt{\ }\right) = [0;+\infty) \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}$. $E\left(\sqrt{\ }\right) = [0;+\infty) \Rightarrow a \geq 0.$ Но на самом деле a>0, т.к. оба радикала не могут одновременно обратиться в нуль.Это необходимые условия, condicio sine qua non, как говорили римляне.

2)Обе части уравнения положительны, поэтому возведение в квадрат приводит к равносильному уравнению:

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2} = a \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2\sqrt{3x^2 + 4x - 4} = a^2; \\ a > 0; x \geq \frac{2}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3x^2 + 4x - 4} = a^2 - 4x; \\ a > 0; x \geq \frac{2}{3}. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\left(3x^2 + 4x - 4\right) = a^4 - 8a^2x + 16x^2; \\ a > 0; x \geq \frac{2}{3}; x \leq \frac{a^2}{4}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 4x^2 + x\left(-16 - 8a^2\right) + a^4 + 16; \\ a > 0; \quad \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{a^2}{4}. \end{cases}$$

Используя чётность второго коэффициента квадратного уравнения, находим

$$x_{1,2} = \frac{\left(4a^2 + 8\right) \pm \sqrt{\left(4a^2 + 8\right)^2 - 4a^4 - 64}}{4} = a^2 + 2 \pm \frac{a}{4}\sqrt{12a^2 + 64} = a^2 + 2 \pm \frac{a}{2}\sqrt{3a^2 + 16}.$$

Проверим, какой из корней $x_{1,2}$ и при каких **а** удовлетворяет необходимому условию $\frac{2}{3} \leq x_{1,2} \leq \frac{a^2}{4}$. Решим неравенства:

$\frac{2}{3} \le a^2 + 2 + \frac{a}{2}\sqrt{3a^2+16} \le \frac{a^2}{4}$, правое неравенство, очевидно неверно ($a^2 \le \frac{a^2}{4}$ для a>0 неверно). Т.Е больший корень не удовлетворяет уравнению ни при каких a. Неравенство для второго корня приводит к системе:

$$\frac{2}{3} \le a^2 + 2 - \frac{a}{2}\sqrt{3a^2+16} \le \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} \le a^2 + 2 - \frac{a}{2}\sqrt{3a^2+16}; \\ a^2 + 2 - \frac{a}{2}\sqrt{3a^2+16} \le \frac{a^2}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2}\sqrt{3a^2+16} \le a^2 + \frac{4}{3}; \\ \frac{3a^2}{4} + 2 \le \frac{a}{2}\sqrt{3a^2+16}, \end{cases}$$

Первое неравенство умножаем на 2, второе на 4, возводим в квадрат оба неравенства, пользуясь положительностью обеих частей неравенств:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a^4 + 16a^2 \le 4\left(a^4 + \frac{8}{3}a^2 + \frac{16}{9}\right); \\ 9a^4 + 48a^2 + 64 \le 12a^4 + 64a^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le a^4 + \left(\frac{32}{3} - 16\right)a^2 + \frac{64}{9}; \\ 0 \le 3a^4 + 16a^2 - 64, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \left(a^2 - \frac{8}{3}\right)^2; \\ 0 \le \left(a^2 + 8\right)\left(a^2 - \frac{8}{3}\right), \end{cases} \Leftrightarrow a^2 - \frac{8}{3} \ge 0 \Leftrightarrow a \ge \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: при $a \ge \frac{2\sqrt{6}}{3}$ существует единственный корень уравнения $x = a^2 + 2 - \frac{a}{2}\sqrt{3a^2+16}$. Заметим, что исходное уравнение можно иначе решать, перенеся один из радикалов вправо для возведения в квадрат. Правда, тогда появляется дополнительная необходимость решать неравенство для обеспечения неотрицательности правой части перед возведением в квадрат. После повторного возведения в квадрат уравнение и ограничения примут такой же вид, что и в первом способе.

№42. $x^4 + x - 1 = 2\sqrt{x-1}$. ОДЗ: $x \ge 1$. Выделим полный квадрат в уравнении: $\left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 = 1 - x^4$, но правая часть меньше или равна 1, а правая часть на ОДЗ больше или равна 1, следовательно, равенство возможно в одном случае, когда обе они равны 1:

$$\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2=1-x^4 \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2=1;\\ 1-x^4=1.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x-1}-1=\pm 1;\\ x=0.\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing .$$

Ответ: нет корней. Заметим, что уравнение можно решить графически, обосновав, что графики соответствующих функций не могут иметь общих точек.

№43. $\begin{cases}\sqrt{9-y^2}=\sqrt{9-a^2x^2},\\ x^2+y^2=-6x+3y.\end{cases}$

1)ОДЗ: $|y|\le 3;\quad |ax|\le 3$.Эти два условия эквивалентны, т.к. означают одно и то же. Тогда, возводя в квадрат, получаем из первого равносильное уравнение $y=\pm ax$, что даёт две прямые, симметричные относительно оси абсцисс, проходящие через начало координат.

2)Выделяя полные квадраты во втором уравненнии, получим уравнение окружности $x^2+y^2=-6x+3y \Leftrightarrow (x+3)^2+(y-1{,}5)^2=\dfrac{45}{4}$ с центром O(-3;1,5) и радиусом $R=\sqrt{\dfrac{45}{4}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{5}$.

В системе XOY построим окружность и ограничим её, согласно ОДЗ, полосой $-3\le y\le 3$.

3) Задача формулируется так: при каждом **а** определить количество ***общих точек*** дуги окружности и пары симметричных прямых $\begin{cases}y=\pm ax,\\ (x+3)^2+(y-1{,}5)^2=\dfrac{45}{4}.\end{cases}$ В ответе указать случай ***трёх общих точек***.

4)Построив дугу окружности в полосе $-3\le y\le 3$, замечаем, что прямая $y=-\dfrac{1}{2}x$ проходит точки окружности (-6;3) и (0;0). Так как прямые $y=\pm ax$ симметричны, то удобнее рассуждать о прямых $y=|a|x$ с угловым коэффициентом $|a|$.

Если $|a| = 0$ то обе прямые совпадают с осью абсцисс и пересекают дугу окружности в двух точках.

Если $0 < |a| \le \frac{1}{2}$ то обе прямые пересекают окружности на дуге от (-6;3) до $\left(-\frac{18}{5};-\frac{9}{5}\right)$ в двух точках, если двигаться против часовой стрелки и в начале координат. Всего три общие точки.

Если $\frac{1}{2} < |a| < 2$ то обе прямые пересекают дугу окружности в двух точках: в начале координат и в точке дуги, расположенной ниже оси абсцисс. Верхнюю часть дуги выше прямой y=3, мы не учитываем, как не принадлежащую ОДЗ.

При $|a| = 2$ получаем касательную к окружности y=2x, она перпендикулярна прямой $y = -\frac{1}{2}x$, содержащей диаметр окружности. Общих точек будет две(0;0) и (-6;3) . Напомним, что условие перпендикулярности двух прямых $y = k_1x + b_1; y = k_2x + b_2$ имеет вид $k_1 \cdot k_2 = -1$ и в данном случае $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = -1$ это так.

Если $|a| > 2$ то прямая y=ax пересекает дугу окружности из первой четверти в двух точках: в начале координат и в точке на дуге от (0;0) до (0;3) если двигаться против часовой стрелки (в положительном направлении).

Развёртка по оси параметра выглядит так:

$\lvert a\rvert = 0$	$0 < \lvert a\rvert \le \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < \lvert a\rvert < 2$	$\lvert a\rvert = 2$	$\lvert a\rvert > 2$	
2 корня	3 корня	2 корня	1 корень	2 корня	

Ответ: $0 < |a| \le \frac{1}{2}$.

№44. Найдите все значения a, при которых уравнение $\frac{a^2 - 3x^2 + 2ax + 2a + 8x + 1}{\left(\sqrt{2x+1}\right)^2} = \log_p p$, где $p = \frac{5}{3} - \frac{x^2}{6} - \frac{a^2}{6}$ имеет ровно один корень.

Известно, что областью допустимых значений ОДЗ уравнения называется пересечение областей определения всех функций, входящих в уравнение.

1)ОДЗ x>-0,5; $p=\frac{5}{3}-\frac{x^2}{6}-\frac{a^2}{6}>0; p=\frac{5}{3}-\frac{x^2}{6}-\frac{a^2}{6}\neq 1$. Упрощая эти

неравенства, получим: $\frac{5}{3}>$

Для наглядности рекомендуется нарисовать ОДЗ в координатно-параметрической плоскости ХОА в крупном масштабе (не менее 4 клеточек на единицу).

2)Преобразуем на ОДЗ уравнение

$$\frac{a^2-3x^2+2ax+2a+8x+1}{\left(\sqrt{2x+1}\right)^2}=\log_p p \Leftrightarrow \frac{a^2-3x^2+2ax+2a+8x+1}{2x+1}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2-3x^2+2ax+2a+8x+1=2x+1 \Leftrightarrow 3x^2-(2a+6)x-a^2-2a=0.$$

Полученное квадратное уравнение должно иметь на ОДЗ один корень.

Далее возможны два пути:1)исследовать условия принадлежности только одного корня $3x^2-(2a+6)x-a^2-2a=0$ лучу x>-0,5 с последующей проверкой ОДЗ;

2)обнаружить, что дискриминант $(2a+6)^2-4\cdot 3\left(-a^2-2a\right)=(4a+6)^2$ и корни находятся в явном виде: $x_1=-\frac{a}{3}; x_2=a+2;$ после этого в системе ХОА

изобразить точки внутри круга радиуса $\sqrt{10}$ с центром O(0;0), с выколотой окружностью радиуса 2 с центром O(0;0), и расположенные правее вертикальной прямой x=-0,5. Достроить две прямые a=-3x, a=x-2 в полуплоскости x>-0,5 и рассмотреть их взаимное расположение с окружностями из ОДЗ.

При $a\in(-3;-2{,}5]$ прямая a=-3x принадлежит ОДЗ а вторая прямая нет, следовательно, 1 корень.

При $a\in(-2{,}5;-2)$ обе прямые попадают в ОДЗ, 2 корня.

При a=-2 прямая a=x-2пересекает выколотую окружность и не принадлежит ОДЗ, 1 корень.

При $a\in\left(-2;-3\sqrt{0{,}4}\right)$ обе прямые попадают в ОДЗ, 2 корня.

При $a\in\left(-3\sqrt{0{,}4};-1{,}5\right)$ обе прямые попадают в ОДЗ, 2 корня.

При $a=-1{,}5$ прямые пересекаются в ОДЗ, 1 корень.

При $a\in(-1{,}5;0)$ обе прямые попадают в ОДЗ, 2 корня.

При $a=0$ прямая а=х-2 пересекает выколотую окружность и не принадлежит ОДЗ, 1 корень.

При $a \in (0;1)$ обе прямые попадают в ОДЗ, 2 корня.

При $1 \le a < 1{,}5$ прямая а=х-2 выходит за пределы ОДЗ, прямая а=-3х попадает в ОДЗ, 1 корень.

При $a \ge 1{,}5$ и прямая а=-3х выходит за пределы ОДЗ, 0 корней.

Отв. $a \in (-3;-2{,}5] \cup \{-2;-3\sqrt{0{,}4};0\} \cup [1;1{,}5)$.

№45. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых решение неравенства $\dfrac{(x-a)(a-3\sqrt{x})}{\sqrt{12-x-2a}} \ge 0$ **содержит отрезок длиной не менее 2.**

Отв. $a \in [3;3\sqrt{19}-9)$.

1)ОДЗ: $0 \le x < 12-2a$. 2)Тогда на ОДЗ неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$1)\begin{cases}(x-a) \ge 0;\\ 0 \le x < 12-2a;\\ (a-3\sqrt{x}) \ge 0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0 \le x < 12-2a;\\ x \ge a;\\ a \ge 3\sqrt{x};\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x \ge a;\\ \dfrac{a^2}{9} \le x;\\ 0 \le x < 12-2a;\\ a > 0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0 \le x < 12-2a;\\ a \le x \le \dfrac{a^2}{9};\\ a > 0.\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$

В координатно параметрической и плоскости АОХ множество точек, заданных системой в 1-ой четверти, расположены над прямой, но под параболой, которые пересекаются при а=9 в точке (9;9).Но все эти точки расположены выше прямой $x = 12-2a$ и не принадлежат ОДЗ. Нет решений у первой системы.

$$2)\begin{cases}(x-a)\le 0;\\ 0\le x<12-2a;\\ \left(a-3\sqrt{x}\right)\le 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x<12-2a;\\ x\le a;\\ a\le 3\sqrt{x};\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le a;\\ \dfrac{a^2}{9}\ge x;\\ 0\le x<12-2a;\\ a>0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x<12-2a;\\ \dfrac{a^2}{9}\le x\le a;\\ a>0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

В координатно параметрической и плоскости АОХ множество точек, заданных 2-ой системой, расположены в 1-ой четверти, над параболой, но под прямой x=a, x=12-2a, это параболический сегмент с вершинами в точках О(0;0), А(4;4), В(5;2). Нарисуем внутри этого сегмента вертикальные отрезки, чтобы найти их длину, надо из ординаты верхней точки, лежащей на прямой x=a, вычесть ординату нижней точки, лежащей на параболе $x=\dfrac{a^2}{9}$, т.е. математическая модель следующая:

$$a-\frac{a^2}{9}\ge 2; a\in[0;4]\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a^2}{9}-a+2\le 0;\\ a\in[0;4];\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\in[3;6];\\ a\in[0;4];\end{cases}\Leftrightarrow a\in[3;4].$$

Если же $a\in[4;5]$, то чтобы найти длину вертикальных отрезков, надо из ординаты верхней точки, лежащей на прямой x=12-2a, вычесть ординату нижней точки, лежащей на параболе $x=\dfrac{a^2}{9}$, т.е. математическая модель следующая:

$$12-2a-\frac{a^2}{9}\ge 2; a\in[4;5]\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a^2}{9}+2a-10\le 0;\\ a\in[4;5];\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\in\left[-9-\sqrt{171};-9+\sqrt{171}\right];\\ a\in[4;5];\end{cases}\Leftrightarrow a\in\left[4;-9+\sqrt{171}\right].$$

Объединяя найденные отрезки $a\in[3;4]$ и $a\in\left[4;-9+\sqrt{171}\right]$, получим

Ответ: при $a \in \left[3; -9+3\sqrt{19}\right]$ решение неравенства $\dfrac{(x-a)\left(a-3\sqrt{x}\right)}{\sqrt{12-x-2a}} \geq 0$ содержит отрезок длиной не менее 2.

46. Решите неравенство $\dfrac{7-3x+\sqrt{x^2+3x-4}}{x-3} < -1$.

ОДЗ: $x \leq -4; x \geq 1; x \neq 3$. Далее исследование проведём на промежутках. При $x \leq -4$ знаменатель дроби отрицателен, поэтому числитель положителен, неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 4-2x+\sqrt{x^2+3x-4} > 0; \\ x \leq -4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+3x-4} > 2x-4; \\ x \leq -4; \end{cases}$$

верно, т.к. левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна.

На отрезке $x \in [1;2]$ знаменатель дроби отрицателен, поэтому числитель положителен, неравенство равносильно системе $\begin{cases} \sqrt{x^2+3x-4} > 2(x-2); \\ x \in [1;2]; \end{cases}$ верно, т.к. левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна.

На интервале $x \in (2;3)$ знаменатель дроби отрицателен, поэтому числитель положителен, неравенство равносильно системе $\begin{cases} \sqrt{x^2+3x-4} > 2(x-2); \\ x \in (2;3); \end{cases}$ обе части неравенства положительны, возведение в квадрат даёт равносильную систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+3x-4} > 2(x-2); \\ x \in (2;3); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-4 > 4x^2-16x+16; \\ x \in (2;3); \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 > 3x^2-19x+20; \\ x \in (2;3); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(\dfrac{4}{3};5\right); \\ x \in (2;3); \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2;3).$$

На интервале $x \in (3;+\infty)$ знаменатель дроби положителен, поэтому числитель отрицателен, неравенство равносильно системе $\begin{cases} \sqrt{x^2+3x-4} < 2(x-2); \\ x \in (3;+\infty); \end{cases}$ обе части неравенства положительны, возведение в квадрат даёт равносильную систему

$$\begin{cases} x^2+3x-4 < 4x^2-16x+16; \\ x \in (3;+\infty); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 3x^2-19x+20; \\ x \in (3;+\infty); \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{4}{3}; x > 5; \\ x \in (3;+\infty); \end{cases} \Leftrightarrow x > 5.$$

Ответ: $x \in (-\infty;-4] \cup [1;3) \cup (5;+\infty)$.

Второй способ решения основан на методе интервалов: ОДЗ неравенства содержит три промежутка $x \in (-\infty;-4] \cup [1;3) \cup (3;+\infty)$, на каждом берём по одной пробной точке и получаем ответ.

№47. А-?, $\left|x^2-4a^2\right| = |x+2a| \cdot \sqrt{x+18}$ **имеет ровно два различных** решения.

1)ОДЗ: $x \geq -18$; 2) Преобразование уравнения:

$$\left|x^2-4a^2\right| = |x+2a| \cdot \sqrt{x+18} \Leftrightarrow \left(|x-2a| - \sqrt{x+18}\right)|x+2a| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -18; \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = -2a; \\ (x-2a)^2 = x+18; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -18; \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = -2a; \\ x^2 + x(-4a-1) + 4a^2 - 18 = 0; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -18; \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = -2a; \\ x_2 = \dfrac{4a+1-\sqrt{8a+73}}{2}; \\ x_3 = \dfrac{4a+1+\sqrt{8a+73}}{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Система равносильна совокупности трёх систем:1) $\begin{cases} x_1 = -2a; \\ x \geq -18; \end{cases}$; 2)

$\begin{cases} x_2 = \dfrac{4a+1-\sqrt{8a+73}}{2}; \\ x \geq -18; \quad a \geq -\dfrac{73}{8}; \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x_2 = \dfrac{4a+1+\sqrt{8a+73}}{2}; \\ x \geq -18; \quad a \geq -\dfrac{73}{8}; \end{cases}$. Найдём значения параметра а, при которых существуют корни.

Из первой системы определяем, что первый корень существует, при а, не превосходящих 9: $x_1 = -2a; a \leq 9.$

Аналогично, из второй системы получаем неравенства. Заметим, что $4a+37>0$ при $a \geq -\dfrac{73}{8}$.

$$\begin{cases} \dfrac{4a+1-\sqrt{8a+73}}{2} \geq -18; \\ a \geq -\dfrac{73}{8}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+37 \geq \sqrt{8a+73}; \\ a \geq -\dfrac{73}{8}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a^2+296a+1369 \geq 8a+73; \\ a \geq -\dfrac{73}{8}. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (4a+36)^2 \geq 0; \\ a \geq -\dfrac{73}{8}. \end{cases}$ Равенство нулю, т.е.равенство второго корня числу -18 достигается при а=-1,5.

Итак, второй корень существуе и удовлетворяет ОДЗ:

$x_2 = \dfrac{4a+1-\sqrt{8a+73}}{2} \geq -18$ при $a \geq -\dfrac{73}{8}$.

Аналогично, из третьей системы получаем неравенства. Заметим, что $4a+37>0$ при $a \ge -\frac{73}{8}$. $\begin{cases} \frac{4a+1+\sqrt{8a+73}}{2} \ge -18; \\ a \ge -\frac{73}{8}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+37+\sqrt{8a+73} \ge 0; \\ a \ge -\frac{73}{8}. \end{cases}$; верно.

Итак, третий корень существуе и удовлетворяет ОДЗ:

$x_3 = \frac{4a+1+\sqrt{8a+73}}{2} \ge -18$ при $a \ge -\frac{73}{8}$.

На числовой прямой ОА отметим промежутки, на которых существуют найденные корни.

Теперь определим контрольные значения параметра а, при которых корни могут совпадать: $x_2 = x_3 \Leftrightarrow a = -\frac{73}{8}$,т.е. если дискриминант равен нулю, второй и третий корни совпадают.

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \left[-\frac{73}{8};9\right]; \\ -2a = \frac{4a+1-\sqrt{8a+73}}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \left[-\frac{73}{8};9\right]; \\ \sqrt{8a+73} = 8a+1; \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$$

Т.Е.при а=1 первый и второй корни совпадают.

$$x_1 = x_3 \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \left[-\frac{73}{8};9\right]; \\ -2a = \frac{4a+1+\sqrt{8a+73}}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \left[-\frac{73}{8};9\right]; \\ \sqrt{8a+73} = -8a-1; \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{9}{8}.$$

Т.е.при $a = -\frac{9}{8}$ первый и третий корни совпадают.

На числовой прямой ОА отметим контрольные значения и граничные значения параметра, определяющие границы существования корней: $-\frac{73}{8};\quad -\frac{9}{8};\quad 1;\quad 9$.

Для получения развёртки по параметру на каждом из пяти интервалов и в отмеченных точках определяем количество корней.

Отв. при $a \in \left\{-9\frac{1}{8};-1\frac{1}{8};1\right\} \cup (9;+\infty)$ **уравнение имеет ровно два различных решения.**

№48. **Известно, что** $x=\sqrt{2}$ **является корнем уравнения** $x^3-(a+2)x^2+bx-2a=0$ **(** $a,b\in Z$ **). Найдите значения** a,b **и остальные корни уравнения.**

Подставим $x=(\sqrt{2})$ **в уравнение** $(\sqrt{2})^3-(a+2)(\sqrt{2})^2+b(\sqrt{2})-2a=0 \Leftrightarrow (\sqrt{2})(b+2)=4a+4.$ **Возможны два случая:** $b\neq -2$ **или b=-2.**

В первом случае делением на $b+2\neq 0$ **получаем** $(b+2)=4a+4 \Leftrightarrow \sqrt{2}=\frac{4a+4}{b+2}$ т.е. $\sqrt{2}$ - рационалльное число. Противоречие.

Значит, **b=-2 и a=-1 и уравнение имеет вид**

$x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) - 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x^2-2)(x-1) = 0$ **Ответ:**
$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}; x = 1.$

$x = \pm\sqrt{2}; x = 1;$ **b=-2 , a=-1.**

51. Найдите все значения *x*, которые не принадлежат множеству корней уравнения $\sqrt{81x^4 - 126x^3} = \left(\cos\sqrt{a}\cdot\sin a^2 + \cos a^2\cdot\sin\sqrt{a}\right)\cdot\left(1 + 7x - 9x^2\right)$ **ни при каких значениях *a*.**

План исследования: 1)находим ОДЗ, значения x, не принадлежащие ОДЗ не могут быть корнями уравнения, т.е. $x \in \left(0; \dfrac{14}{9}\right)$-это фрагмент ответа. 2)Пользуясь ограниченностью функции $\sin\alpha$, выразим её из уравнения и найдём сначала значения x, которые могут быть корням данного уравнения, затем исключив их, получим

ответ $x \in \left(\dfrac{-7-\sqrt{18}}{31}; \dfrac{7-\sqrt{85}}{18}\right) \cup \left(0; \dfrac{14}{9}\right)$ не могут быть корнями уравнения ни при каких значениях *a*.

52.(ЕГЭ2008)Даны уравнения:

$\left(3 + 3^{\frac{p-4}{p-3}}\right)^x = 73 - 3x \quad и \quad \sqrt{7p - 13 - (2p^2 - 3p - 5)x} = 5p - x - 7$ **Значения параметра выбираются так, чтобы оба уравнения имели смысл и при делении числа различных корней второго уравнения на число различных корней первого уравнения получается 4-p. Решите первое уравнение при каждом значении p, выбранном таким способом. Отв: p=4, x=3.**

Решение.1)Первое уравнение содержит возрастающую функцию в левой части и убывающую в правой. Такое уравнение может иметь 0 корней или 1 корень,

ведь графики разномонотонных функций не могут пересекаться в более, чем одной точке. Рассмотрим обе эти возможности.

2) Если первое уравнение не имеет корней, то в условии задачи предлагается делить на ноль, что невозможно. Значит, первое уравнение имеет 1 корень, что очевидно, если построить схематически графики левой и правой функций. Итак, по условию, (число корней второго уравнения):1=4-P, значит, P-целое число.

3)Второе уравненние равносильно квадратному уравнению с ограничением на неотрицательность правой части. Квадратное уравнение может иметь 0;1или 2корня, следовательно, $p \in \{4;3;2\}$**.**

4)Проверим каждую из трёх гипотез. Гипотеза1: система имеет 0 корней

$$\begin{cases}\sqrt{7p-13-(2p^2-3p-5)x}=5p-x-7;\\ p=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{7\cdot 4-13-(2\cdot 4^2-3\cdot 4-5)x}=5\cdot 4-x-7;\\ p=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{15-15x}=13-x;\\ x<1; x\le 13;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}15-15x=169-26x+x^2;\\ x<1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0=154-11x+x^2;\\ x<1;\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$

.Верно, условие задачи выполнено, решаем первое уравнение при p=4:

$$\begin{cases}\left(3+3^{\frac{p-4}{p-3}}\right)^x=73-3x;\\ p=4,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(4)^x=73-3x;\\ p=4,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3;\\ p=4,\end{cases}$$

Гипотеза2: система имеет 1 корень

$$\begin{cases}\sqrt{7p-13-(2p^2-3p-5)x}=5p-x-7;\\ p=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{7\cdot 3-13-(2\cdot 3^2-3\cdot 3-5)x}=5\cdot 3-x-7;\\ p=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{8-4x}=8-x;\\ x\le 8; x\le 2;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8-4x=64-16x+x^2;\\ x\le 8; x\le 2;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0=56-12x+x^2;\\ x\le 8; x\le 2;\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$

,неверно.

Гипотеза3: система имеет 2 корня

$$\begin{cases}\sqrt{7p-13-(2p^2-3p-5)x}=5p-x-7;\\ p=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{7\cdot 2-13-(2\cdot 2^2-3\cdot 2-5)x}=5\cdot 2-x-7;\\ p=2\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+3x} = 3 - x; \\ -\frac{1}{3} \le x \le 3; \end{cases} \Leftrightarrow x = 1;$ 1 корень, гипотеза3 неверна. **Ответ: при p=4 x=3.**

53.Найдите область определения функции $y = \sqrt{(x - x_0)tg\pi x}$, где x_0 - меньший корень уравнения $3^{\frac{1}{2x}} \cdot 27^{\frac{1}{4x}} \cdot 243^{\frac{1}{20x}} = 3 \cdot 3^{\frac{x}{2}}$. **1) Приведём показательное уравнение к основанию 3**

$$3^{\frac{1}{2x}} \cdot 3^{\frac{3}{4x}} \cdot 3^{\frac{5}{20x}} = 3^{\frac{x}{2}+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2x} + \frac{3}{4x} + \frac{5}{20x} = \frac{x}{2} + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow -3;1$$

Значит, $x_0 = -3$.

Область определения функции $y = \sqrt{(x - x_0)tg\pi x} = \sqrt{(x+3)tg\pi x}$ **определяется из неравенства** $(x+3)tg\pi x \ge 0$, которое равносильно совокупности двух систем

$1)\begin{cases} x + 3 \ge 0; \\ tg\pi x \ge 0; \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x + 3 \le 0; \\ tg\pi x \le 0; \end{cases}$ которые можно решать на линии тангенсов с примененнием тригонометрического круга (или с применением тангенсоиды).

$$1)\begin{cases} x + 3 \ge 0; \\ tg\pi x \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow 1)\begin{cases} x \ge -3; \\ 0 + n \le x < 0,5 + n; \end{cases} n \ge -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [n; n + 0,5); \\ n \ge -3; n \in Z. \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} x+3\le 0; \\ tg\,\pi x\le 0; \end{cases} \Leftrightarrow 1)\begin{cases} x\le -3; \\ 0{,}5+k<x\le 1+k; \end{cases} k\le -4 \Leftrightarrow \begin{cases} x\in (k+0{,}5;k+1]; \\ k\le -4; k\in Z. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x\in [n;n+0{,}5); \\ n\ge -3; n\in Z. \end{cases} \cup \begin{cases} x\in (k+0{,}5;k+1]; \\ k\le -4; k\in Z. \end{cases}$, на числовой прямой – это полуинтервалы длиной 0,5, симметричные относительно центра интервала (-3,5;-2,5).

№54. **(СГАУ1997, 6ф-т).** Дана система уравнений $\begin{cases} \sqrt{y+3x+1}=2; \\ \sqrt{2y-x+2}=2-x. \end{cases}$ Найдите область допустимых значений и изобразите её **на координатной плоскости. Решите данную систему уравнений.**

1)ОДЗ определяется системой неравенств $\begin{cases} y+3x+1\ge 0; \\ 2y-x+2\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge -3x-1; \\ y\ge \dfrac{x-2}{2}, \end{cases}$ **, задающих две полуплоскости, пересекающихся по области, ограниченной углом с вершиной (0;-1) и лучами, направленными вверх. 2) При решении**

системы добавляется условие $2-x\ge 0$ **неотрицательности значений квадратного корня:**

$$\begin{cases}\sqrt{y+3x+1}=2;\\ \sqrt{2y-x+2}=2-x.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+3x+1=4;x\in ОДЗ;\\ 2y-x+2=(2-x)^2;x\le 2;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4;\\ y=15;\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}x=1;\\ y=0;\end{cases}$$

№55. (ЕГЭ). Для чисел $a_1,a_2,a_3,...a_{28}$ **верны равенства** $a_{n+1}=f(a_n)$**, n=1,2,…27. Найдите** $a_9+a_7-a_6$**, если** известно, что $a_{28}=0$ и

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x-3}{x-3},x<3;\\ \sqrt[5]{\dfrac{x-4}{x-2}}+\sqrt{\dfrac{27x-17}{3x+7}};x\ge 3.\end{cases}$$

По условию

$$a_{28}=0\Leftrightarrow f(a_{27})=0\Leftrightarrow f(a_{27})=\begin{cases}\dfrac{3a_{27}-3}{a_{27}-3},a_{27}<3;\\ \sqrt[5]{\dfrac{a_{27}-4}{a_{27}-2}}+\sqrt{\dfrac{27a_{27}-17}{3a_{27}+7}};a_{27}\ge 3.\end{cases}$$

Выясним разрешимость уравнения $f(a_{27})=0$. Как решить уравнение $f(x)=0$? Рассмотрим два варианта: либо первая функция $y_1=\dfrac{3x-3}{x-3},x<3$ равна нулю, что равносильно x=1, либо вторая функция равна нулю, что даёт уравнение $\sqrt[5]{\dfrac{4-x}{x-2}}=\sqrt{\dfrac{27x-17}{3x+7}};x\ge 3$. Это уравнение не имеет решений, так как множества значений функций не пересекаются

$E_1\left(\sqrt[5]{\dfrac{4-x}{x-2}}\right)=(-1;1];\quad при\quad x\geq 3$. $E_2\left(\sqrt{\dfrac{27x-17}{3x+7}}\right)=[2;3);\quad при\quad x\geq 3$.

$E_2\cap E_1=\varnothing$, значит, второе уравнение не имеет решений.

Чтобы найти скрытую закономерность, можно построить эскизы графиков кусочно-заданных функций: $y_1=\dfrac{3x-3}{x-3}, x<3$ и

$y_2=\sqrt[5]{\dfrac{x-4}{x-2}}+\sqrt{\dfrac{27x-17}{3x+7}}; x\geq 3.$

Теперь понятно, что последовательность $a_{n+1}=f(a_n)$ **воспроизводит только два числа: 1;0;1;0;1;0;…где на чётных позициях стоят 0, а на нечётных 1. Следовательно,** $a_9+a_7-a_6=1+1-0=2$. **Ответ:2.**

№56.Решите неравенство $\sqrt{\dfrac{3x+4}{2x-1}}+\sqrt{\dfrac{2x-1}{3x-5}}\geq 2\cdot\sqrt[4]{\dfrac{3x+4}{3x-5}}$.

1)ОДЗ: все подкоренные выражения неотрицательны, решая последовательно неравенства $\dfrac{3x+4}{2x-1}\geq 0;\ \dfrac{2x-1}{3x-5}\geq 0;\ \dfrac{3x+4}{3x-5}\geq 0$ и пересекая получаемые промежутки, получим $x\leq-\dfrac{4}{3}; x>\dfrac{5}{3}$.

2)Эксперементируя с возможными подходами к решению на ОДЗ неравенства, попробуем возвести обе части его в квадрат:

$\dfrac{13x^2-7x-19}{(2x-1)(3x-5)}\geq 2\sqrt{\dfrac{3x+4}{3x-5}}$, перспективы решения туманны…

Если перенести влево все слагаемые неравенства

$\sqrt{\dfrac{3x+4}{2x-1}}-2\cdot\sqrt[4]{\dfrac{3x+4}{3x-5}}+\sqrt{\dfrac{2x-1}{3x-5}}\geq 0$, **то применяя любимый метод пристального взгляда (анализ), заметим в левой части формулу сокращённого**

умножения: квадрат разности двух радикалов четвёртой степени:

$\left(\sqrt[4]{\dfrac{3x+4}{2x-1}}-\sqrt[4]{\dfrac{2x-1}{3x-5}}\right)^2\geq 0$**, последнее неравенство справедливо на всём ОДЗ.**

Ответ: $x\leq -\dfrac{4}{3}; x>\dfrac{5}{3}$.

№57.Решите неравенство $-2+\sqrt{7+9x}\geq \dfrac{x+13}{4x-3}$**.**

1)ОДЗ: $x\geq -\dfrac{7}{9}; x\neq \dfrac{3}{4}$.

2) Преобразуем неравенство на ОДЗ:

$-2+\sqrt{7+9x}\geq \dfrac{x+13}{4x-3}\Leftrightarrow \sqrt{7+9x}\geq \dfrac{9x+7}{4x-3}$; на полуинтервале $x\in\left[-\dfrac{7}{9};\dfrac{3}{4}\right)$

обе части неравенства либо равны в точке $x=-\dfrac{7}{9}$, либо левая часть положительна, а правая отрицательна, так что неравенство верно на всем полуинтервале $x\in\left[-\dfrac{7}{9};\dfrac{3}{4}\right)$**; это фрагмент ответа.**

3)При $x>\dfrac{3}{4}$ можно сократить на положительную функцию $\sqrt{7+9x}$ и получить равносильное неравенство

$$\sqrt{7+9x}\geq \frac{9x+7}{4x-3}\Leftrightarrow 1\geq \frac{\sqrt{7+9x}}{4x-3}\Leftrightarrow 4x-3\geq \sqrt{7+9x}$$

$$\Leftrightarrow 16x^2-24x+9\geq 7+9x\Leftrightarrow 16x^2-33x+2\geq 0$$

Решим систему $\begin{cases} x>\dfrac{3}{4}; \\ 16x^2-33x+2\geq 0; \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{3}{4}; \\ x\geq 2; \quad x\leq \dfrac{1}{16}; \end{cases}\Leftrightarrow x\geq 2.$

Объединяя два промежутка, получим

Отв. $\left[-\frac{7}{9};\frac{3}{4}\right]\cup\left[2;+\infty\right)$.

№58. Найдите все натуральные значения параметра n>1, при которых отрезок длины n является областью определения функции

$y=\sqrt[n]{(5n-6-x)^3(2x-32+3n)^{7n-5}}$. 1)По условию натуральное $n\geq 2$, рассмотрим два случая: чётного и нечётного n.

Если n-нечётное, то $7n-5\geq 7\cdot 3-5=16>0$ показатели степени скобок положительны и корень нечётной степени определён на всей числовой прямой. Требование задачи не выполняется.

Если n-чётное число, то подкоренное выражение

$(5n-6-x)^3(2x-32+3n)^{7n-5}\geq 0$ неотрицательно, но для нечётных показателей степени это неравенство равносильно такому $(5n-6-x)(2x-32+3n)\geq 0$,

графически это означает отрезок между корнями $x_1=5n-6$ и $x_2=\frac{32-3n}{2}$

параболы с ветвями вниз.

Если $x_1>x_2$, то длина отрезка равна

$$5n-6-\frac{32-3n}{2}=n\Leftrightarrow 5{,}5n=22\Leftrightarrow n=4.$$

Если $x_1<x_2$, то длина отрезка равна

$$\frac{32-3n}{2}-(5n-6)=n\Leftrightarrow 6{,}5n=22\Leftrightarrow\varnothing.$$

Отв.4. Полезно сделать проверку найденного значения n=4.

№59.(ЕГЭ). При каких положительных значениях параметра a область определения

функции $y=\left(a^x-a^{ax-2}\right)^{-0,5}$ содержит только три натуральных числа?

1)Область определения функции $y=\left(a^x-a^{ax-2}\right)^{-0,5}=\dfrac{1}{\sqrt{a^x-a^{ax-2}}}$ **определяется неравенством** $a^x-a^{ax-2}>0$. Очевидно, что при а=1 функция не определена, следовательно, $a\neq 1$. Получаем два интервала $a\in(0;1)\cup(1;+\varnothing)$.

2)На первом из них показательная функция убывает, на втром – возрастает. Соответственно этому имеем совокупность двух систем:

$$1.\begin{cases}a\in(0;1);\\ a^x-a^{ax-2}>0,\end{cases} \text{и} \quad 2.\begin{cases}a\in(1;+\infty);\\ a^x-a^{ax-2}>0,\end{cases}$$

$$1.\begin{cases}a\in(0;1);\\ a^x-a^{ax-2}>0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\in(0;1);\\ a^x>a^{ax-2},\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\in(0;1);\\ x<ax-2,\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\in(0;1);\\ x(1-a)<-2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\in(0;1);\\ x<\dfrac{-2}{(1-a)},\end{cases}$$

но последнее неравенство справедливо только на множестве отрицательных чисел, а там натуральных чисел нет.

$$2.\begin{cases}a\in(1;+\infty);\\ a^x-a^{ax-2}>0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\in(1;+\infty);\\ a^x>a^{ax-2},\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\in(1;+\infty);\\ x>ax-2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\in(1;+\infty);\\ x<\dfrac{2}{a-1},\end{cases}$$

Нарисуем луч $x\in\left(-\infty;\dfrac{2}{a-1}\right)$, он содержит интервал положительных чисел $x\in\left(0;\dfrac{2}{a-1}\right)$

среди которых по требованию задачи должны располагаться числа 1,2,3 и только эти натуральные числа. Значит, правая граница интервала $x \in \left(0; \dfrac{2}{a-1}\right)$ точка $\dfrac{2}{a-1}$ может располагаться на полуинтервале $\dfrac{2}{a-1} \in (3;4]$.

3)Решим систему $\begin{cases} a > 1; \\ 3 < \dfrac{2}{a-1} \le 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1; \\ 3a-3 < 2 \le 4a-4; \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{3}\right)$.

Ответ: при $a \in \left[\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{3}\right)$ область определения функции $y = \left(a^x - a^{ax-2}\right)^{-0,5}$ содержит только три натуральных числа**.**

№60.Решите систему уравнений $\begin{cases} (x+y)^{\sqrt{x-y}} = x-y; \\ (x-y)^{\sqrt{x-y}} = (x+y)^9; \quad x+y > 0. \end{cases}$

ОДЗ: $x - y > 0$. Подставим первое уравнение $x - y = (x+y)^{\sqrt{x-y}}$ во второе:

$\left((x+y)^{\sqrt{x-y}}\right)^{\sqrt{x-y}} = (x+y)^9 \Leftrightarrow \left((x+y)^{x-y}\right) = (x+y)^9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=1; \\ x-y=9, \end{array}\right.$ Тогда исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$1)\begin{cases}(x+y)^{\sqrt{x-y}}=x-y;\\ x+y=1\\ (x-y)^{\sqrt{x-y}}=(x+y)^9;\quad x+y>0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0;\\ x=1.\end{cases}$$

$$2)\begin{cases}(x+y)^{\sqrt{x-y}}=x-y;\\ x-y=9;\\ (x-y)^{\sqrt{x-y}}=(x+y)^9;\quad x+y>0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=9;\\ (x+y)^3=9;\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=9;\\ x+y=\sqrt[3]{9};\end{cases}\pm\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt[3]{9}+9}{2};\\ y=\dfrac{\sqrt[3]{9}-9}{2};\end{cases}$$

Отв. $\left(\dfrac{\sqrt[3]{9}+9}{2};\dfrac{\sqrt[3]{9}-9}{2}\right)$; $(0;1)$.

№61. Решите уравнение $3^{2x+1}=3^{x+2}+\sqrt{1-6\cdot 3^x+3^{2(x+1)}}$.

Выделим полный квадрат и извлечём квадратный корень:

$$3^{2x+1}=3^{x+2}+\sqrt{1-6\cdot 3^x+3^{2(x+1)}}\Leftrightarrow 3^{2x+1}=3^{x+2}+\sqrt{\left(1-3^{x+1}\right)^2}\Leftrightarrow 3^{2x+1}=3^{x+2}+\left|3^{x+1}\right.$$

,замена $t=3^x\Rightarrow t>0$ приводит уравнение к системе $\begin{cases}t>0;\\ 3t^2-9t-|3t-1|=0;\end{cases}$ легко видеть, что $t=\dfrac{1}{3}$ не является корнем системы. Осталось рассмотреть два интервала: $t\in\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$ и $t\in\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

$$\begin{cases} t\in\left(0;\dfrac{1}{3}\right); \\ 3t^2-9t-|3t-1|=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\in\left(0;\dfrac{1}{3}\right); \\ 3t^2-9t+3t-1=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\in\left(0;\dfrac{1}{3}\right); \\ t=1\pm\dfrac{\sqrt{12}}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$

$$\begin{cases} t\in\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right); \\ 3t^2-9t-|3t-1|=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\in\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right); \\ 3t^2-9t-3t+1=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\in\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right); \\ t=2\pm\sqrt{\dfrac{11}{3}}; \end{cases} \Leftrightarrow t=2+\sqrt{\dfrac{11}{3}}.$$

Т.к. $2-\sqrt{\dfrac{11}{3}}<\dfrac{1}{3}$.

Обратная замена $2^x=2+\sqrt{\dfrac{11}{3}}\Leftrightarrow \log_2\left(2+\sqrt{\dfrac{11}{3}}\right)$.

Отв. $x=\log_2\left(2+\sqrt{\dfrac{11}{3}}\right)$.

№62. Решите неравенство $\sqrt{4^x-2^x-2}\ge 4-2^x$.

Замена $t = 2^x \Rightarrow t > 0$, неравенство преобразуется к системе $\begin{cases} t > 0; \\ \sqrt{t^2 - t - 2} \geq 4 - t; \end{cases}$

замечая, что подкоренная функция неотрицательна при $t \leq -1; t \geq 2$, с учётом $t > 0$, получаем систему $\begin{cases} t \geq 2; \\ \sqrt{t^2 - t - 2} \geq 4 - t. \end{cases}$ Правая часть неравенства меняет знак в точке t=4, поэтому рассмотрим эту систему на двух промежутках: t>4 и $2 \leq t \leq 4$.

$\begin{cases} t > 4; \\ \sqrt{t^2 - t - 2} \geq 4 - t. \end{cases}$ при этом левая часть неравенства положительна, правая отрицательна, неравенство выполнено. При t=4 неравенство выполнено. Обратная замена даёт $x \geq 2$.

$\begin{cases} 2 \leq t \leq 4; \\ \sqrt{t^2 - t - 2} \geq 4 - t. \end{cases}$ при этом обе части неравенства неотрицательны, возводя в квадрат, получим равносильную систему $\begin{cases} 2 \leq t \leq 4; \\ t^2 - t - 2 \geq (4 - t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq t \leq 4; \\ t^2 - t - 2 \geq (4 - t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow 7t \geq 18 \Leftrightarrow t \geq \frac{18}{7}$, этот случай поглощает первый. Обратная замена $2^x \geq \frac{18}{7} \Leftrightarrow x \geq \log_2 \frac{18}{7}$. Отв. $x \geq \log_2 \frac{18}{7}$.

№63. При каких а уравнение

$$\left(\sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x+\left(\sqrt{x^2-3ax+8}-\sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x=2^{1+\frac{x}{2}}$$

имеет единственное решение?

Рассмотрим неравенство Огюстена Коши для двух неотрицательных чисел a,b

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Оно доказывается путём выделения полного квадрата:

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$, **верно, значит неравенство Коши доказано. Важно, что неравенство превращается в равенство** $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ **только при a=b.**

Применим неравенство Коши для двух слагаемых в левой части уравнения:

$$\frac{\left(\sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x+\left(\sqrt{x^2-3ax+8}-\sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x}{2} \geq$$

$$\geq \sqrt{\left(\sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x \cdot \left(\sqrt{x^2-3ax+8}-\sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x} =$$

$$= \sqrt{\left(\left(x^2-3ax+8\right)-\left(x^2-3ax+6\right)\right)^x} = 2^{0,5x}$$

Осталось умножить на 2 обе части неравенства, чтобы осознать, что получился как раз частный случай неравенства Коши, который имеет место только при равенстве обоих слагаемых, т.е. на основании уравнения и неравенства Коши утверждаем, что исходное уравнение равносильно следующему:

$$\left(\sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x=\left(\sqrt{x^2-3ax+8}-\sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x \quad (*).$$

Это уравнение может выполняться в двух случаях:

1) основания равны, тогда x может быть любым;

2)x=0 при этом основания различны.

Рассмотрим первый случай:

$$\sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}=\sqrt{x^2-3ax+8}-\sqrt{x^2-3ax+6}\Leftrightarrow$$
$$\sqrt{x^2-3ax+6}=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{3a\pm\sqrt{9a^2-24}}{2},\textit{при}\quad 9a^2-24>0\Rightarrow 2\textit{корня.}$$

При $9a^2-24=0\Leftrightarrow a=\pm\sqrt{\frac{8}{3}}$, при этом исходное уравнение примет вид

$$\left(\sqrt{2}\right)^x+\left(\sqrt{2}\right)^x==2^{1+\frac{x}{2}}\Leftrightarrow x\in R.$$

При $9a^2-24<0 \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{2}{3}\sqrt{6};\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$ основания различны и равенство $(*)$ может выполняться только при x=0, т.е.решение единственно.

Отв. $a \in \left(-\frac{2}{3}\sqrt{6};\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$.

№65. (ЕГЗ).Точка А лежит на графике функции $y=f(x)$, точка В – на оси ОХ и её абсцисса в два раза больше ординаты точки А. Найдите наибольшее значение площади треугольника АОВ, где точка О – начало координат и

$f(x)=\sqrt{(7x+3)\sin x+7\cos x+8}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{5};\frac{4\pi}{5}\right]$.

1)Сначала следует убедиться, что подкоренное выражение неотрицательно, а функция определена. Функция $y=7x+3$ возрастает на данном отрезке и принимает положительные значения. Функция $y=\sin x$, как известно, неотрицательна на отрезке $x\in[0;\pi]$, а значит, положительна на данном отрезке. Функция $y=7\cos x+8=(7\cos x+7)+1$ состоит из неотрицательного и положительного слагаемых, следовательно, подкоренное выражение неотрицательно (положительно), а функция определена.

2) Площадь $S_\Delta(x)$ треугольника АОВ равна $\frac{1}{2}\cdot f(x)\cdot 2f(x)=f^2(x)$, т.е. половине произведения высоты $f(x)$ на длину основания $2f(x)$.

3) Найдём наибольшее значение функции

$S_\Delta(x)=f^2(x)=(7x+3)\sin x+7\cos x+8$ на отрезке $x\in\left[\frac{\pi}{5};\frac{4\pi}{5}\right]$. По теореме Вейерштасса, дающей общий алгоритм решения подобных задач, нужно вычислить значения функции на концах отрезка и в критических точках (принадлежащих интервалу). Но нетабличные значения $\frac{\pi}{5};\frac{4\pi}{5}$ подсказывают нам, что придётся модифицировать алгоритм (даже если допустить, что кто-то знает, как вычисляются $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right);\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$).

3)Найдём производнуюфункции

$S'_{\Delta}(x)=(7x+3)'\sin x+(7x+3)\sin' x+7\cos' x=(7x+3)\cos x$ и приравняем к нулю. Критическая точка $x=-\dfrac{3}{7}$ функции отрезку не принадлежит. Единственная критическая точка $x=\dfrac{\pi}{2}$ расположена в середине отрезка, слева от неё производная положительна, а справа - отрицательна, следовательно, $x_{\max}=\dfrac{\pi}{2}$.

Находить значения функции на концах отрезка не потребуется.

Тогда $S_{\Delta\max}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\left(7\dfrac{\pi}{2}+3\right)\sin\dfrac{\pi}{2}+7\cos\dfrac{\pi}{2}+8=\mathbf{3{,}5}\,\pi+11$.

Отв. $\mathbf{3{,}5}\,\pi+11$.

№65*. Решите уравнение $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$**.**

Возведём в куб уравнение, применив отредактированную формулу «куб суммы»: $x+1+3x+1+3\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{3x+1}\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\right)=x-1;$ далее заменяем сумму радикалов на $\sqrt[3]{x-1}$:

$$x+1+3x+1+3\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{3x+1}\sqrt[3]{x-1}=x-1;$$

$$\Leftrightarrow 3x+3+3\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{3x+1}\sqrt[3]{x-1}=0;$$

$$\Leftrightarrow x+1+\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{3x+1}\sqrt[3]{x-1}=0\Leftrightarrow\sqrt[3]{(x+1)^3}+\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{3x+1}\sqrt[3]{x-1}=0;$$

$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{x+1}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{3x+1}\sqrt[3]{x-1}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1;\\(x+1)^2=-(3x+1)(x-1);\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1;\\x=0.\end{array}\right.$$

Проверка подтверждает, что $x=-1$ истинный корень, а $x=0$ посторонний. Интересно, почему он появился?

Подумаем, почему появился посторонний корень? Ведь возведение в куб не приводит к появлению посторонних корней, т.к. функция $y=x^3$ является монотонной и обратимой. Кроме возведения в куб использовали замену суммы радикалов на их выражение в правой части уравнения. Значит, замена суммы радикалов является необходимым, но не достаточным условием появления посторонних корней, ведь в других уравнениях при таком же способе решения посторонние корни не появляются. ***Проблема требует дальнейшего изучения.***

Отв. -1.

№66. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $x^2+\frac{2x}{\sqrt{\sin a}}+\frac{1}{\cos a}+2\sqrt{2}=0$ имеет единственное решение.

1)ОДЗ: $\sin a>0;\ \cos a\neq 0$. На тригонометрическом круге допустимые значения параметра а изображаются дугами в первой и второй четвертей с выколотыми границами.

2) На ОДЗ данное уравнение является квадратным, для единственности решения достаточно равенства нулю дискриминанта $D(a)=\frac{4}{\sin a}-\frac{4}{\cos a}-8\sqrt{2}=0$, после умножения (на ОДЗ это можно) на произведение знаменателей и сокращение на 4, получим равносильное уравнение $\frac{4}{\sin a}-\frac{4}{\cos a}-8\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \cos a-\sin a-2\sqrt{2}\cos a\sin a=0$. Уравнение такого типа удобно решать заменой $t=\cos a-\sin a; \Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$(последнее ограничение следует из приёма введения вспомогательного угла, предложенного Александрийским математиком Ибн Юнисом (950-1008гг)). А как заменить произведение $\cos a\sin a$? Для этого возводим в квадрат уравненние замены $t=\cos a-\sin a\Rightarrow t^2=1-2\cos a\sin a\Rightarrow\sqrt{2}\left(t^2-1\right)=-2\sqrt{2}\cos a\sin a$.

$$t+\sqrt{2}\left(t^2-1\right)=0\Leftrightarrow\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow$$

Уравненние принимает вид $t=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 2}}{2\sqrt{2}}=\frac{-1\pm 3}{2\sqrt{2}};t\in\left\{-\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

Заметим, что найденные корни удовлетворяют условию $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$. Обратная замена с использованием приёма Ибн Юниса:

$$\left[\begin{array}{l}\cos a-\sin a=-\sqrt{2};\\ \cos a-\sin a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos a-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin a=-1;\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos a-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin a=\dfrac{1}{2}.\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1;\\ \cos\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a+\dfrac{\pi}{4}=\pi+2\pi n;\\ a+\dfrac{\pi}{4}=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k.\end{array}\right.$$

Учитывая ОДЗ, получаем $\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{12}+2\pi k;n,k\in Z$.

Отв. $\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{12}+2\pi k;n,k\in Z$

№67. (ЕГЭ). Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{9x^2-6y-31}{3x+2y+11}=-14x+8y+13;\\ \sqrt{10-(2x-3y-9)^2}=\sqrt{10-(5x-y+2)^2}\end{cases}.$$

1)ОДЗ $3x+2y+11\neq 0;\quad 10-(2x-3y-9)^2\geq 0;\quad 10-(5x-y+2)^2\geq 0;$

2)На ОДЗ второе уравненние преобразуем:

$$\sqrt{10-(2x-3y-9)^2}=\sqrt{10-(5x-y+2)^2}\Leftrightarrow$$
$$(2x-3y-9)^2=(5x-y+2)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x-3y-9)^2-(5x-y+2)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$((2x-3y-9)+(5x-y+2))((2x-3y-9)-(5x-y+2))=0;$$
$$\Leftrightarrow (7x-4y-7)(-3x-2y-11)=0 \Leftrightarrow (7x-4y-7)=0,$$

второй множитель не может равняться 0 в силу ОДЗ. Два неравенства в ОДЗ мы не проверяли, выполним потом проверку корней. Итак, исходная система уравнений

равносильна на ОДЗ системе $\begin{cases} \dfrac{9x^2-6y-31}{3x+2y+11}=-14x+8y+13; \\ 7x-4y-7=0. \end{cases}$

Заметим, что $7x-4y-7=0 \Leftrightarrow -14x+8y+14=0 \Leftrightarrow -14x+8y+13=-1$,

подставляя второе уравнение в первое, получим

$$\frac{9x^2-6y-31}{3x+2y+11}=-1 \Leftrightarrow 9x^2-6y-31=-3x-2y-11.$$

Возвращаемся к системе

$$\begin{cases} 7x-4y-7=0; \\ 9x^2-6y-31=-3x-2y-11, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y=7x-7; \\ 9x^2-4y+3x-20=0, \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y=7x-7; \\ 9x^2-4y+3x-20=0, \end{cases}$$

Подставим первое уравнение во второе:

$$9x^2-(7x-7)+3x-20=0 \Leftrightarrow 9x^2-4x-13=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\pm 11}{9}.$$

Первое решение системы $\begin{cases} x_1=-1; \\ y_1=-3{,}5 \end{cases}$ проверим, подставляя в ОДЗ:

$$10-(2(-1)-3(-3{,}5)-9)^2\geq 0 \Leftrightarrow 10-(-2+10{,}5-9)^2\geq 0 \text{ верно!}$$

Второе решение системы $\begin{cases} x_2=\dfrac{13}{9}; \\ y_2=\dfrac{7}{9} \end{cases}$ проверим:

$$10-\left(2\cdot\frac{13}{9}-3\left(\frac{7}{9}\right)-9\right)^2\geq 0 \Leftrightarrow 10-\left(\frac{5}{9}-9\right)^2\geq 0 \Leftrightarrow 10-\left(\frac{76}{9}\right)^2\geq 0 \text{ неверно.}$$

Постороннее решение отбрасываем.

Ответ: $\begin{cases} x_1=-1; \\ y_1=-3{,}5 \end{cases}$.

№68.Дано: $x+\sqrt{y}+\sqrt[3]{z}=7,\quad 2x+3\sqrt{y}+4\sqrt[3]{z}=29.$ **Вычислите значение выражения** $x+3\sqrt{y}+5\sqrt[3]{z}.$

Из геометрии известна теорема о разложении вектора по базису некомпланарных векторов, например, по базису i,j,k.

В алгебре многочленов известна теорема: если два многочлена тождественно равны, то и коэффициенты при соответствующих степенях равны.

Применим алгебраический аналог этой теоремы, разложим выражение $x+3\sqrt{y}+5\sqrt[3]{z}$ в линейную комбинацию выражений $x+\sqrt{y}+\sqrt[3]{z}=7 \quad и \quad 2x+3\sqrt{y}+4\sqrt[3]{z}=29.$ Будем искать такие a,b чтобы выполнялось равенство

$$x+3\sqrt{y}+5\sqrt[3]{z}=a\left(x+\sqrt{y}+\sqrt[3]{z}\right)+b\left(2x+3\sqrt{y}+4\sqrt[3]{z}\right).$$

Приравняем коэффициенты при $x;\sqrt{y};\sqrt[3]{z}$,

решаем систему $\begin{cases}1=a+2b;\\3=a+3b;\\5=a+4b.\end{cases} \Leftrightarrow a=-3;b=2.$ Значит,

$$x+3\sqrt{y}+5\sqrt[3]{z}=-3\left(x+\sqrt{y}+\sqrt[3]{z}\right)+2\left(2x+3\sqrt{y}+4\sqrt[3]{z}\right)=$$
$$=-3(7)+2(29)=-21+58=37.$$

Отв.37.

№69. Найдите $f(x)$, если $2f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=\sqrt{x}$. Постройте эскиз графика функции $y=f(x)$.

ОДЗ: x>0. Заменим в уравнении x на $\frac{1}{x}$, получим второе уравнение $2f\left(\frac{1}{x}\right)+3f(x)=\sqrt{\frac{1}{x}}$. Выразим из первого уравнения $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\sqrt{x}-2f(x)}{3}$ и исключим его из второго уравнений

$$2\cdot\frac{\sqrt{x}-2f(x)}{3}+3f(x)=\sqrt{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\sqrt{x}+\frac{5}{3}f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow$$

$$f(x)=\frac{3}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{2}{3}\sqrt{x}\right)=\frac{3-2x}{5\sqrt{x}};x>0.$$

Ответ: $f(x)=\dfrac{3-2x}{5\sqrt{x}}; \quad x>0$**. Построить график** $f(x)$ **можно методом графического сложения или провести сначала полное исследование функции** $f(x)$ **по известному плану, затем построить график.**

№70.Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+100-16x-12y}+\sqrt{x^2+y^2+104+4x-20y}=2\sqrt{29},\\ x^2+y^2-14x-10y+58=0\end{cases}$$

Отв. $y=\dfrac{180+2\sqrt{415}}{29};\, x=\dfrac{217-52\sqrt{415}}{29}$.

Подсказка: используйте геометрический смысл системы, первое уравнение задаёт отрезок прямой $y=-\frac{2}{5}x+\frac{46}{5}$, а второе – окружность.

№71.Найдите все значения параметра а, при каждом из которых число решений уравнения $2x^3+6x=\left(3^{6a}-9\right)\sqrt{2^{8a}-\dfrac{1}{6}}-(3a-1)^2\cdot 12^x$ **(*)** не меньше числа решений уравнения $3\left(5x^2-a^4\right)-2x=2a^2(6x-1)$ **(**)**.

Проанализируем данные уравнения.

1)Приведём к стандартному виду $3\left(5x^2-a^4\right)-2x=2a^2(6x-1)$ квадратное уравнение и вычислим его дискриминант: $D(a)=\left(9a^2-1\right)^2\geq 0$, он неотрицателен, уравнение имеет корни при любых а, причём, при $a=\pm\dfrac{1}{3}$ **квадратное уравнение имеет один корень, а при** $a\neq\pm\dfrac{1}{3}$ **- два корня.**

2) Уравнение $2x^3+6x=\left(3^{6a}-9\right)\sqrt{2^{8a}-\dfrac{1}{6}}-(3a-1)^2\cdot 12^x$ перепишем в виде $2x^3+6x+(3a-1)^2\cdot 12^x=\left(3^{6a}-9\right)\sqrt{2^{8a}-\dfrac{1}{6}}$, заметим, что функция $f(x)=2x^3+6x+(3a-1)^2\cdot 12^x$ является возрастающей, как сумма трёх возрастающих функций (иначе: легко видеть, что $f'(x)>0$, следовательно, функция монотонно возрастает на R). **Монотонная функция каждое значение из**

множества значений принимает только один раз (иначе нарушится её монотонность). Поэтому уравнение $f(x)=\left(3^{6a}-9\right)\sqrt{2^{8a}-\frac{1}{6}}$ **может иметь не более одного корня. Наличие корней определяется двумя** условиями: 1) а является допустимым значением параметра, т.е. $a\in D\left(\left(3^{6a}-9\right)\sqrt{2^{8a}-\frac{1}{6}}\right)$;

2)множество значенний функции $\varphi(a)=\left(3^{6a}-9\right)\sqrt{2^{8a}-\frac{1}{6}}$ пересекается с множеством значений функции $f(x)=\left(3^{6a}-9\right)\sqrt{2^{8a}-\frac{1}{6}}$.

3)Из условия следует, что

«**число решений уравнения** $2x^3+6x=\left(3^{6a}-9\right)\sqrt{2^{8a}-\frac{1}{6}}-(3a-1)^2\cdot 12^x$ **(*)** не меньше числа решений уравнения $3\left(5x^2-a^4\right)-2x=2a^2(6x-1)$ **(**)**».

Т.е. «**число решений уравнения (*), равное 1** $\geq$ числа решений уравнения **(**)**». Ясно, что последнее может выполняться только при равном 1 числа решений уравнения**(*) и (**)**.

Итак, доказано, что оба уравнения имеют по одному корню, но мы знаем, что квадратное уравнение имеет один корень при $a=\pm\frac{1}{3}$**.**

Проверка показывает, что при $a=\frac{1}{3}$ **уравнение (*) имеет единственный корень x=0.** Значение $a=-\frac{1}{3}$ **не принадлежит области определения** $\varphi(a)$, $-\frac{1}{3}\notin D\left(\left(3^{6a}-9\right)\sqrt{2^{8a}-\frac{1}{6}}\right)$, т.к. под корнем получается **отрицательное число, что противоречит области определения квадратного корня. Ответ:** $\frac{1}{3}$

№72. Изобразите множество точек M(a,b) координатной плоскости AOB таких, что уравнение $\sqrt{2x-b}=\sqrt{x^2+2ax-b}$ имеет два различных корня относительно x.

1)ОДЗ: $2x-b\geq 0;\quad x^2+2ax-b\geq 0.$ Это необходимое условие существования радикалов иуравнения.

2)На ОДЗ данное уравнеиние равносильно следующему

$$\sqrt{2x-b}=\sqrt{x^2+2ax-b}\Leftrightarrow x^2+2ax-b=2x-b\Leftrightarrow x^2+(2a-2)x=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=0;\\ x_2=2-2a.\end{array}\right.$$

3)Проверим выполнение ОДЗ для корня $x_1=0\Rightarrow 0-b\geq 0;\quad 0-b\geq 0\Leftrightarrow b\leq 0.$

4)Проверим выполнение ОДЗ для корня $x_2=2-2a\Rightarrow 4-4a-b\geq 0;\quad (2-2a)^2+2a(2-2a)-b\geq 0\Leftrightarrow b\leq 4-4a.$

5)Найдём контрольные значения параметра a, при которых корни совпадают, чтобы исключить их: $x_1=x_2\Leftrightarrow 2-2a=0\Leftrightarrow a=1.$

6)Итак, достаточные условия существования двух различных корней относительно x: $\begin{cases}b\leq 0;\\ b\leq 4-4a;\\ a\neq 1.\end{cases}$

Изобразим множество точек M(a,b) координатной плоскости AOB таких, что уравнение $\sqrt{2x-b}=\sqrt{x^2+2ax-b}$ имеет два различных корня относительно x. Эта область ограничена тупым углом, расположенным в нижней полуплоскости **AOB**, вершина угла в точке (1;0) a=1;b=0. Один луч угла расположен на оси абсцисс $a\in(-\infty;1]$, другой луч – на прямой b=4-4a, $b\leq 0; a>1$; вертикальная прямая a=1 выколота.

73. Решите неравенство $\sqrt[3]{x-a}+\sqrt[3]{x-b}+\sqrt[3]{x-c}\geq 0$**, где** $a,b,c\in R$.

Отв. $x\geq x_0$, где $x_0=6\cdot\dfrac{\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3-abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$.

Если a=b=c, то $x_0=a$.

Подсказка: исследуйте функцию $f(x)=\sqrt[3]{x-a}+\sqrt[3]{x-b}+\sqrt[3]{x-c}$ на монотонность и решите уравнение $f(x)=0$.

№74. Решите уравнение $\sqrt[4]{77+x}+\sqrt[4]{20-x}=5$.

1-й способ. ОДЗ: $x\in[-77;20]$. Возводим уравнение в квадрат:

$$\sqrt{77+x}+\sqrt{20-x}+2\sqrt[4]{(77+x)(20-x)}=25\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{77+x}+\sqrt{20-x}=25-2\sqrt[4]{(77+x)(20-x)}.$$

Прежде, чем возвести ещё раз в квадрат, поставим ограничение

$25-2\sqrt[4]{(77+x)(20-x)}\geq 0 \quad (*)$, обеспечивающее равносильность

$$\sqrt{77+x}+\sqrt{20-x}=25-2\sqrt[4]{(77+x)(20-x)}\Leftrightarrow$$

преобразований. $77+x+20-x+2\sqrt{77+x}\cdot\sqrt{20-x}=$

$$625-100\sqrt[4]{(77+x)(20-x)}+4\cdot\sqrt[2]{(77+x)(20-x)}\Leftrightarrow$$

$2\cdot\sqrt[2]{(77+x)(20-x)}-100\sqrt[4]{(77+x)(20-x)}+528=0;$ получили квадратное уравнение относительно $t=\sqrt[4]{(77+x)(20-x)}$, $t^2-50t+528=0,$ из ограничения $25-2\sqrt[4]{(77+x)(20-x)}\geq 0 \quad (*)$ следует

$$25-2t\geq 0\Leftrightarrow t\leq 12.5 \quad .$$

Находим корни квадратного уравнения

$$t=25\pm\sqrt{625-264}=25\pm 19;\quad t=6;\quad 44-п.к.$$

Обратная замена

$$t=\sqrt[4]{(77+x)(20-x)}=6\Leftrightarrow -x^2-57x+1540=1296\Leftrightarrow x^2+57x-244=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-57\pm\sqrt{3249+976}}{2}=\frac{-57\pm\sqrt{4225}}{2}=\frac{-57\pm 65}{2};\quad t\in\{-61;4\}.$$

Оба корня принадлежат ОДЗ $x\in[-77;20]$.

Отв.-61;4.

2-й способ. ОДЗ: $x\in[-77;20]$. Замена

$$a=\sqrt[4]{77+x};\quad b=\sqrt[4]{20-x};\quad a\geq 0;\quad b\geq 0.$$

Уравнение сводим к системе

$$\begin{cases} a+b=5; \\ a^4+b^4=97, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=25-2ab; \\ a^4+b^4=97, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25-2ab\ge 0; \\ a^4+b^4=(25-2ab)^2-2a^2b^2; \\ a^4+b^4=97, \end{cases}$$

Рассмотрим вспомогательную систему

$$\begin{cases} 25-2ab\ge 0; \\ 97=(25-2ab)^2-2a^2b^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12{,}5\ge ab; \\ 97=625-100ab+2a^2b^2; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12{,}5\ge ab; \\ a^2b^2-50ab+264=0; \end{cases} \Leftrightarrow ab=6. \quad 44-п.к.$$

Осталось решить систему $\begin{cases} a+b=5; \\ ab=6, \end{cases}$, напоминающую теорему Виета.

$$\begin{cases} a=2 \\ b=3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{77+x}=2 \\ \sqrt[4]{20-x}=3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{77+x}=2 \\ \sqrt[4]{20-x}=3, \end{cases} \Leftrightarrow x=-61.$$ Или

$$\begin{cases} a=3 \\ b=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{77+x}=3 \\ \sqrt[4]{20-x}=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{77+x}=3 \\ \sqrt[4]{20-x}=2, \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Отв.4;-61.

№75. Найдите все а, при которых корни уравнения $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=a$ существуют и принадлежат отрезку $[2;17]$.

1)Подкоренные выражения очень напоминают квадрат двучлена, применив метод «пристального взгляда» и формулы сокращённого умножения, преобразуем

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=a \Leftrightarrow \sqrt{\left|\sqrt{x-1}-2\right|^2}+\sqrt{\left|\sqrt{x-1}-3\right|^2}=a$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=a$$

2)Выведем ещё одно следствие из условия

$$x\in[2;17] \Leftrightarrow 2\le x\le 17 \Leftrightarrow 1\le x-1\le 16 \Leftrightarrow 1\le\sqrt{x-1}\le 4.$$

3)Переформулируем исходную задачу: найдите все а, при которых корни уравнения $|t-2|+|t-3|=a$ существуют и принадлежат отрезку $t\in[1;4]$.

4)Задача легко решается графически в системе координат TOY, построим график функции $y=|t-2|+|t-3|=\begin{cases}5-2t, t\le 2;\\ 1, \quad t\in[2;3];\\ 2t-5, \quad t\ge 3.\end{cases}$ на отрезке $t\in[1;4]$**.Это «трапецеобразная» ломаная, она имеет общие точки с горизонтальной прямой y=a только при $a\in[1;3]$.** **Отв.** $[1;3]$**.**

№76. Решите уравнения

$\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}=-1$, (1)

$\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}=1$ (2)

и объясните, почему в одном случае посторонние корни появляются, а в другом – нет.

Решение. Решим первое уравнение. Возведем его в куб:

$2+3\cdot\sqrt[3]{1-x}\cdot\sqrt[3]{1+x}\cdot(-1)=-1;\ (-3)\cdot\sqrt[3]{1-x}\cdot\sqrt[3]{1+x}=-3;$

$\sqrt[3]{1-x^2}=1 \ \Rightarrow x=0$ - не удовлетворяет исходному уравнению, является посторонним корнем.

Ответ: $\varnothing$.

Решим второе уравнение. Возведем его в куб:

$2+3\cdot\sqrt[3]{1-x}\cdot\sqrt[3]{1+x}\cdot 1=1;\ 3\cdot\sqrt[3]{1-x^2}=-1; 1-x^2=\frac{1}{27};\ x^2=\frac{28}{27};\ x=\pm\sqrt{\frac{28}{27}}.$

В том, что это истинные корни, надо убедиться проверкой, но она очень затруднительна.

Обоснуем истинность полученных корней иначе. Рассмотрим уравнение

$\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{a+x}=p$. $(*)$

Пусть $u=\sqrt[3]{a-x},\ v=\sqrt[3]{a+x}$; $u+v=p$ - уравнение, равносильное $(*)$. Возведем его в куб:

$u^3+v^3+3uv(u+v)=p^3$. Это уравнение тоже равносильно $(*)$. Если подставить $u+v=p$, то равносильность нарушается. Покажем, как и почему это происходит.

$u^3+v^3+3uvp=p^3$; $(u+v)^3-3uv(u+v)+3uvp=p^3$;

$(u+v)^3-p^3-3uv(u+v-p)=0;$

$(u+v-p)\left((u+v)^2+(u+v)p+p^2\right)-3uv(u+v-p)=0;$

$(u+v-p)\left(u^2+v^2+p^2+2uv+up+vp\right)-3uv(u+v-p)=0;$

$(u+v-p)\left(u^2+v^2+p^2-uv+up+vp\right)=0.$

Последнее уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} u+v=p; \\ u^2+v^2+p^2-uv+up+vp=0. \end{array}\right.$$

Первое из них – это исходное уравнение, а второе – новое уравнение, которое при некоторых условиях является генератором посторонних корней. Изучим его подробнее.

$2u^2+2v^2+2p^2-2uv+2up+2vp=0$; $(u-v)^2+(v+p)^2+(u+p)^2=0$.

Последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} u-v=0, \\ v+p=0, \\ u+p=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=v, \\ u=-p, \\ v=-p. \end{cases}$$

Т.е. $u=v=-p \Leftrightarrow \sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{a+x}=-p$. $(**)$

Это и есть необходимое и достаточное условие появления посторонних корней при решении уравнения $(*)$ изложенным методом.

В уравнении (1) $a=1,\ p=-1$ и условие $\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{1+x}=1$ выполняется только при $x=0$, который является посторонним.

В уравнении (2) $a=1,\ p=1$ и условие $\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{1+x}=-1$ не выполняется ни при каких x, поэтому посторонних корней не появляется.

Ответ. $x=\pm\sqrt{\frac{28}{27}}$.

Самостоятельно выясните, при каких значениях p уравнение

$\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{a+x}=p$ имеет решение, и найдите это решение.

(Ответ: $0<p\le 2$.)

№77.Могут ли числа $\sqrt{2};\sqrt{3};\sqrt{5}$ быть членами одной арифметической прогрессии?

Предположим, что это возможно, тогда существуют натуральные k<m<n, такие, что данные три числа являются соответственно к-ым, m-ым и n-ым членами одной арифметической прогрессии. Тогда $\begin{cases} \sqrt{2}=a_1+(k-1)d; \\ \sqrt{3}=a_1+(m-1)d; \\ \sqrt{5}=a_1+(n-1)d; \end{cases}$ для исключения

параметров a_1 и d вычтем первое уравнение из второго и из третьего; а затем поделим первое на второе:

$$\begin{cases}\sqrt{2}=a_1+(k-1)d;\\ \sqrt{3}=a_1+(m-1)d;\\ \sqrt{5}=a_1+(n-1)d;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{3}-\sqrt{2}=(m-k)d;\\ \sqrt{5}-\sqrt{2}=(n-k)d;\end{cases}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{m-k}{n-k}.$$

В правой части стоит рациональное число, а в левой – иррациональное, равенство невозможно.

Известно, что пифагореец Гиппас из Метапонта доказал иррациональность $\sqrt{2}$, следуя его методу мы ранее доказали иррациональность $\sqrt{5}$; аналогично можно доказать иррациональность любого числа вида $\sqrt{n}$, где n – не является квадратом целого числа. Однако, из иррациональности слагаемых ещё не следует иррациональности, например, их суммы: $\sqrt{2}+\left(1-\sqrt{2}\right)=1$, здесь слагаемые иррациональны, а их сумма – натуральна.

Докажем строго, что число $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ - иррационально. Для этого сначала преобразуем число

$$\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}-\sqrt{10}-2}{5-2}=\frac{1}{3}\left(\sqrt{15}+\sqrt{6}-\sqrt{10}\right)-\frac{2}{3};$$

нужно доказать иррациональность числа $\sqrt{15}+\sqrt{6}-\sqrt{10}$.

Предположим противное, что оно рационально, тогда

$$r=\sqrt{15}+\sqrt{6}-\sqrt{10}\Leftrightarrow r+\sqrt{10}=\sqrt{15}+\sqrt{6}\Leftrightarrow r^2+2r\sqrt{10}+10=21+6\sqrt{10}\Leftrightarrow$$

$$r^2+2r\sqrt{10}=11+6\sqrt{10}\Leftrightarrow\sqrt{10}=\frac{r^2-11}{6-2r}$$

. Последнее равенство неверно, т.к.иррациональное число не равно рациональному. Источник противоречия- предположение противного, что число $\sqrt{15}+\sqrt{6}-\sqrt{10}$ рационально, а значит иррационально число $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$. Следовательно, числа $\sqrt{2};\sqrt{3};\sqrt{5}$ не могут быть членами одной арифметической прогрессии. Ответ: нет.

Вариант 2

1. Для многочлена $P_3(x)=2x^3-3x^2+4x+5$ вычислите $P_3\left(1+\sqrt{3}\right)+P_3\left(1-\sqrt{3}\right)$. Этот пример можно обобщить, доказав, что значение выражения $P_3\left(a+\sqrt{b}\right)+P_3\left(a-\sqrt{b}\right)$ является целым числом для натуральлных чисел a,b, при условии, что b не является квадратом целого числа. Как это доказать?

2. Вычислите $\left(\sqrt[3]{16}-2\cdot\sqrt[3]{2}+4\cdot\sqrt[3]{54}\right)\cdot\left(2{,}5\cdot\sqrt[3]{4}-1{,}5\cdot\sqrt[3]{0{,}5}\right)$

3. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{24}-\sqrt{48}+\sqrt{108}}$

4. Представьте данное выражение в виде квадрата двучлена: $6+\sqrt{20}$

5. Докажите, что данное число является целым и найдите его значение: $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}+\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$

6. Упростите выражение $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ при $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right),\ a,b>0$

7. Упростите выражение $\left[(x+a)^{1/3}(x-a)^{-1/3}+(x+a)^{-1/3}(x-a)^{1/3}-2\right]^{-1/2}$ при $x=a\dfrac{m^3+n^3}{m^3-n^3},\ m>0,\ n>0$.

8. Докажите иррациональность числа $\sqrt{7}$.

9. Не используя калькуляторов и ЭВМ, сравните числа $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ *и* $\sqrt{6}+1$.

10. Вычислите предел $\sqrt{5\cdot\sqrt{7\cdot\sqrt{5\cdot\sqrt{7\cdot\sqrt{\ldots}}}}}$

11. Если 30% числа равны $\left(3\sqrt{125}-2\sqrt{45}\right):\sqrt{5}$, то чему равно это число?

12. Найдите значение выражения $\sqrt{0.1(6)\cdot 2.1(6)+2.(3)\cdot 0.(428571)}-0.1(6)$, используя прогрессию для обращения периодической дроби в обыкновенную.

13. Определите, рационально или иррационально число $a=\sqrt{\dfrac{1-0.(19)}{1+0.(21)}}$.

14. Сумма корней уравнения $(x^2-4x-5)\cdot\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{(x-3)(x-2)x(x+0.5)(x+2)}=0$ равна:
1) 7.5; 2) 2.5; 3) –2.5; 4) 1; 5) 0.

15. При каком натуральном n $(n>3)$ значение выражения
$\dfrac{n^3+n^2-8n-12+(n^2-4)\sqrt{n^2-9}}{n^3-n^2-8n+12+(n^2-4)\sqrt{n^2-9}}$ ближе всего к $\dfrac{6}{25}\cdot\sqrt{19}$?

16. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(2x-a)\cdot(2-\sqrt{2x-6})=0$ имеет ровно один корень.

17. Решите уравнение $x^3-(2\sqrt{13}+\sqrt{5})x^2+(1+2\sqrt{65})x-\sqrt{5}=0$, если известно, что произведение двух его корней равно 1.

18. Решите уравнение $2\cdot\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[3]{-x}=6$.

19. Решите уравнение. $\sqrt[8]{x^2+x}+(x^2-x-2)^{0.4}+(x^2-5x-6)^{0.3}=0$

20. При каких значениях параметра a уравнение $(x-5a)^{7.7}=\left((x-5a)^{1.1}-(5+4a-x)^{51}\right)^7$ не имеет корней?

21. Решите уравнение $x+\sqrt{4-3x}=-2$.

22. Решите уравнение $3x+\sqrt{10-x^2}=0$.

23. Решите уравнение $\sqrt{x^2-2x}=4-x$.

24. Решите неравенство $\sqrt{1-x}>x+1$.

25. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}-2\sqrt{\dfrac{x-1}{2x+1}}=1$.

26. Решите уравнение $2\sqrt[3]{x}-9\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}=5x^{-1}$.

27. Решите неравенство $\sqrt{x^2-4x}>x-3$.

28. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{56-13x-3x^2}}{4-2x}\ge 0$.

29. Решите неравенство $\sqrt{9-6x+x^2}\le\dfrac{2}{x-2}$.

30. При каких a уравнение $\sqrt{a-x}=2-x$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

31. Решите неравенство $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}\ge 3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$.

32. Решите уравнение $\dfrac{\sin^2 \pi x-\cos^2 3\pi x+1}{\sqrt{21+4x-x^2}}=0$.

33. Решите уравнение $(2+3\cos 2x)\left(\sqrt{2\cos 2x+3\sin x+3}-2\sin x+1\right)=0$.

34. Найдите все значения x, которые удовлетворяют неравенству $\sqrt{x^2+5x+a^2}<x+a$ при любом значении параметра **а**, принадлежащему отрезку $[1;2]$. Отв. $x\in\left[\dfrac{\sqrt{21}-5}{2};0\right)$.

35.Найдите все значения параметра а, при которых уравнение $\left(\sin^2 x-5\sin x-2a(\sin x-2)+6\right)\cdot\left(a\sqrt{2}+8x\sqrt{2x-2x^2}\right)=0$ имеет корни. Отв. $a\in(2;3)\cup(3;+\infty)$.

36. Найдите все значения **а,** при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}\left(y^2+xy+3x+5y+6\right)\sqrt{x+4}=0;\\ x-y+a=0.\end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

Отв. $a\in\{-4\}\cup[1;6)$.

37. Найдите все значения **а,** при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-3a}\cos 2x=\sqrt{x-3a}\sin 2x$ имеет единственный корень на оотрезке $[0;\pi]$.

38. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases}ax\ge 3,\\ a<\sqrt{x+4},\\ 2x\ge 3a+6\end{cases}$ имеет хотя бы одно решение, принадлежащее отрезку $[5;6]$.

Отв. $a\in[0{,}5;2]$.

39. Найдите все неотрицательные значения а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(y-a)^2+x^2}=\sqrt{a^2+9} \\ y=\left|2-a^2\right| \end{cases}$ имеет единственное решение. Отв. $a\in[1;2]$.

40. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $x^2+x-a=\sqrt{x^4-x^2+a^2}$ имеет ровно три различных корня. Отв.a<-1;-1<a<0.

41. При всех значениях параметра а решите уравнение $\sqrt{4x-3}+\sqrt{x+3}=a$.

42. Найти все значения а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \dfrac{\left(\sqrt{(x+2)^2}+y\right)\left(y+\sqrt{(x+2)^2}-6\right)}{-5-\sqrt{x^2-2x}}=0, \\ y-x(x+4)+a^2=6a-10. \end{cases}$ имеет ровно 3 решения.

Отв. $a\in\left(3-\sqrt{15};0\right)\cup[2;4]\cup\left(6;3+\sqrt{15}\right)$.

43. Найдите все значения а, при которых уравнение $\dfrac{x^2-7x+(a+2)(6-a)+1}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2}=\log_p p,$ где $p=5-\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{a^2}{5}$ имеет хотя бы один корень. Отв. $a\in(-3;2)\cup(2;4)\cup\left(4;3+\sqrt{7{,}5}\right)$. Исп. КПП.

44. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых решение неравенства $\dfrac{(a-x)\left(2\sqrt{x}-a\right)}{\sqrt{3-x^2-a^2}}\geq 0$ содержит отрезок длиной не менее 0,5. Отв. $a\in\left[2-\sqrt{2};2\right)$.

45. При каких значениях параметра а уравнение $x-a=\sqrt{a+\sqrt{x}}$ имеет единствнное решение? Отв. $a\in\{-0{,}25\}\cup(0;+\infty)$. Возможны три способа: 1)*алгебраический* с переходом к равносильной системе; 2)**графический** с построением графиков функций в левой и правой частях уравнения; 3)*комбинированный* с исследованием ***параметра, как функции аргумента х***.

46. Решите неравенство $\dfrac{13-6x+\sqrt{4x^2-2x-6}}{5-2x}>1$.

Отв. $x\in(-\infty;-1]\cup[1{,}5;2{,}5]\cup(3{,}5;+\infty)$.

47. (ЕГЭ2021)Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\left|x^2-a^2\right|+5=|x+a|+5|x-a|$ имеет ровно четыре различных решения. Отв. $(-\infty;-3)\cup(-3;-2)\cup(-2;2)\cup(2;3)\cup(3;+\infty)$

48. Известно, что $1+\sqrt{2}$ является корнем уравнения $x^3+ax^2+bx+a+2=0$ ($a,b\in Z$). Найдите значения a,b и остальные корни уравнения.

49.Сократите дробь $\sqrt{\dfrac{x-5}{x+2}}\cdot\dfrac{x^2+(2-x)\sqrt{x^2-3x-10}-4}{x^2-(x+5)\sqrt{x^2-3x-10}-25}$.

50.Найдите все целые значения выражения

$$\sqrt{72}\left(\frac{\sin^3 4x-\cos 8x+4\cos\left(\frac{9\pi}{2}-x\right)\cos x\cos 2x-3}{\sin 4x-1}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

52.(ЕГЭ2008)Даны уравнения:

$$\sqrt{18p-23-\left(8p-p^2-3\right)x}=9+2x-7p \quad и \quad \left(5+4^{\frac{p+1}{3p}}\right)^x=26p-5x+7$$

Значения параметра выбираются так, чтобы оба уравнения имели смысл и при делении числа различных корней первого уравнения на число различных корней второго уравнения получается 2-р. Решите второе уравнение при каждом значении р, выбранном таким способом. Отв: р=2, х=2.

53.Функция $y=f(x)$ периодическая с периодом 8, на отрезке $x\in[0;8]$ функция задаётся формулой $f(x)=x(8-x)$. Решите уравнение $f(2x+16)+23=5\cdot f(x)$. (МГУ,2000). $f(x)=\sqrt{x}$.

54. (ЕГЭ2008). Для чисел $a_1, a_2, a_3, ...a_{19}$ верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$, n=1,2,…18. Найдите $a_4 + a_5 + a_6$, если известно, что $a_{19} = 0$ и

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x-5}{x-3}, x < 5; \\ \sqrt[7]{\dfrac{x-6}{x-4}} + \sqrt{\dfrac{25x-124}{x-1}}; x \geq 5. \end{cases}$$ Отв.2.

55.Решите неравенство $-2 + \sqrt{-1+5x} \geq \dfrac{x+1}{2x-1}$.

56.Решите уравнение $\sqrt{x+4} + \sqrt{-x-2} = x^2 + 6x + 11$.Отв.-3.

57. При каких положительных значениях параметра а область определения функции $y = \left(a^{5ax+2} - a^{a^2x+6x}\right)^{-2,5}$ **содержит число 1 ?**

58. Решите неравенство $2^{\sqrt{x^2-3x+3}} > 2^{\sqrt{x}}$**.**

59. При каких а уравнение

$$\left(\sqrt{x^2-2ax+7} + \sqrt{x^2-2ax+5}\right)^x + \left(\sqrt{x^2-2ax+7} - \sqrt{x^2-2ax+5}\right)^x = 2^{1+\frac{x}{2}}$$

имеет единственное решение? Отв. $a \in \left(-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right)$**. Подсказка: используйте неравенство Огюстена Коши.**

60. Решите уравнение $\sqrt[2]{x^2 + x - 1} + \sqrt[2]{-x^2 + x + 1} = x^2 - x + 2$.
Отв.1. Подсказка: используйте неравенство О.Коши.

61. Найдите все действительные корни уравнения

$$\frac{3+3x^4}{x^2}+\frac{6\cdot\sqrt[3]{y+2}\cdot(y+2)+6}{\sqrt[3]{(y+2)^2}}=18$$ **.Отв.** $(1;-1);(-1;-1);(1;-3);(-1;-3).$

Подсказка: используйте неравенство О.Коши.

62. Точка A лежит на графике функции $y=f(x)$, точка B – на оси OX и её абсцисса в два раза больше ординаты точки A. Найдите наименьшее значение площади треугольника AOB, где точка O – начало координат и

$$f(x)=\sqrt{6x+3\sin 2x-13\sin x+17},\quad x\in\left[\frac{1}{4}\pi;\frac{6}{7}\pi\right].$$

Отв. $\mathbf{3}\pi+4$.

63. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$x^2+\frac{6x}{\sqrt{\sin a}}+\frac{3\sqrt{3}}{\cos a}+12\sqrt{3}=0$ имеет единственное решение.

Отв. $\frac{\pi}{9}+2\pi n;\quad \frac{7\pi}{9}+2\pi k;\quad \frac{2\pi}{3}+2\pi l;\quad n,k,l\in Z$.

64.Дано: $x^{3.5}+\cos\sqrt{y}+\sqrt[3]{\arcsin 2z}=11$, $7x-2\cos\sqrt{y}+3\sqrt[3]{\arcsin 2z}=17$. Вычислите значение выражения $32x-13\cos\sqrt{y}+12\sqrt[3]{\arcsin 2z}$.

65.Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}=10,\\ 3x+4y=26\end{cases}$$

66.Найдите все значения параметра а, при каждом из которых число решений уравнения $x^3+4x=\left(4^a-\frac{1}{2}\right)\sqrt{15-3^{5a}}-(2a+1)^2\cdot 4^x$ не меньше числа решений уравнения $x(3x-1)=a^2(2x-1+a^2)$. Отв. $-\frac{1}{2}$. Подсказка: дискриминант второго уравнения $D(a)\geq 0$.

67. Решите уравнение $\sqrt[3]{2x+3}+\sqrt[3]{3x-1}=\sqrt[3]{5x+2}$.

68. Решите неравенство $\left(x+2-2\sqrt{x+1}\right)^{0,5}+\left(x+6-4\sqrt{x+2}\right)^{0,5}\le 1$. Отв. $\left[-\frac{7}{16};\frac{161}{64}\right]$.

69. Докажите справедливость равенства

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+..+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{2026}}$$, где слева стоят 2025 квадратных радикала.

70. Докажите, что уравнение $x^4-6x^2+1=0$ имеет корни $tg\frac{\pi}{8};tg\frac{3\pi}{8};tg\frac{5\pi}{8}$.

70.МГУ ВМК 2001. Функция определена, возрастает и отрицательна на всей числовой прямой. Решите неравенство

$$\frac{2\cdot f\left(x^2-2x-112\right)+\left|f\left(x^2-2x-112\right)-3\cdot f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)\right|}{\left(3\cdot f\left(-2x\sqrt{32-2x}-112\right)-2\cdot f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)\right)^7}>0$$

Отв. $\left(-13-\sqrt{57};8\right)$.

Если Бог хочет сделать тебя счастливым, он ведёт тебя трудной дорогой, потому что лёгких путей к счастью не бывает. Омар Хайям, известный математик.

Вариант 3

1. Упростив правую часть равенства, решите уравнение

$$\frac{4-5x}{2x+3}=\left(\frac{a-2b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{4b^2}}+\frac{\sqrt[3]{2a^2b}+\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{4b^2}+\sqrt[3]{16ab}}\right):\frac{a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{2b}+b\sqrt[3]{a}+a\sqrt[3]{2b}}{a+b}$$

2. Для многочлена $P_3(x)=2x^3-3x^2+4x+5$ вычислите $P_3\left(1-\sqrt{5}\right)+P_3\left(1+\sqrt{5}\right)$. Этот пример можно обобщить, доказав, что значение выражени $P_3\left(a+\sqrt{b}\right)+P_3\left(a-\sqrt{b}\right)$ является целым числом для натуральлных чисел a,b, при условии, что b не является квадратом целого числа. Как это доказать?

3. Вычислите $\dfrac{\left(\sqrt{20}-\sqrt[3]{16}\right)\left(\sqrt{45}+\sqrt[3]{54}\right)}{2\left(7-\sqrt[3]{54}\right)-\left(\sqrt[3]{2}-3\right)^2}$.

4. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$.

5. Представьте данное выражение в виде квадрата двучлена: $7-4\sqrt{3}$

6. Докажите, что данное число является целым и найдите его значение: $\sqrt[3]{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+2\right)}+\sqrt[3]{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-2\right)}$

7. Упростите выражение $\dfrac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x^{\frac{3}{2}}-1}+\dfrac{2}{x^{-\frac{1}{2}}}$.

8. Упростите выражение $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}\right):\left(1+\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}\right)$.

9. Докажите иррациональность числа $\sqrt[3]{3}$.

10. Не используя калькуляторов и ЭВМ, сравните числа $\sqrt{37}-\sqrt{14}$ *и* $6-\sqrt{15}$.

11. Вычислите предел $\sqrt{2\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt{\ldots}}}}}$

12. Если 40% числа равны $\sqrt{\left(9-2\sqrt{23}\right)^2}+\sqrt{\left(9+2\sqrt{23}\right)^2}$, то чему равно это число?

13. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{0.(27)\cdot 2.(27)+0.(63)\cdot 1.(571428)}-1.(27)\right)^{3.5}$, используя прогрессию для обращения периодической дроби в обыкновенную.

14. Определите, рационально или иррационально число $a=\sqrt{\dfrac{7}{11}\cdot\left(4-1.(17)\right)}$.

15. Сумма корней уравнения $(x^2-4)\cdot\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{(x-3)(x-2)x(x+0.5)(x+2)}=0$ равна:

1) 4.5; 2) –4.5; 3) 3.5; 4) –3.5; 5) 2.5.

16. При каком натуральном n $(n>2)$ значение выражения

$$\left(\left(\sqrt{\frac{n+2}{n}}-\sqrt{1-\frac{2}{n+2}}\right):\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{\frac{n}{n+2}-2}\right)\right):\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+2}}\right)$$

ближе всего к 73?

17. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(6a-2x)\sqrt{3x-4}=0$ имеет ровно один корень.

18. Решите уравнение $x^3-(2\sqrt{11}-\sqrt{2})x^2+(1-2\sqrt{22})x+\sqrt{2}=0$, если известно, что произведение двух его корней равно 1.

19. Решите уравнение $\sqrt[8]{x^4}+\sqrt{-x}=10$.

20. Решите уравнение $\sqrt[4]{x^3-x}+x(x^2-4x-5)^{0.7}+(3x^2+3x)^{1.3}=0$.

21. При каких значениях параметра a уравнение $(x-2a)^{6.6}=\left((x-2a)^{1.1}-(1+3a-x)^{47}\right)^6$ не имеет корней?

22. Решите уравнение $3x+\sqrt{7-9x}=-1$.

23. Решите уравнение $\sqrt{x^2-3}+0{,}5x=0$.

24. Решите уравнение $\sqrt{x^2+x-2}=x$.

25. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{2-x}{x-1}}-7\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}=6$.

26. Решите уравнение $2\sqrt[7]{x}-13\sqrt[7]{\dfrac{1}{x}}=7x^{-3/7}$.

27. Решите неравенство $\sqrt{x^2+2x-8}>x-1$.

28. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{25+5x-2x^2}}{2x-3}\geq 0$.

29. Решите неравенство $\sqrt{16-8x+x^2}\leq\dfrac{2}{x-1}$.

30.При каких a уравнение $\sqrt{3a+x}=x-1$ имеет единственное решение. Найти это решение. Возможны три способа решения: 1)*алгебраический* с переходом к равносильной системе; 2)**графический** с построением графиков функций в левой и правой частях уравнения; 3)*комбинированный* с исследованием ***параметра, как функции аргумента x***.

31. Решите неравенство $7+2x\geq 2\sqrt{x^2+9x}+\sqrt{x}-\sqrt{x+9}$.

32. Решите уравнение $\cos x-\sin x=\sqrt{1-\dfrac{\operatorname{tg}2x}{2}}$.

33. Решите неравенство $\sqrt{5-2\sin x}\leq 6\operatorname{tg}x\cos x-1$.

34. Найдите все значения **а,** при которых каждое из уравнений $\sqrt{41+9\sin x}-a\cdot\sin x=0$ и $|x-a|+9|x+3|+5x=0$ имеет хотя бы один корень. Отв. Возможны три способа решения: 1)*алгебраический* с переходом к равносильной системе; 2)**графический** с построением графиков функций в левой и правой частях уравнения; 3)*комбинированный* с исследованием ***параметра, как функции аргумента х***.

35. Найдите все значения **а,** при которых система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+2xy+3y^2}=\sqrt{x^2-y^2};\\ \dfrac{x^6}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot(a-x)=2.\end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

Отв. $a\in\left(\dfrac{3\sqrt[3]{4}}{2};\dfrac{3\sqrt[3]{50}}{4}\right)$.

36. Найдите все значения **а,** при которых уравнение $\sqrt{1-3x}=a-|6x|$ имеет более двух корней. Отв. $a\in\left[2;\dfrac{17}{8}\right)$**.** Возможны три способа: 1)*алгебраический* с переходом к равносильной системе; 2)**графический** с построением графиков функций в левой и правой частях уравнения; 3)*комбинированный* с исследованием ***параметра, как функции аргумента х***.

37. Найдите все значения **а,** при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+a}\sin x=-\sqrt{3x+3a}\cos x$ имеет единственный корень на оотрезке $[0;1{,}5\pi]$.

Отв. $\left[-1{,}5\pi;-\dfrac{2}{3}\pi\right]$.

38. Найдите все значения параметра а, при которых система

$$\begin{cases}\dfrac{y-x^2+2x-13}{\sqrt{x-2}}=0,\\ y=3x+6-a.\end{cases}$$

имеет одно решение. Отв. $(-\infty;-1]\cup\{-0{,}75\}$.

39. Найдите все неотрицательные значения а, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(y-a)^2+x^2}=\sqrt{a^2+4}\\ 5y=\left|6-a^2\right|\end{cases}$$

имеет единственное решение. Отв. $a\in[1;6]$.

40. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $x^2+ax+3=\sqrt{15x^2+6ax+3}$ имеет ровно три различных корня. Отв. $[-4;-3)\cup(-3;3)\cup(3;4]$.

41. При каких значениях параметра а уравнение $x=\sqrt{\sqrt{x-a}-a}$ имеет единствнное решение? Отв. $a\in\{0{,}25\}\cup(-\infty;0)$. Возможны три способа решения: 1)*алгебраический* с переходом к равносильной системе; 2)**графический** с построением графиков функций в левой и правой частях уравнения; 3)*комбинированный* с исследованием ***параметра, как функции аргумента x***.

42. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{3^{x^2+4}-9^{2x}}<\dfrac{\sqrt{x+7}}{3^{x^2+4}-81^{x}}$. Отв. $x\in(-2;2)\cup(2;3)$.

Используйте **приём рационализации**.

43. Решите неравенство $\sqrt{x^2-x-2}>\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Отв. $x\in(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$.

44. Известно, что $1-\sqrt{3}$ является корнем уравнения $x^3+ax^2+bx+b+2=0$ ($a,b\in Z$). Найдите значения a,b и остальные корни уравнения.

45.Сократите дробь $\sqrt{\dfrac{x-7}{x+3}}\cdot\dfrac{-x^2+(x-3)\sqrt{x^2-4x-21}+9}{x^2-(x+7)\sqrt{x^2-4x-21}-49}$.

46.Найдите все целые значения выражения

$$3\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cos^3 2x+4\cos^2 x+\cos 4x-7}{12\,(\cos 2x-1)}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

47. **Решите историческую задачу индийского математика Брамагупты (598-600):** четырёхугольник ABCD с длинами сторон a,b,c,d вписан в окружность. Найдите его углы и площадь. Подсказка: выразите BD двумя способами по теореме косинусов и воспользуйтесь тем, что сумма углов A ,C равна 180^0. Сумма площадей треугольников DBC, DAB равна площади четырёхугольника, окончательная формула напоминает формулу Герона Александрийского.

48.Решите уравнение $\sqrt{x+5}+\sqrt{-x-3}=x^2+8x+18$.Отв.-4.

49. Решите уравнение $\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(x^2-2x-2\right)=\log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2-2x-3\right)$. Отв. $1\pm\sqrt{11+4\sqrt{3}}$.Тк.с.412.

50. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{1-2x\sqrt{1-x^2}}{2}}+2x^2=1$.

Отв. $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Тк.с.420.

51.Найдите все натуральные значения параметра n>1, при которых отрезок длины n является областью определения функции $y=\sqrt[n]{\left(12-nx\right)^{3n+1}\left(x-7\right)^{2n-1}}$.

52. Решите систему уравнений $\begin{cases}\left(x\right)^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}}=y^{\frac{8}{3}};\\ \left(y\right)^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}}=x^{\frac{2}{3}}.\end{cases}$

53. Решите неравенство $1-2^{x+2}+7\cdot 2^{2x}<2^{x+2}\cdot\sqrt{1-2^{x+2}+2^{2(x+1)}}$.

54.Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{y}}+\dfrac{y}{\sqrt{x}}=xy;\\ x^a+y^a=8\left(xy\right)^{\frac{a-3}{2}}\end{cases}$.

Отв. $x=y=\sqrt[3]{4}$. Подсказка: используйте неравенство Огюстена Коши.

55. Решите уравнение $\dfrac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}}+\dfrac{1}{4\cdot\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)}=1$ **.Отв.** $\pm\dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

Подсказка: используйте неравенство О.Коши.

56. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2-\frac{2x}{\sqrt{\sin a}}-\frac{1}{\cos a}-2\sqrt{2}=0$ имеет единственное решение.

Отв. $\frac{7\pi}{12}+2\pi k;\quad k\in Z$.

57.Дано: $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[5]{y}+5\sqrt[7]{z}=19,\quad 2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[5]{y}-7\sqrt[7]{z}=-37$ Вычислите значение выражения $-8\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{y}+11\sqrt[7]{z}$.

58.Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+(y-7)^2}+\sqrt{(x-7)^2+(y+1)^2}=10,\\ 2x+3y=17\end{cases}$

59. (ЕГЭ2008). Для чисел $a_1,a_2,a_3,...,a_{99}$ верны равенства $a_{n+1}=f(a_n)$, n=1,2,…98. Найдите $a_{33}+a_{40}$, если известно, что $a_{99}=0$ и

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2x+8}{x-2}, x<2;\\ \sqrt[5]{\frac{x-5}{x-1}}+\sqrt{\frac{8x-7}{2x+3}}; x\ge 2.\end{cases}$$

Отв.-4.

60.Решите уравнение $8\sqrt{12+16x-16x^2}+4x-4x^2=33$. Отв.0,5.

61.Найдите такое значение x из отрезка $[-3;0]$, что точка с абсциссой x и ординатой $y=\sqrt{5-6x-\frac{7}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3}$ удалена на наименьшее расстояние от начала координат. Отв.-2.

62.Решите уравнение
$\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}$. Отв.7.

63.Решите уравнение $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{6x-1}=\sqrt[3]{2x+1}$.

64. Найдите длину наибольшего отрезка оси абсцисс, на котором совпадают графики функций $f(x)=3-\sqrt{x-3+2\sqrt{x-4}}$ и $g(x)=\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}$. Отв. отрезок имеет длину 4.

Подсказка: выделите полные квадраты в подкоренных выражениях.

65. Найдите многочлен $p_n(x)$ с целыми коэффициентами, обращающийся в нуль при $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$. Отв. $p_{10}(x)=p_4(x)\cdot p_6(x)$, где

$p_4(x)=x^4-10x^2+1;\ \ p_6(x)=x^6-6x^4+12x^2-36x+1;$

66. Решите уравнение

$$\sqrt{4-x^2}+\sqrt{4x+1}+\sqrt{x^2+y^2-2y-3}=\sqrt{x^4-16}-y+5.$$

Отв. (2;1,5).

67.Какое из чисел больше и на сколько:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2026}+\sqrt{2027}} \quad \text{или} \quad \sqrt{2026}\ ?$$

68. Равносторонние треугольники со сторонами 1,3,5, …,(2n-1),… Расположены вдоль оси абсцисс, начиная от точки О (основания треугольников лежат на прямой так, что правая точка основания предыдущего треугольника совпадает с левой точкой основания последующего). Докажите, что все их вершины, не лежащие на этой прямой, лежат на параболе. Подсказка: B_n - n-ая вершина треугольника имеет координаты

$$B_n\left(1+3+\ldots(2n-3)+0{,}5(2n-1);\quad (2n-1)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$B_n\left((n-0{,}5)^2+0{,}25;\quad (2n-1)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=B_n\left((n-0{,}5)^2+0{,}25;\quad (n-0{,}5)\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

Что даёт $x=\frac{1}{3}y^2+\frac{1}{4}$.

69. Решите уравнение $\sqrt[3]{(x+1)^2}-2\sqrt[3]{x^2-1}=8\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Подсказка: выделите полный квадрат и извлеките квадратный корень.

70. Решите уравнение $\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{b-x}=\sqrt[4]{a+b-2x}$.

Подсказка: возможено двукратное возведение в квадрат и замена переменной.

71.МГУ ВМК 2001. Функция определена, убывает и отрицательна на всей числовой прямой. Решите неравенство

$$\frac{4\cdot f\left(2x\sqrt{x+9}\right)+\left|f\left(2x\sqrt{x+9}\right)-5\cdot f\left(x^2+x-40\right)\right|}{\left(5\cdot f\left(2x\sqrt{x+9}+9\right)-4\cdot f\left(2x\sqrt{x+9}\right)\right)^{17}}>0$$

Отв. $\left(-5; \dfrac{\sqrt{57}+15}{2}\right)$.

72.Решите неравенство $\sqrt{4x-x^2-3} \geq \sqrt{x^2-7x+12} - \sqrt{x^2-5x+6}$. Отв.3.

73.Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 2\sqrt{x^2-1} + y^2 = 3; \\ 3(x-y) + \dfrac{2y}{\sqrt{x^2-1}-x} + 3y^2 = 0. \end{cases}$$

Отв: $\left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{9+\sqrt{21}}{6}\right); \left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{9-\sqrt{21}}{6}\right)$.

Если Бог хочет сделать тебя счастливым, он ведёт тебя трудной дорогой, потому что лёгких путей к счастью не бывает. Омар Хайям, известный математик.

Вариант 4

1. Для многочлена $P_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5$ вычислите $P_3\left(2+\sqrt{3}\right) + P_3\left(2-\sqrt{3}\right)$. Этот пример можно обобщить, доказав, что значение выражени $P_3\left(a+\sqrt{b}\right) + P_3\left(a-\sqrt{b}\right)$ является целым числом для натуральлных чисел a,b, при условии, что b не является квадратом целого числа. Как это доказать?

2. Вычислите $\dfrac{\sqrt[6]{392} - \sqrt[3]{7}}{\sqrt[6]{1323}} \cdot \dfrac{\sqrt{192}}{1+\sqrt{2}} : \dfrac{3\cdot\sqrt[3]{3} - 2\cdot\sqrt[6]{72}}{\sqrt[3]{3}}$.

3. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1}$

4. Представьте данное выражение в виде квадрата двучлена: $2{,}25 - \sqrt{2}$

5. Докажите, что данное число является целым и найдите его значение: $\dfrac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}} - \dfrac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$

6. Упростите выражение $\left(\dfrac{\left(a^{\frac{3}{4}} - b^{\frac{3}{4}}\right)\left(a^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \sqrt{ab}\right) \cdot 2(a+b)^{-1}$

7. Упростите выражение $\dfrac{a\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+b\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{a+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}+\left(\dfrac{b+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}}$

8. Докажите иррациональность числа $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

9. Приведите пример иррационального числа, заключенного между числами 3 и 3,01.

10. Вычислите предел $\sqrt{11\cdot\sqrt{19\cdot\sqrt{11\cdot\sqrt{19\cdot\sqrt{\ldots}}}}}$

11. Если 10% числа равны $\dfrac{2\sqrt[3]{875}-3\sqrt[3]{576}}{\sqrt[3]{7}}$, то чему равно это число?

12. Найдите значение выражения $\sqrt{0.(428571)\cdot 2.(428571)+0.75\cdot 1.(3)}+0.(571428)$, используя прогрессию для обращения периодической дроби в обыкновенную.

13. Определите, рационально или иррационально число $a=\sqrt{11\cdot\left(1-0.(18)\right)}$.

14. Сумма корней уравнения $(x^2+5x+6)\cdot\sqrt{(x-4)(x-3)x(x+0.5)(x+1.5)}=0$ равна:
1) 0; 2) -1; 3) 1; 4) 5; 5) -5.

15. При каком натуральном n значение выражения
$\sqrt{\dfrac{n-3}{n+1}}\cdot\dfrac{1+(n-1)\cdot\sqrt{n^2-2n-3}-n^2}{n^2-(n+3)\cdot\sqrt{n^2-2n-3}-9}$ ближе всего к 0.66?

16. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение
$(7a-3x)\cdot\sqrt{4x-5}=0$ имеет ровно один корень.

17. Решите уравнение $x^3+(\sqrt{3}-2\sqrt{7})x^2+(1-2\sqrt{21})x+\sqrt{3}=0$, если известно, что произведение двух его корней равно 1.

18. Решите уравнение $\sqrt[10]{x^5}+\sqrt[5]{-x}=2$.

19. Решите уравнение. $\sqrt[6]{4x-x^3}+x\cdot(x^2-5x-14)^{1.44}+(x^2+2x)^{1.22}=0$.

20. При каких значениях параметра a уравнение $(x+a)^{2.7}=\left((x+a)^{0.9}+(x+6-a)^{0.4}\right)^3$ не имеет корней?

21. Решите уравнение $1+\sqrt{7-6x}=-2x$.

22. Решите уравнение $x+\sqrt{4x^2-3}=0$.

23. Решите уравнение $\sqrt{10-x-x^2}=x+1$.

24. Решите неравенство $x<\sqrt{x+30}$.

25. Решите уравнение $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}}-3\sqrt{\frac{2+x}{3-x}}=2$.

26. Решите уравнение $5\sqrt[5]{x}-14\sqrt[5]{\frac{1}{x}}=3x^{-3/5}$.

27. Решите неравенство $\sqrt{x^2-x-6}>x-2$.

28. Решите неравенство $\frac{\sqrt{10+x-2x^2}}{2x+2}\ge 0$.

29. Решите неравенство $\sqrt{4+4x+x^2}\le\frac{1}{2-x}$.

30. При каких a уравнение $\sqrt{x+a}=x+1$ имеет единственное решение? Найдите это решение.

31. Решите неравенство $2\sqrt{x^2+3x}\ge 9-2x-\sqrt{x}-\sqrt{x+3}$.

32. Решите уравнение $\sin x-\cos x=\sqrt{1+\frac{\operatorname{tg}2x}{2}}$.

33. Решите неравенство $\sqrt{19-12\sin x}\le 6\operatorname{tg}x\cos x-1$.

34. Найдите все значения x, которые удовлетворяют неравенству $\sqrt{ax^2+2x}<x+3$ при любом значении параметра **a**, принадлежащему отрезку $[0;1]$. Отв. $x\in[0;+\infty)$. Возможны три способа: 1)*алгебраический* с переходом к равносильной системе; 2)**графический** с построением графиков функций в левой и правой частях уравнения; 3)*комбинированный* с исследованием ***параметра, как функции аргумента х***.

35. Найдите все неотрицательные значения а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(y-a)^2+x^2}=\sqrt{a^2+9}\\ y=\left|2-a^2\right|\end{cases}$ имеет единственное решение. Отв. $a\in[1;2]$.

36. При каких значениях параметра а любое решение уравнения $5\cdot\sqrt[3]{9x-18}+7\log_3(2x-1)+4a=0$ принадлежит отрезку $[2;5]$?

Отв. $a\in\left[-\frac{29}{4};-\frac{7}{4}\right]$.

37. Найдите все значения параметра а, при которых система $\begin{cases} y=\sqrt{-x^2+2x+3}, \\ y=ax-3x-6a+20 \end{cases}$ имеет одно решение. Отв. $\left(\frac{23}{7};\frac{11}{3}\right]\cup\{3\}$.

38.Найдите все значения а, при которых система $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+64+16x}+\sqrt{x^2+y^2+36-12y}=10, \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases}$ имеет два решения.

Отв. $a\in[-6;-4{,}8)\cup(4{,}8;6]$.

39.Решите уравнение $\sqrt{x+10+6\sqrt{x+1}}+\sqrt{5-x+2\sqrt{4-x}}=7$. Отв. 0;3.

40. Решите уравнение $\sqrt[n]{a^k\cdot x^{n-k}}+\sqrt[n]{x^k\cdot a^{n-k}}=2\sqrt{bx}$, где n- положительное нечётное число, a>0, b>0, k – натуральное.

Отв. Если b<a, то корень один x=0. Если $b\geq a$, то корней два: x=0 и

$$x=\frac{\left(\sqrt{b}\pm\sqrt{b-a}\right)^{\frac{2n}{n-2k}}}{a^{\frac{2n}{n-2k}}}.$$

41. Найдите все значения **а,** при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+4a}\cdot\cos x=\sqrt{3}\cdot\sqrt{x+4a}\sin x$ имеет единственный корень на оотрезке $[0;\pi]$. Отв. $\left[-0{,}25\pi;-\frac{1}{24}\pi\right]\cup(0;+\infty)$.

42. Найдите сумму членов бесконечной числовой последовательности

$$30;\quad \frac{60}{\sqrt{5}+\sqrt{3}};\quad 30\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2;\quad \frac{60\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}};,....$$

Отв. $\frac{30}{1-\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

43.В уравнении $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x...}}}=2022$ число радикалов бесконечно. Найдите, чему равен x. Указание: можно использовать подстановку или суммирование бесконечно убывающей прогрессии.

44. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x}}(3-x)^6 \le 24.$ Отв. $x\in(0;1)\cup\left[\frac{\sqrt{13}-1}{2};3\right)\cup(3;+\infty)$. Используйте **приём рационализации**.

45. Решите неравенство $\sqrt{1-x^2}+1<\sqrt{3-x^2}$.

Отв. $x\in\left[-1;\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right]$.

46. Для функции $f(x)=\sqrt[5]{x^3(12-x)^3}$, $x\in(0;6)$ докажите равенство $f(x+6)\cdot f(-x+6)=f^2(-x+6)=f^2(x+6)$. Найдите значение выражения $\left(f(x+6)\cdot f(-x+6)\right)^5$ при $x=\sqrt{35}$.

47. Найдите $f(x)$, если $2f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=\sqrt{x}$.

48. Используя график и кусочную монотонность функции, найдите ее наибольшее значение: $y=2x-\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{4x^2+20x+25}$.

49.**Решите историческую задачу Ал-Каласади(?-1486) из трактата «Раскрытие тайн науки Гобар»:** доказать, что $\sqrt{m+\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{m}{2}+\sqrt{\frac{m^2}{4}-\frac{n}{4}}}+\sqrt{\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{m^2}{4}-\frac{n}{4}}}$. Ал-Каласади - мавританский математик, работал в Гренаде, позже в Тунисе, в своем труде по арифметике и алгебре применял настолько разработанную алгебраическую символику, что опередил в этом современных ему математиков Европы. Математики писали формулы на песке, отсюда происходит название книги, по-арабски, *гобар- это пыль, песок*.

49.Решите уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt{-x+4}=x^2-6x+11$.Отв.3.

50. Решите уравнение $x^5+x=\sqrt[3]{x-7}$.Отв.-1. Тк.с.433 .

51.Решите неравенство $1-\sqrt{0{,}5+\log_3 \sin x-\log_3 \cos x}>0$.Отв. $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right]$.

52. Найдите все положительные значения параметра m, при которых число 2 не входит в область определения функции $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{m^{2m^2x+5x}-m^{11mx+10}}}$ **.**

53. Решите неравенство$1-4\cdot 7^{x-1}+7^{2x-1}<\frac{4}{7}\sqrt{4-4\cdot 7^x+7^{2x}}$.

54. Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2x-1}{y+2}}+\sqrt{\dfrac{y+2}{2x-1}}=2;\\ x+y=12.\end{cases}$

Отв. $x=5; y=7$. Можно использовать неравенство О.Коши.

55. Решите уравнение $\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}=x^2+x+1$ **.**

Отв. $\varnothing$**. Подсказка: используйте неравенство О.Коши.**

56. Точка А лежит на графике функции $y=f(x)$, точка В – на оси ОХ и её абсцисса в четыре раза больше ординаты точки А. Найдите наибольшее значение площади треугольника АОВ, где точка О – начало координат и

$f(x)=\sqrt{7+3\sin x-(3x+1)\cos x},\quad x\in\left[\frac{3}{4}\pi;\frac{9}{8}\pi\right]$. Отв. **6** π +16.

57. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых неравенство $\dfrac{\left(2^x+3\sqrt{2}\cdot 2^{-x}-5\right)-a}{a-\left(2\sin\sqrt{x-1}-3\right)}\le 0$ не имеет решений.

Отв. $a \in [-5;-1] \cup [-1;2\sqrt[4]{18})$.

58. Найдите все корни уравнения $\left(5-x^2\right)^{-0.5} \cdot \left(\cos\left(\pi \cdot 3^x\right)+1\right)=0$.

Отв. 0; 1; $\log_3 5$; $\log_3 7$; 2; $\log_3 11$.

59. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $x^2+\frac{6x}{\sqrt{\sin a}}+\frac{9\sqrt{3}}{\cos a}+36=0$ имеет единственное решение.

Отв. $\frac{\pi}{18}+2\pi n, n \in Z.$ $\frac{13\pi}{18}+2\pi k, k \in Z.$ $\frac{5\pi}{6}+2\pi l, l \in Z.$

60. Решите уравнение:

$f\left(f(x)\right)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{x}}$, если $f(x)=\frac{1}{1-\sqrt{x}}$.

61. (ЕГЭ2008). Для чисел $a_1, a_2, a_3, ..., a_{99}$ верны равенства $a_{n+1}=f\left(a_n\right)$, n=1,2,…98. Найдите $a_{43}+a_{50}$, если известно, что $a_{99}=0$ и

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2x+8}{x-2}, x<2; \\ \sqrt[5]{\frac{x-5}{x-1}}+\sqrt{\frac{8x-7}{2x+3}}; x \geq 2. \end{cases}$$

Отв.-4.

62.Решите уравнение $6\sqrt{45+54x+81x^2}+6x+9x^2=35$. Отв.$-\frac{1}{3}$.Подсказка: используйте подстановку.

63.Найдите такое значение x из отрезка $[-3;1]$, что точка с абсциссой x и ординатой $y=\sqrt{9+3x+x^2+\frac{1}{3}x^3}$ удалена на наименьшее расстояние от начала координат. Отв.-1.

64.Решите уравнение

$\sqrt{(x+5)(2x+4)}-2\sqrt{x+3}-2=-\sqrt{(x+3)(2x+4)}+2\sqrt{x+5}$. Отв.1.

65.Решите уравнение $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x}=2$.

66.Найдите множество значений функции $y=\sqrt{6x-7}-2x$.

Отв. $\left(-\infty;-1\dfrac{7}{12}\right)$.

67. Найдите длину наибольшего отрезка оси абсцисс, на котором совпадают графики функций $f(x)=4-\sqrt{x+5+2\sqrt{x+4}}$ и $g(x)=\sqrt{x+13-6\sqrt{x+4}}$.

Отв. отрезок $[-4;5]$имеет длину 9.

Подсказка: выделите полные квадраты в подкоренных выражениях.

68. Решите неравенство $\sqrt[3]{x-a}+\sqrt[3]{x-b}+\sqrt[3]{x-c}\le 0$, где $a,b,c\in R$. Отв. $x\le x_0$,где $x_0=6\cdot\dfrac{\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3-abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$. Если a=b=c, то $x_0=a$. Подсказка: исследуйте функцию $f(x)=\sqrt[3]{x-a}+\sqrt[3]{x-b}+\sqrt[3]{x-c}$ на монотонность и решите уравнение $f(x)=0$.

68. Вычислите $\sqrt{111...1-222...2}$ где единица записана 2026 раз, двойка записана 1023 раза. Отв. $\dfrac{10^{1023}-1}{3}$. Подсказка: разложите данные числа в сумму разрядных единиц и просуммируйте геометрическую прогрессию.

69.Диагонали делят трапецию на четыре треугольника. Пусть S- площадь трапеции, S_1,S_2 - площади треугольников, которые примыкают к основаниям трапеции. Докажите, что $\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$.

70.Решите уравнение $\left(x+2-2\sqrt{x+1}\right)^{0,5}+\left(x+5-4\sqrt{x+1}\right)^{0,5}=1$. Отв. $[0;3]$

71. Решите уравнение $\sqrt[4]{100-x}+\sqrt[4]{x-18}=4$. Отв.99;19.

72. Решите уравнение $\dfrac{2x+5}{3x+8}=\dfrac{3+2\sqrt{x^2+3x-4}}{5+3\sqrt{x^2+3x-4}}$. Отв.5.

73.Решите неравенство $\sqrt{10x-x^2-24} \ge \sqrt{x^2-13x+42}-\sqrt{x^2-11x+30}$.
Отв.6.

74.Решите систему уравнений (МГУ мехмат):

$$\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y}=2\sqrt{3}; \\ (x+y)\cdot 2^{y-x}=3. \end{cases}$$ Отв:(7;5).

Решение. ОДЗ $x+y\ge 0; x-y\in N$. Умножим второе уравнение на 2^{-y+x}, получим $x+y=3\cdot 2^{-y+x}$, подставим это выражение в первое уравнение:

$$\begin{cases} \sqrt[x-y]{3\cdot 2^{-y+x}}=2\sqrt{3}; \\ x+y=3\cdot 2^{-y+x}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[x-y]{3}\cdot 2=2\sqrt{3}; \\ x+y=3\cdot 2^{-y+x}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=2; \\ x+y=3\cdot 2^{-y+x}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=2; \\ x+y=12. \end{cases}$$

Отв:(7;5).

Если Бог хочет сделать тебя счастливым, он ведёт тебя трудной дорогой, потому что лёгких путей к счастью не бывает. Омар Хайям, известный математик.

Вариант 5

1. Для многочлена $P_3(x)=2x^3-3x^2+4x+5$ вычислите $\dfrac{P_3\left(2+\sqrt{5}\right)-P_3\left(2-\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{5}}$.

Этот пример можно обобщить, доказав, что значение выражени $\dfrac{P_3\left(a+\sqrt{b}\right)-P_3\left(a-\sqrt{b}\right)}{2\sqrt{b}}$ является целым числом для натуральлных чисел a,b, при условии, что b не является квадратом целого числа. Как это доказать?

2. Упростите выражение $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt[3]{2}\right)^4}\cdot\left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)$

3. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}+4}$

4. Представьте данное выражение в виде квадрата двучлена: $51-7\sqrt{8}$

5. Докажите, что данное число является целым и найдите его значение: $\frac{\sqrt{5-2\sqrt{7}}}{\sqrt{53-20\sqrt{7}}}-\frac{\sqrt{5+2\sqrt{7}}}{\sqrt{53+20\sqrt{7}}}$.

6. Упростите выражение $\frac{1}{\left(\frac{3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}}-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}\right)}-\frac{1}{\left(\frac{1-2x}{3x-2}\right)}$.

7 Упростите выражение $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}\right)^{-2}-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}\right)^{-2}$

8. Докажите иррациональность числа $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

9. Приведите пример иррационального числа, заключенного между числами 3,1415 и 3,1415926.

10. Вычислите предел $\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[3]{\ldots}}}}}$

11. Если $\sqrt{3-t}-\sqrt{2-t}=1$, то чему равно $\sqrt{3-t}+\sqrt{2-t}$?

12. Найдите значение выражения $\left[\left(\sqrt{3.(63)\cdot 5.(63)+0.(7)\cdot 1.(285714)}-3.(63)\right)\right]^{11}$, используя прогрессию для обращения периодической дроби в обыкновенную.

13. Определите, рационально или иррационально число $a=\sqrt{\frac{11}{7}\cdot\left(2-0.(23)\right)}$.

14. Сумма корней уравнения $(x+1)(x+2)(x+3)\cdot\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)x(x+1.5)(x+2.5)}=0$ равна:

1) -5; 2) -3; 3) 3; 4) 5; 5) 3.5.

15. При каком натуральном n значение выражения

$\sqrt{\frac{n-7}{n+3}}\cdot\frac{9+(n-3)\cdot\sqrt{n^2-4n-21}-n^2}{n^2-(n+7)\cdot\sqrt{n^2-4n-21}-49}$ ближе всего к 0.7?

16. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(8a-4x)\sqrt{5x-6}=0$ имеет ровно один корень.

17. Решите уравнение $x^3-(3+\sqrt{2})x^2+(1+3\sqrt{2})x-\sqrt{2}=0$, если известно, что произведение двух его корней равно 1.

18. Решите уравнение $\sqrt[6]{x^2}-2\cdot\sqrt[3]{-x}=3$.

19. Решите уравнение $(x^2-4)^{0.6}=2-x-x^2$.

20. При каких значениях параметра a уравнение $(x-a)^{3.4}=\left((x-a)^{1.7}-(\pi-a-x)^{2.4}\right)^2$ не имеет корней?

21. Решите уравнение $2-x-\sqrt{x+10}=0$.

22. Решите уравнение $x+\sqrt{4x^2-6}=0$.

23. Решите уравнение $\sqrt{5-x^2}=x-1$.

24. Решите неравенство $\sqrt{x^2-1}>x$.

25. Решите неравенство $\sqrt{1-x}-5\sqrt[4]{1-x}<6$.

26. Решите уравнение $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$.

27. Решите неравенство $\sqrt{2x-3}-4<\sqrt{4x+1}$.

28. Решите неравенство $\dfrac{|x^2-6x+5|}{x^2-6x+5}\sqrt{x^2-9}\geq 0$. Постройте график функции $y=|x^2-6x+5|$.

29. Решите уравнение $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1$.

30. Решите неравенство $\sqrt{x-4}\leq 3-|x-7|$.

31. Решите неравенство $\sqrt{49-\dfrac{49}{x}}<x-\sqrt{x-\dfrac{49}{x}}$.

32. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{\cos x}}{8+7x-x^2}\geq 0$.

33. Решите уравнение $\sqrt{(x-8)\cos x}=\sqrt{\dfrac{\cos x}{x-8}}$.

34. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\ln(5x-3)\cdot\sqrt[2]{x^2-4x+4a-4a^2}=0$ имеет ровно один корень, принадлежащий отрезку $[0;2]$.

Отв. $a\in\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right]\cup\left[\frac{16}{5};\frac{17}{5}\right)$.

35. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} ax\ge 5, \\ a<\sqrt{x-1}, \\ 3x\ge a+2 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение, принадлежащее отрезку $[4;5]$.

Отв. $a\in[1;2)$.

36. Найдите все значения **а,** при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \left(x^2-2y^2-xy-5x+10y\right)\sqrt{5-y}=0; \\ x+y-a=0. \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

Отв. $a\in(-\infty;5)\cup(5;15)$.

37. Найдите все значения параметра а, при которых система $\begin{cases} \dfrac{y-x^2+6x-2}{\sqrt{x-4}}=0, \\ y=4x-10+a. \end{cases}$

имеет одно решение. Отв. $[-13;+\infty)\cup\{-13\}$.

38.Для каждого значения а решите систему $\begin{cases} \sqrt{x^2+a^2+100-16x-12a}+\sqrt{x^2+a^2+104+4x-20a}=2\sqrt{29}, \\ x^2+a^2-14x-10a+58=0 \end{cases}$ имеет два решения.

Отв. при а=$\dfrac{180+2\sqrt{415}}{29}\Rightarrow x=\dfrac{217-52\sqrt{415}}{29}$.

39.Найдите все а, при которых уравнение $\sqrt{\sqrt{x}+a}=x-a$ имеет два корня. Отв. $a\in(-0{,}25;0]$. Возможны три способа: 1)*алгебраический* с переходом к равносильной системе; 2)**графический** с построением графиков функций в левой и правой частях уравнения; 3)*комбинированный* с исследованием ***параметра, как функции аргумента х***.

40. Решите уравнение $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$.
Отв. 15.

41. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt[n]{x+a}}{a}+\dfrac{\sqrt[n]{x+a}}{x}=\dfrac{\sqrt[n]{x}}{b}, a>b>0.$

Отв. $x=\dfrac{a}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}-1}$.

42.В уравнении $\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x....}}}=2022$ число радикалов бесконечно. Найдите, чему равен x. Указание:можно использовать подстановку или суммирование бесконечно убывающей прогрессии. Отв. 4088484.

43. Решите уравнение $3x^2+5\sqrt{3x^2-5x-12}=48+5x.$

Отв. $\left\{-\dfrac{7}{3};4\right\}$

44. Решите неравенство $\dfrac{(|x-5|-x)(|x-2|-\sqrt{x^2+1})}{\log_x 2x-\log_x 5}\geq 0.$ Отв. $x\in(0;0{,}75]\cup(1;2{,}5)\cup(2{,}5;+\infty)$. Используйте **приём рационализации**.

45. Решите неравенство $\sqrt{x^2+4x-5}<10-2x$ двумя способами: алгебраическим; геометрическим.
Отв. $x\in[1;3)\cup(-\infty;-5]$.

46. Найти все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $a|x+8|+(2-a)|x-8|+6=0$ имеет ровно два различных решения.

Отв. $\left(-\infty;-\dfrac{3}{8}\right)\cup\left(2\dfrac{3}{8};+\infty\right)$.48. 47. Используя график и кусочную монотонность функции, найдите ее наибольшее значение: $y=2x-\sqrt{x^2-10x+25}-\sqrt{4x^2+12x+9}$.

48.Дана система неравенств $\begin{cases} ax\leq 8; \\ x^2\leq a+8; \\ x^2+(a+6)^2\geq 4{,}25^2 \end{cases}$.При каждом значении параметра а решения системы принадлежат отрезкам, параллельным оси OX в системе координат ХОА. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых множество решений системы есть отрезок наименьшей длины в КПП ХОА. Отв. а=-1,75; а=8.

49.Решите историческую задачу Ариабхаты (**АРИАБХАТА** (Aryabhata) (476—550), яркий представитель индусской математики в эпоху ее расцвета, один из родоначальников современной алгебры. Его именем назван кратер на Луне и первый индийский спутник. Ариабхата не только составляет и решает уравнения 1-й и 2-й степени, но, пользуясь для обозначения известных и неизвестных величин сокращенными обозначениями и наименованиями, иногда проставляет даже между ними знаки для обозначения действий. Уточнил тригонометрические таблицы синусов. Так, он пользуется точкой для обозначения вычитания, даже в том случае, когда вычитаемое больше уменьшаемого. В своём трактатет он дает формулы для суммирования арифметической прогрессии, формулы для суммы квадратов: $1^2+2^2+3^2+\ldots n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; для суммы кубов, а также формулу для числа членов арифметической прогрессии по известной сумме, разности и первому члену: $n=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{-2a_1+\sqrt{(d-2a_1)^2+8S_n\cdot d}}{d}\right)$; **ПРОВЕРЬТЕ справедливость формулы Ариабхаты**, которую он сформулировал словесно.

50.Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x+2y}=10;\\ \sqrt{x+y}+2x+y=16.\end{cases}$ (МФТМ2002). Отв. (-4;20).

51. Решите уравнение $3x-2|x-2|=3\sqrt{3x+18}-2\left|\sqrt{3x+18}-2\right|$. МГУ, мехмат, 2001. Отв.6.

52.Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases}9x^3+18x^2+17x+20=0;\\ 2+(10+3x)^{y-1}\cdot\left(y+2+\dfrac{5}{x}\right)=\\ y+11^{x-2y}\cdot\sqrt{9x^2(x+4)+3(x+7)^2+13x-122}\end{cases}$$

не имеет решений.

53.Решите неравенство $\sqrt{x^2+5x-14}+\sqrt{x^2-8x+7}\ge\sqrt{2x^2-7-3x}$.

54.Найдите значения параметров a,b при которых решением неравенства $\sqrt{x+5}\ge ax+b$ является отрезок $\left[-\sqrt{2};\sqrt[3]{3}\right]$.

55.Решите уравнение $\sqrt{x+1}+\sqrt{-x+7}+\cos 2\pi x=5$.Отв.3.

56.Найдите все натуральные значения параметра n>1, при которых отрезок длины n является областью определения функции $y=\sqrt[n]{(2n-x)^{2n+1}\cdot(4x-5n+6)^{2n+7}}$.

57. Решите неравенство $2^{2x}-4\cdot 6^{x}+7\cdot 3^{2x}<3^{x}\cdot\sqrt{2^{2x-2}-6^{x}+3^{2x}}$.

58.Решите уравнение $\frac{x+1}{2x-3}+\frac{x-3}{3x-2}=2\cdot\sqrt{\frac{x^2-2x-3}{6x^2-13x+6}}$.
Отв.-11. Подсказка: используйте неравенство О.Коши.

59. **Решите уравнение:**

$f(f(x))=1+\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$, если $f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{x}}$.

60. (ЕГЭ2008). Для чисел $a_1,a_2,a_3,...,a_{99}$ верны равенства $a_{n+1}=f(a_n)$, n=1,2,…98. Найдите $a_{73}+a_{80}$, если известно, что $a_{99}=0$ и

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2x+8}{x-2}, x<2;\\ \sqrt[5]{\frac{x-5}{x-1}}+\sqrt{\frac{8x-7}{2x+3}}; x\geq 2.\end{cases}$$

Отв.-4.

61. Решите уравнение $7\sqrt{20+16x+16x^2}+4x+4x^2=27$. Отв.$-\frac{1}{2}$.Подсказка: используйте подстановку.

62. Найдите такое значение x из отрезка $[1;3]$, что точка с абсциссой x и ординатой $y=\sqrt{12-2x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3}$ удалена на наименьшее расстояние от начала координат. Отв.2.

63. Решите уравнение

$\sqrt{(x+4)(2x+3)}-3\sqrt{x+8}=4-\sqrt{(x+8)(2x+3)}+3\sqrt{x+4}$.

Отв.5.

64. Вычислите сумму $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2026}+\sqrt{2027}}=$

Отв. $\sqrt{2027}-1$.

65. При каком значении х последовательность образует геометрическую прогрессию? Отв.14.

66. Решите уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}+2\sqrt{(x-2)(x+6)}=2(8-x)$. Отв 3.

67. Решите уравнение $\sqrt[3]{2x+3}+\sqrt[3]{3x-1}=\sqrt[3]{5x+2}$. Отв. $-\frac{3}{2};\frac{1}{3};-\frac{2}{5}$

68. Решите уравнение $\log_{x^4}\left(6x^2-5x\right)^4=3+\sqrt{\log^2{}_x(6x-5)-4\log_x\frac{6x-5}{x}}$.

Отв. $\left(\frac{5}{6};1\right)\cup(1;5]$. Подсказка: упростите подкоренное выражение, уравнение примет вид:

$f(x)=\sqrt{f^2(x)}$.

69. Найдите множество значений функции $y=3x+\sqrt{7-2x}$.

Отв. $\left(-\infty;10\frac{2}{3}\right]$.

70. Исследуйте функцию $y=\sqrt{x+2\left(1+\sqrt{x+1}\right)}+\sqrt{x+2\left(1-\sqrt{x+1}\right)}$ и постройте её график. Отв. $y=\begin{cases}2, x\in[-1;0]\\ 2\sqrt{x+1}, x>0\end{cases}$.

71. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых наибольшее значение функции $y=\left(a+2-\log_2\left(2+3\sqrt{4x-x^2}\right)\right)\log_2\left(2+3\sqrt{4x-x^2}\right)+a^2-3a+1$ равно 3. Отв. $\{1-\sqrt{2};2\}$. Подсказка: исследуйте, при каких а функция

$y=(a+2-t)t+a^2-3a+1$ принимает наибольшее значение, равное 3 на отрезке $[1;3]$.

72. При каждом значении параметра а решите неравенство $x^3-(a+1)x+\sqrt{a+1}\le 0$. Подсказка: корнями многочлена являются $x_1=\sqrt{a+1};\ x_{2,3}=\dfrac{-\sqrt{a+1}\pm\sqrt{a+5}}{2}$.

73. Докажите, что формулу Герона Александрийского $S_\Delta=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ можно преобразовать к виду $S_\Delta=\dfrac{1}{4}\cdot\sqrt{2\left(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right)-a^4-b^4-c^4}$. Вычислите S_Δ при а=3, $b=\sqrt{10};c=2\sqrt{2}$.

74. Для функции $y=1+\sqrt{9-\sqrt{2x^2+6\sqrt{2}x+9}}$ найдите область определения и множество значений. Какие наибольшее и наименьшее значения может принимать функция? В каких точках они достигаются? Отв. $D(y)=\left[-6\sqrt{2};3\sqrt{2};\right]$; $y\left(-6\sqrt{2}\right)=y\left(3\sqrt{2}\right)=1;$ $y\left(-1{,}5\sqrt{2}\right)=4$. $E(y)=[1;4]$. *Подсказка:* выделите полный квадрат под корнем. Постройте график функции $y=9-\left|\sqrt{2}x+3\right|$.

75.Решите систему уравнений (МГУ мехмат):

$$\begin{cases} x^{\sqrt{y}+\sqrt[4]{x}}=y^{\frac{8}{3}}; \\ y^{\sqrt{y}+\sqrt[4]{x}}=x^{\frac{2}{3}}. \end{cases}$$

Отв: $\left(\dfrac{4}{9};\dfrac{16}{81}\right)$; (1;1).

Решение. ОДЗ $x>0;y>0$. Прологарифмируем (например, по основанию 10) оба уравнения

$$\begin{cases} \left(\sqrt{y}+\sqrt[4]{x}\right)\cdot\lg x=\dfrac{8}{3}\lg y; \\ \left(\sqrt{y}+\sqrt[4]{x}\right)\cdot\lg y=\dfrac{2}{3}\lg x. \end{cases}$$

Замечаем, что x=1;y=1удовлетворяют системе. Это одно из решений. Пусть теперь $x\ne 1; y\ne 1.$ Разделив первое уравнение на второе, получим $\frac{\lg x}{\lg y}=4\frac{\lg y}{\lg x}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\lg x=2\lg y\\ \lg x=-2\lg y\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y^2;\\ x=y^{-2}\end{array}\right.$.

Имеем две системы: 1) $\begin{cases}x^{\sqrt{y}+\sqrt[4]{x}}=y^{\frac{8}{3}};\\ x=y^2.\end{cases}$ и 2) $\begin{cases}x^{\sqrt{y}+\sqrt[4]{x}}=y^{\frac{8}{3}};\\ x=y^{-2}.\end{cases}$ Из первой системы

получаем $\begin{cases}\left(y^2\right)^{\sqrt{y}+\sqrt[4]{y^2}}=y^{\frac{8}{3}};\\ x=y^2.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(y)^{4\sqrt{y}}=y^{\frac{8}{3}};\\ x=y^2.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_2=\frac{4}{9};\\ x_2=\frac{16}{81}.\end{cases}$. Вторая система

рассматривается аналогично, корней она не имеет.

Отв: $\left(\frac{4}{9};\frac{16}{81}\right)$; (1;1).

Если Бог хочет сделать тебя счастливым, он ведёт тебя трудной дорогой, потому что лёгких путей к счастью не бывает. Омар Хайям, известный математик.

Вариант 6

1. Для многочлена $P_3(x)=2x^3-3x^2+4x+5$ вычислите $\frac{P_3\left(2+\sqrt{5}\right)-P_3\left(2-\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{5}}$.

Этот пример можно обобщить, доказав, что значение выражени $\frac{P_3\left(a+\sqrt{b}\right)-P_3\left(a-\sqrt{b}\right)}{2\sqrt{b}}$ является целым числом для натуральлных чисел a,b, при условии, что b не является квадратом целого числа. Как это доказать?

2. Упростите выражение $\sqrt[12]{\left(1-\sqrt[3]{2}\right)^4}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{16}}-\sqrt{2}$

3. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt{3}}$

4. Представьте данное выражение в виде квадрата двучлена: $1-2\sqrt{a-a^2}$

5. Докажите, что данное число является целым и найдите его значение: $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

6. Упростите выражение $\left(\dfrac{x-x^{1/3}}{x^{2/3}-1}-2x^{1/3}+1\right)^{-1}\cdot\dfrac{1+x^{1/3}}{1-x^{2/3}}$

7. Упростите выражение $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}:\left(\left(x^{1/4}-y^{1/4}\right)^{-1}+\left(x^{1/4}+y^{1/4}\right)^{-1}\right)^{-2}$

8. Докажите иррациональность числа $\sqrt[3]{4}$.

9. Приведите пример иррационального числа, заключенного между числами $\sqrt{2}$ *и* π.

10. Вычислите предел $\sqrt[3]{5\cdot\sqrt[3]{7\cdot\sqrt[3]{5\cdot\sqrt[3]{7\cdot\sqrt[3]{\ldots}}}}}$

11. Если $\sqrt{8-t}-\sqrt{3-t}=2$, то чему равно $\sqrt{8-t}+\sqrt{3-t}$?

12. Найдите значение выражения $\sqrt{5.(142857)\cdot 3.(142857)+\sqrt[19]{0.(19)\cdot 5.(210526315789473684)}}-$
$-3.(142857)$,
используя прогрессию для обращения периодической дроби в обыкновенную.

13. Определите, рационально или иррационально число $a=\sqrt{\dfrac{1-0.(63)}{11}}$.

14. Произведение корней уравнения $(x+1)\cdot\sqrt{x^2+x-8}=2x+2$ равно:
1) 12; 2) -12; 3) 8; 4) -8; 5) -1.

15. При каком натуральном n значение выражения
$\sqrt{\dfrac{n-5}{n+2}}\cdot\dfrac{n^2+(2-n)\cdot\sqrt{n^2-3n-10}-4}{n^2-(n+5)\cdot\sqrt{n^2-3n-10}-25}$ ближе всего к -0.7?

16. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(3x-a)\cdot\left(3-\sqrt{3x-7}\right)=0$ имеет ровно один корень.

17. Решите уравнение $x^3-(4+\sqrt{3})x^2+(1+4\sqrt{3})x-\sqrt{3}=0$, если известно, что произведение двух его корней равно 1.

18. Решите уравнение $\sqrt[8]{x^2}+\sqrt[4]{-x}=4$.

19. Решите уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$.

20. При каких значениях параметра a уравнение $(x-0.5)^{5.5}=\left((x-0.5)^{1.1}-(a-x)^{1.2}\right)^5$ не имеет корней?

21. Решите уравнение $1+x+\sqrt{2x+5}=0$.

22. Решите уравнение $x+2\sqrt{x^2-6}=0$.

23. Решите уравнение $\sqrt{2x^2-3x-5}=x-1$.

24. Решите неравенство $1-x<\sqrt{x^2-2x}$.

25. Решите неравенство $\sqrt{3-x}+3\sqrt[4]{3-x}<10$.

26. Решите уравнение $\sqrt{3x^2-6x+7}=7+2x-x^2$.

27. Решите неравенство $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}<1$.

28. Решите неравенство $\dfrac{\left|x^2-7x+6\right|}{x^2-7x+6}\sqrt{x^2-16}\ge 0$. Постройте график функции $y=\left|x^2-7x+6\right|$.

29. Решите уравнение $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1$.

30. Решите неравенство $\sqrt{x-2}\le 3-|x-5|$.

31. Решите неравенство $\sqrt{25-\dfrac{25}{x}}<x-\sqrt{x-\dfrac{25}{x}}$.

32. Решите неравенство $\dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}\le 0$.

33. Решите уравнение $\sqrt{(7-6x-x^2)\cos x}=\sqrt{\dfrac{7-6x-x^2}{\cos x}}$.

34. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} ax\ge 6, \\ a<\sqrt{x-2}, \\ 3x\ge a+2 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение, принадлежащее отрезку $[6;7]$.

35. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} y=a+\sqrt{-x^2+2x+3}, \\ y=x^2-2x-3 \end{cases}$ имеет два решения. Отв. $(-6;0]$.

36.При всех значениях а решите уравнение $\sqrt{\sqrt{x}+a}=x-a$.

37. Решите уравнение $\sqrt[n]{x^n+\sqrt[n+1]{a^n\cdot x^{n^2}}}+\sqrt[n]{a^n+\sqrt[n+1]{x^n\cdot a^{n^2}}}=b$, где n-натуральное число, большее 2, b>a>0 . Найдите положительный корень. Отв. $\left(b^{\frac{n}{n+1}}-a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}$.

38. Решите систему неравенств $\begin{cases}\dfrac{\sqrt[4]{x^2+2x+8}-\sqrt{x+8}}{\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{x-4}}\le 0,\\ \left|\log_3(2-x)\right|\ge\left|\log_9\left(\dfrac{2-x}{4}\right)\right|.\end{cases}$ Отв. $x\in\left(-\infty;2-\sqrt[3]{4}\right]\cup\left[1\frac{3}{4};2\right)$. Используйте **приём рационализации**.

39. Решите неравенство $\sqrt{x^2+x-12}>x$ двумя способами: алгебраическим; геометрическим. Отв. $x\in[1;3)\cup(-\infty;-5]$.

40. Найти все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\left|x^2-4a^2\right|=\left|x-2a\right|\cdot\sqrt{x+14}$ имеет ровно два различных решения. Отв. $\left\{-\frac{7}{8};7\frac{1}{8};1\right\}\cup(-\infty;-7)$.

41. Найти все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}\sqrt{64y-x^2}=\sqrt{64y-16y^2},\\ xy+6a^2=2ay+3ax\end{cases}$ имеет единственное решение.

Отв. $[-8;0]\cup\left(\frac{4}{3};8\right]$.

42. Используя график и кусочную монотонность функции, найдите ее наименьшее значение: $y=\sqrt{4x^2-4x+1}-\sqrt{x^2-6x+9}-2x$.

43. При каком целом положительном x значение выражения

$$\sqrt{\frac{x-2}{x+6}}\cdot\frac{x^2+(6-x)\sqrt{x^2+4x-12}-36}{x^2-(2+x)\sqrt{x^2+4x-12}-4}$$ ближе всего к -0.3?

44. Постройте график функции y=f(x), укажите E(y). Определите число корней и решите уравнение f(x)=a в зависимости от параметра a, если

$$f(x)=\sqrt{1+2x+x^2}+\left(\sqrt{-x-1}\right)^2$$

45. Найдите все значения a, при которых уравнение $\frac{(a+1)(a+2)}{a^2+3a+4}=x^2+6\sqrt{x}+7$ имеет решение.

46. **Решите историческую задачу Ал-Каласади(?-1486) из трактата «Раскрытие тайн науки Гобар»:** если a^2 – наибольший квадрат, содержащийся в числе, r – остаток, то $\sqrt{a^2+r}\approx a+\frac{r}{2a}$. Обоснуйте эту формулу для приближенного вычисления корня.

Ал-Каласади - мавританский математик, работал в Гренаде, позже в Тунисе, в своем труде по арифметике и алгебре применял настолько разработанную алгебраическую символику, что опередил в этом современных ему математиков Европы. Математики писали формулы на песке, отсюда происходит название книги, по-арабски, *гобар - это пыль, песок*.

46.Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x+2y}=10;\\ \sqrt{x+y}+2x+y=16.\end{cases}$ (МФТМ2002). Отв. (-4;20).

47. Решите уравнение $3x-2|x-2|=3\sqrt{3x+18}-2\left|\sqrt{3x+18}-2\right|$. МГУ,мехмат, 2001. Отв.6.

48.Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases}8x^3+18x^2+15x+14=0;\\ (10+4x)^y-2=y\left(5+\frac{7}{x}\right)+7^{x+y}\cdot\sqrt{16x(x+1)^2+40x^2+89x+49}\end{cases}$$ имеет хотя бы два различных решения.

49.Решите неравенство $\sqrt{\frac{x+4}{3x+4}}+\sqrt{\frac{3x+4}{5x-3}}\geq 2\cdot\sqrt[4]{\frac{x+4}{5x-3}}$.

50.Найдите значения параметров a,b при которых решением неравенства $\sqrt{x+5}\geq ax+b$ является отрезок $\left[-\sqrt{2};\sqrt[3]{3}\right]$. Отв.

51.Решите уравнение $\sqrt{-x+6}-|x-5|+\sqrt{x-4}=2$.Отв.5.

52. Найдите все положительные значения параметра m, при которых числа 1 и 3 принадлежат области определения функции $y=\sqrt[6]{m^{m^2x+12x}-m^{7mx+6}}$ **.**

53. Решите неравенство $4-3\cdot 2^{x+2}+17\cdot 2^{2x}<3\cdot 2^{x+2}\cdot\sqrt{9\cdot 2^{2x-2}-3\cdot 2^x+1}.$

54.Решите уравнение

$$\frac{x+1}{2x-3}+3\cdot\frac{x-3}{3x-2}=4\cdot\sqrt{\frac{x-3}{3x-2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{x^2-2x-3}{6x^2-13x+6}}.$$

Отв.-11. Подсказка: используйте неравенство О.Коши.

55. Дано: $f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=\sqrt{x}$. **Решите уравнение** $f_1(f_2(x))=f_2(f_1(x))$**.**

56.Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2}=5,\\ 3x+3y=14\end{cases}$

55. **Решите уравнение:**

$$f(f(x))=1+\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$$, если $f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{x}}$.

56. (ЕГЭ2008). Для чисел $a_1,a_2,a_3,...,a_{99}$ верны равенства $a_{n+1}=f(a_n)$, n=1,2,…98. Найдите $a_{13}+a_{82}$, если известно, что $a_{99}=0$ и

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+8}{x-2}, x<2;\\ \sqrt[5]{\dfrac{x-5}{x-1}}+\sqrt{\dfrac{8x-7}{2x+3}}; x\ge 2.\end{cases}$$

Отв.-4.

57.Решите уравнение $5\sqrt{27+54x-81x^2}+6x-9x^2=31$. Отв. $-\frac{1}{3}$.Подсказка: используйте подстановку.

58.Найдите такое значение x из отрезка $[-1;2]$, что точка с абсциссой x и ординатой $y=\sqrt{4-2x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3}$ удалена на наименьшее расстояние от начала координат. Отв.1.

59.Решите уравнение
$\sqrt{(x+2)(2x+2)}-2\sqrt{x+2}-2=-\sqrt{(x+4)(2x+2)}+\sqrt{x+4}$. Отв.2.

60. Решите уравнение $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}$.Отв.-6,-5.-5.5.

61. Решите уравнение $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x-15}=4$. Отв.16; 96.
Подсказка: замена или двукратное возведение в квадрат с соблюдением равносильности преобразований.

62. Решите уравнение $4x=\left(\sqrt{x}+39\right)\left(1-\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2$. Отв.0.

63. Решите уравнение $\sqrt{\frac{7x+2}{x+2}}-\frac{-12}{7(7x+2)}=\frac{53}{28}$.

Отв.2. Подсказка: замена $t=\sqrt{\frac{7x+2}{x+2}}$.

64.Докажите, что $tg127^0 30^1+\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ есть целое число. Подсказка: $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

63.Решите уравнение $\sqrt[3]{35-x}+\sqrt[3]{x+2}=1$.

64. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=4x-3\sqrt{9-x^2}$. Отв. m=-15.

65. Решите уравнение $\log_x(3x-2)-2=\sqrt{\log^2{}_x(3x-2)+\log_{\sqrt[4]{x}}\frac{x}{(3x-2)}}$.

Отв. $\left(\frac{2}{3};1\right)\cup(1;2]$. Подсказка: упростите подкоренное выражение, уравнение примет вид: $f(x)=\sqrt{f^2(x)}$.

66. Для функции $y=3-\sqrt{4-\sqrt{3x^2+4\sqrt{3}x+4}}$ найдите область определения и множество значений. Какие наибольшее и наименьшее значения может принимать функция? В каких точках они достигаются? Отв.

$$D(y)=\left[-2\sqrt{3};\frac{2\sqrt{3}}{3};\right];\quad y\left(-2\sqrt{3}\right)=y\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=3;\quad y\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=1.$$

$$E(y)=[1;3].$$

Подсказка: выделите полный квадрат под корнем. Постройте график функции $y=4-\left|\sqrt{3}x+2\right|$.

67. Докажите, что сумма

$$\sqrt{9-\cos 2x+8\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sqrt{9-\cos 2x-8\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

не зависит от x. Отв. $4\sqrt{2}$.

68.Постройте график функции

$$y=\sqrt[3]{\frac{x^3-3x+\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{x^3-3x-\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-4}}{2}}.$$

Отв. $y=x, |x|\geq 2.$

Подсказка: выразите куб двучлена, например, $\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^3$.

69.Решите неравенство $\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2}\leq 2x+9$. Отв. $[-0{,}5;0)\cup\left(0;\frac{45}{8}\right].$

Домножте на сопряжённое выражение на ОДЗ.

70. Дана функция $f(x)=\sqrt{4x^2+4x+1}+\sqrt{2x+1}; x\in[-2;3]$.Найдите множество значений функции $f(x)$. При каких значениях параметра а может выполняться равенство $\sqrt{4x^2+4x+1}+\sqrt{2x+1}=\frac{a-3}{a^2+1}$. Отв. $a\geq 0{,}5; a\leq -1.$

71.Решите уравнение $\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}=3\cdot\sqrt[3]{x^2-1}$. Отв. $\frac{9}{7}$.

Подсказка: это однородное уравнение.

72. Решите уравнение $2\left(2-x^2-x\right)=\sqrt{1-x^2}\cdot\left(3x^2-6x+4\right)$. Отв. $\left\{0;1;\pm\frac{\sqrt{8}}{3}\right\}$.

Подсказка: разложите на множители $\left(3\sqrt{1-x^2}-1\right)\left((x-1)^2-\sqrt{1-x^2}\right)=0$.

73.Решите систему уравнений (МГУ мехмат):

$$\begin{cases}\sqrt[x-y]{x+y}=\dfrac{\sqrt{52-2x}}{\sqrt[4]{x-y}};\\ \dfrac{3}{2}\log_8(x-y)-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x-y)=5.\end{cases}$$

Отв:(20;16).

Решение. ОДЗ $x+y\geq 0; x-y\in N; x\leq 26; x-y\neq 1.$ По свойствам логарифма преобразуем второе уравнение

$$\frac{3}{2}\log_8(x-y)-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x-y)=5\Leftrightarrow\frac{1}{2}\log_2(x-y)+2\log_2(x-y)=5$$

$$\frac{5}{2}\log_2(x-y)=5\Leftrightarrow\frac{1}{2}\log_2(x-y)=1\Leftrightarrow x-y=4.$$

Возвращаемся к исходной системе

$$\begin{cases}\sqrt[4]{x+y}=\dfrac{\sqrt{52-2x}}{\sqrt[4]{4}};\\ x-y=4.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[4]{x+y}=\sqrt{26-x};\\ x-y=4.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=(26-x)^2;\\ x-y=4.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=(26-x)^2;\\ y=x-4.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-54x+680=0;\\ y=x-4.\end{cases}$$

Квадратное уравнение имеет два корня:20 и 34, но второй-посторонний. Ответ:x=20;y=16.

Если Бог хочет сделать тебя счастливым, он ведёт тебя трудной дорогой, потому что лёгких путей к счастью не бывает. Омар Хайям, известный математик.

Вариант 7

1. Упростив правую часть равенства, решите уравнение

$$\frac{4-5x}{2x+3}=$$

$$=\left(\frac{a-2b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{4b^2}}+\frac{\sqrt[3]{2a^2b}+\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{4b^2}+\sqrt[3]{16ab}}\right):\frac{a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{2b}+b\sqrt[3]{a}+a\sqrt[3]{2b}}{a+b}$$

2. Для многочлена $P_3(x)=2x^3-3x^2+4x+5$ вычислите $P_3\left(1+\sqrt{7}\right)+P_3\left(1-\sqrt{7}\right)$.

3. Упростите выражение $\sqrt[6]{\left(1-\sqrt[3]{6}\right)^6}\cdot\left(1+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{36}\right)$.

4. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}}$

5. Представьте данное выражение в виде квадрата двучлена: $2+2\sqrt{1-a^2}$

6. Докажите, что данное число является целым и найдите его значение:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)$$

7. Упростите выражение $\dfrac{a^{3/2}+b^{3/2}}{\left(a^2-ab\right)^{2/3}}:\dfrac{a^{-2/3}\left(a^2+ab+b^2\right)\cdot\sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$

8. Упростите выражение $\left(\dfrac{1}{\left(a^{1/2}+b^{1/2}\right)^{-2}}-\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{3/2}-b^{3/2}}\right)^{-1}\right):\sqrt{ab}$

9. Можно ли в узлах клетчатой бумаги (все клетки одинаковы) поместить вершины равностороннего треугольника?

10. Известно, что сумма и разность двух действительных чисел a и b есть числа рациональные. Доказать, что числа a и b тоже рациональны.

11. Вычислите предел $\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[3]{5\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[3]{5\cdot\sqrt[3]{\ldots}}}}}$

12. Если $\sqrt{9-t}-\sqrt{4-t}=2$, то чему равно $\sqrt{9-t}+\sqrt{4-t}$?

13. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{0.(4)}+0.08(3)\right)\cdot 0.1(3)$, используя прогрессию для обращения периодической дроби в обыкновенную.

14. Определите, рационально или иррационально число $a=\sqrt{\dfrac{1-0.(18)}{11}}$.

15. Значение выражения $(5x+6)x$, где x - корень уравнения $\dfrac{1}{2x-\sqrt{4x^2-x}}-\dfrac{1}{2x+\sqrt{4x^2-x}}=2\sqrt{3}$, равно:

1) 6; 2) 7; 3) 8; 4) 10; 5) 11.

16. При каком натуральном n значение выражения $\sqrt{\dfrac{n-2}{n+6}}\cdot\dfrac{n^2+(6-n)\cdot\sqrt{n^2+4n-12}-36}{n^2-(n+2)\cdot\sqrt{n^2+4n-12}-4}$ ближе всего к -0.3?

17. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(4x-3a)\cdot\left(4-\sqrt{5x-6}\right)=0$ имеет ровно один корень.

18. Решите уравнение $x^3-19x+2\sqrt{5}=0$, если известно, что произведение двух его корней равно 1.

19. Решите уравнение $\sqrt[8]{x^4}-3\cdot\sqrt{-x}=-6$.

20. Решите уравнение $(x^2+2x-3)^{0.3}=-x^2-3x$.

21. При каких значениях параметра a уравнение $(x+a)^{2.1}=\left((x+a)^{0.7}-(3-x)^{0.3}\right)^3$ не имеет корней?

22. Решите уравнение $2+x+2\sqrt{x+5}=0$.

23. Решите уравнение $\sqrt{2x^2+5x+1}=x+1$.

24. Решите неравенство $\sqrt{(x+4)(x-7)}>x+3$.

25. Решите неравенство $\sqrt{2-x}-2\sqrt[4]{2-x}<3$.

26. Решите уравнение $(x+2)(x-5)+3\sqrt{x(x-3)}=0$.

27. Решите неравенство $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}<1$.

28. Решите неравенство $\dfrac{|x^2-4x-5|}{x^2-4x-5}\sqrt{x^2-x-12}\le 0$. Постройте график функции $y=|x^2-4x-5|$.

29. Решите уравнение $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=2$.

30. Решите неравенство $\sqrt{x+1}<6-|x-5|$.

31. Решите неравенство $\sqrt{36-\frac{36}{x}}<x-\sqrt{x-\frac{36}{x}}$.

32. Решите уравнение $\frac{5+3x}{\sin x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$.

33. Решите уравнение $\sqrt{\operatorname{ctg} x}+2\sqrt{2}\cos x=0$.

34. Найдите все значения **а,** при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}(y^2-2xy+4x-4y+4)\sqrt{x+2}=0;\\ 2x+y=a.\end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

Отв. $a\in(-6;-2]\cup[1;2)\cup(2;8)$.

35. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\sqrt{-x^2+6x+16}-ax=5+6a$ имеет единственный корень.Отв. $\left[-\frac{5}{4};-\frac{5}{14}\right)\cup\{0\}$.

36. Найдите все значения параметра а, при которых система $\begin{cases}y=\sqrt{-x^2-6x-5},\\ y=ax+4x-3a-10\end{cases}$ имеет ровно одно решение. Отв. $(-3{,}75;-3{,}5]\cup\{-4\}$.

37. При каком значении параметра а областью определения функции $y=\frac{x+a}{3a-\sqrt[6]{1-x}}$ является множество $(-\infty;-63)\cup(-63;1]$? Отв.2/3

38. Найдите все значения параметра а, при которых уравнение $\sqrt{x^4+(a-22)^4}=|x-a+22|+|x+a-22|$ имеет единственное решение. Отв. 20; 24.

39. Решите уравнение $x^5+\sqrt{x-2}=32a^5+\sqrt{2a-2}$ при всех допустимых значениях параметра а. Отв. $x=2a, a\geq 1$.

40. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{\sqrt[2]{x^2+6x}-\sqrt{4x+2}}{(x+3)(\log_2|x|-5)} \geq 0, \\ \dfrac{|x-3|-|x-5|}{100-x} < 0. \end{cases}$

Используйте **приём рационализации**.

41. Решите неравенство $\sqrt{3x^2+8x-3} > \dfrac{1+2x}{3}$ двумя способами: алгебраическим; графическим. Отв. $x \in (-\infty;-3] \cup \left(\dfrac{30\sqrt{2}-34}{23};+\infty\right)$.

42. Найти все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-25y^2}, \\ xy+10a^2 = 5ay+2ax \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.
Отв. $[-1;-0{,}5) \cup (0{,}5;1]$.

43. Найдите все значения х , которые не могут быть корнями уравнения $\dfrac{(a+1)(a+2)}{a^2+3a+4} = x^2+6\sqrt{x}+7$ ни при каких значениях a.

44. **Решите исследовательскую задачу**. Проведите исследование разрешимости уравнения $\sqrt{x-3a} = 5x-1$ в зависимости от значений параметра а тремя способами: 1)алгебраическим с переходом к равносильной системе; 2)графическим с построением графиков функций в левой и правой частях уравнения; 3)комбинированным с исследованием а, как функции аргумента х.

45.Решите историческую задачу **Леонардо Фибоначчи(1170-1228) из его «Practica geometriae»**:1)решите уравнение $3x+4\sqrt{x^2-3x} = x^2+4$;

2) решите уравнение $x+\sqrt{x}+\sqrt{2x}+\sqrt{5x^2} = 10$;

3)В равносторонний треугольник со стороной **а** вписан квадрат так, что одна его сторона лежит на основании треугольника, а две вершины квадрата лежат на сторонах треугольника. Найти сторону квадрата.

Леонардо Фибоначчи (сын Боначчи)– первый крупнейший итальянский математик средневековой Европы, родился в Пизе (Италия) В своей «Книге об абаке» 1202г., этой математической энциклопедии своего времени, изложил индийскую позиционную систему исчисления, по которой многие поколения европейских математиков изучали не только индийскую позиционную систему исчисления, но вообще математику. Леонардо Фибоначчи предложил способ извлечения кубического корня, решая задачу о размножении кроликов, исследовал числовую последовательность Фибоначчи. Его труды получили распространение в 15 веке благодаря тому, что Лука Пачоли переработал их и опубликовал в своей книге «Сумма» (Венеция,1494).

46.Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\sqrt{x+y}+\dfrac{y}{x}=3x-1; \\ \sqrt{y+\sqrt{x+y}}=y-3x-6. \end{cases}$ (МФТИ2003). Отв. (6;30).

47. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt{\cos\pi x-1}=(x-1)(x-2)$.Отв.2.

48.Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-8}=-ax+3a+2$ имеет единственное решение.Отв. $\{-0{,}1\}\in[0;0{,}4]$.Исследуйте разрешимость уравнения при всех значениях параметра a.

49.Решите уравнение $\sqrt{x^2+4xy+3y^2+9}+\left(4x^2+5xy-6y^2\right)^2=0$. (МГУ2001).(6;-3);(-6;3).

50.Найдите значения параметров a,b при которых решением неравенства $\sqrt{x+5}\ge ax+b$ является отрезок $[-1;4]$. Отв. $\frac{1}{5};\frac{11}{5}$.

51.Решите уравнение $\sqrt{-x+4}+\sqrt{x-2}=2+\log_5^2(x-2)$.Отв.3.

52.Найдите все натуральные значения параметра n>1, при которых отрезок длины n является областью определения функции $y=\sqrt[n]{(x-22)^{5n+1}\cdot\left(n^2+28-2nx\right)^{2n+3}}$.

53. Решите неравенство $17-3\cdot2^{x+2}+2^{2x+2}<6\cdot\sqrt{2^{2x+2}-3\cdot2^{x+2}+9}$.

54.Решите уравнение $\sqrt[4]{2x-1}=\dfrac{x^2+3}{4}$. Отв. 1. Подсказка: используйте неравенство О.Коши.

55. Найдите значение выражения $f^2(\varphi(x))-\varphi^2(f(x))$ при $x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{25}-\frac{1}{36}+\sqrt[5]{3}$, если $\varphi(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

56. Пусть $x(a)$ – корень уравнения $\sqrt{x+a}=3-2x$. Найдите множество значений функции $x(a)$.

57.Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-7)^2+(y-2)^2}=5,\\ 2x+2y=11\end{cases}$

58.Решите уравнение $(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)+3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0$. Отв. $-\frac{1}{5}$. Подсказка: введите функцию и исследуйте её на монотонность.

59. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\sqrt{5a+\sqrt{5a-x-\frac{x^2}{4}}}+x+\frac{x^2}{4}=0$ имеет решение. Отв. $\left[-\frac{1}{20};0\right]$. Подсказка: введите функцию и исследуйте её на монотонность.

60. Решите уравнение $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{3x-4}=\sqrt[3]{x}$. Отв. 2; $\pm\sqrt{2}$.

61. Решите уравнение $\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}=2$.Отв.0.

62. Решите уравнение $117+9x+16x^2=24x\sqrt{13+x}$. Отв.3. Подсказка: выделите полный квадрат или сведите к однородному уравнению.

63. Решите уравнение $x=2\sqrt{x-3}+\sqrt[4]{x^3-3x^2}$. Отв. 4;12. Подсказка: разложите $x-\sqrt{x-3}$ на множители, как разность квадратов.

64. Решите систему уравненний $\begin{cases}x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6;\\ x^2y+y^2x=20.\end{cases}$ Отв. (1;4),(4;1).

65. Решите уравнение $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$. Отв. -1. Почему появляется посторонний корень x=0?

66.Решите неравенство $\sqrt{9x^2-6x+x^0}>\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}$.Отв. $x<0; x>\frac{2}{3}$.

67. Решите уравнение $\sqrt[3]{\frac{x+56}{x}}+4\sqrt[3]{\frac{x+19}{x}}=8$. Отв.8. Бал.274.

68. Решите уравнение
$\sqrt{4x^2+4x+3}\cdot arctg(2x+1)+\sqrt{x^2-4x+6}\cdot arctg(2-x)=0$.
Отв.-3. Подсказка: введите функцию и исследуйте её на монотонность.

69. Решите уравнение $1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12x}$.Отв. $\frac{5}{3};\frac{5}{4}$.

70.Решите уравнение $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$.

71.Решите неравенство $2023(x-1)^6-\sqrt{1-(x-1)^8}+x^2\le 2(x-1)$. Отв.1.

72. Решите уравнение $(3-x^2+2x)=\sqrt{1-x^2}\cdot(2x^2+4x+3)$. Отв. $\left\{0;-1;\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

. Подсказка: разложите на множители уравнение.

73. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=30; \\ x^2+y^2=325. \end{cases}$ Отв.(10;15);(15;10).

Если Бог хочет сделать тебя счастливым, он ведёт тебя трудной дорогой, потому что лёгких путей к счастью не бывает. Омар Хайям, известный математик.

Вариант 8

1. Для многочлена $P_3(x)=2x^3-3x^2+4x+5$ вычислите $P_3(3+\sqrt{2})+P_3(3-\sqrt{2})$.

2. Упростите выражение $\sqrt[6]{(1-\sqrt[3]{6})^2}\cdot\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{48}+\sqrt[3]{36}}$.

3. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

4. Представьте данное выражение в виде квадрата двучлена: $3-2\sqrt{3a-a^2}$

5. Является ли число $2-\sqrt{3}$ корнем уравнения $x^3-5x^2+5x-1=0$?

6. Упростите выражение $\left[\left(\dfrac{1-a^{3/2}}{1-a^{1/2}}+a^{1/2}\right)\cdot\left(\dfrac{1+a^{3/2}}{1+a^{1/2}}-a^{1/2}\right)\right]:\left(1-a^2\right)$

7. Упростите выражение $\left(\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-(a-b)\left(a^{1/3}-b^{1/3}\right)^{-1}\right)\cdot a^{-1/3}b^{-1/3}$

8. Приведите пример иррационального числа, заключенного между 1,4 и $\sqrt{2}$.

9. Дано: x, y, $\sqrt{x}+\sqrt{y}\in Q$. Докажите, что $\sqrt{x},\sqrt{y}\in Q$.

10. Вычислите предел $\sqrt[3]{11\cdot\sqrt[3]{17\cdot\sqrt[3]{11\cdot\sqrt[3]{17\cdot\sqrt[3]{\ldots}}}}}$

11. Если $\sqrt{6-t}-\sqrt{5-t}=4$, то чему равно $\sqrt{6-t}+\sqrt{5-t}$?

12. Найдите значение выражения $\left(\sqrt[3]{0.(296)}-0.6\right)\cdot 0.0(6)$, используя прогрессию для обращения периодической дроби в обыкновенную.

13. Определите, рационально или иррационально число $a=\sqrt{11(1-0.(63))}$.

14. Произведение корней уравнения $(x+3)\cdot\sqrt{x^2+3x-3}=x+3$ равно:
1) -4; 2) 12; 3) 4; 4) -12; 5) 1.

15. На множестве целых чисел $(x\in Z)$ решите уравнение
$$\frac{\sqrt{4x^2+2x+1}-1}{2x(2x+1)}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

16. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $(5x-3a)\cdot(5-\sqrt{6x-7})=0$ имеет ровно один корень.

17. Решите уравнение $x^3-11x+2\sqrt{3}=0$, если известно, что произведение двух его корней равно 1.

18. Решите уравнение $\sqrt[12]{x^6}-2\cdot\sqrt{-x}=-2$.

19. Решите уравнение $(x^2-4x)^{0.44}+(4x-x^2)^{4.11}+\sqrt{x^2+9}=5$.

20. При каких значениях параметра *a* уравнение $(x-2)^{0.21}=\left((x-2)^{0.3}+(x-a)^{1.2}\right)^{0.7}$ не имеет корней?

21. Решите уравнение $5-x-\sqrt{x+7}=0$.

22. Решите уравнение $3x+2\sqrt{1-4x^2}=0$.

23. Решите уравнение $\sqrt{2x^2+x-3}=1-x$.

24. Решите неравенство $\sqrt{x^2+2x-8} > x-4$.

25. Решите неравенство $\sqrt{4-x} - 4\sqrt[4]{4-x} < 5$.

26. Решите уравнение $5x^2+35x+32=\sqrt{x^2+7x+10}$.

27. Решите неравенство $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2} > 7$.

28. Решите неравенство $\frac{|x^2-2x-24|}{x^2-2x-24}\sqrt{x^2-4x-5} \ge 0$. Постройте график функции $y=|x^2-2x-24|$.

29. Решите уравнение $\sqrt{x^2+2\sqrt{x^2-1}}-\sqrt{x^2-2\sqrt{x^2-1}}=1$.

30. Решите неравенство $\sqrt{x+3} \le 6-|x-3|$.

31. Решите неравенство $\sqrt{16-\frac{16}{x}} < x-\sqrt{x-\frac{16}{x}}$.

32. Решите уравнение $\frac{4x-9}{\cos x}=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

33. Решите уравнение $\sqrt{\cos x}-\operatorname{ctg} x=0$.

34. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\sqrt{-x^2+20x-91}+ax=3+a$ имеет единственный корень.Отв. $(0{,}25;0{,}5]\cup\{0\}$.

35. Решите уравнение $x^6-2\log_{0,2}x-a^3=\sqrt[4]{4a}-\sqrt{2x}-\log_{0,2}a$ при всех допустимых значениях параметра а. Отв. $x=\sqrt{a}, a>0$.

36. Найдите все значения параметра а, при которых уравнение $\sqrt{x^4+(a-13)^4}=|x-a+13|+|x+a-13|$ имеет единственное решение. Отв. 11; 15.

37. Пусть $(x_0;y_0)$- решения системы $\begin{cases} x+\sqrt{3y+x-a}=4, \\ y-3x=5-a \end{cases}$.Найдите такое значение параметра а, при котором $x_0=y_0$.Отв.

38. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt[3]{x^2+6x+2}-\sqrt[3]{4x+17}}{2^x-8}\geq 0$, Отв. $x\in[-5;3)\cup(3;+\infty)$.

Используйте **приём рационализации**.

39. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $x^2+ax+3=\sqrt{33x^2+6ax+9}$ имеет ровно три корня. Решите уравнение при найденных значениях параметра. Отв. $\left[-\dfrac{10}{\sqrt{3}};-3\sqrt{3}\right)\cup\left(-3\sqrt{3};3\sqrt{3}\right)\cup\left(3\sqrt{3};\dfrac{10}{\sqrt{3}}\right]$.

40. Решите неравенство $\sqrt{-x+2}-\sqrt{x+1}>\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ двумя способами: алгебраическим; геометрическим. Отв. $x\in\left[-1;\dfrac{5-\sqrt{29}}{10}\right)$.

41. Найти все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\left|x^2-9a^2\right|=\left|x+3a\right|\cdot\sqrt{x^2-xa+7a}$ имеет ровно два различных решения. Отв. $\left(-\infty;-\dfrac{7}{12}\right]\cup\left(0;\dfrac{7}{24}\right)\cup\left(\dfrac{7}{24};+\infty\right)$.

42. Пусть $x(a)$ – корень уравнения $\sqrt{x+a}=3-2x$. Найдите множество значений функции $x(a)$.

43. Найдите все значения *x*, которые не могут быть корнями уравнения $3\cdot\sqrt{3x^4-2x^3}=a\cdot\sqrt[4]{6-a^4}\cdot\left(x-3x^2+6\right)$ ни при каких значениях *a*.

44. **Решите исследовательскую задачу**. Проведите исследование разрешимости уравнения $\sqrt{-x^2+20x-91}+ax=3+a$ в зависимости от значений параметра а тремя способами: 1)алгебраическим с переходом к равносильной системе; 2)графическим с построением графиков функций в левой и правой частях уравнения; 3)комбинированным с исследованием а, как функции аргумента х.

45.**Решите историческую задачу Франсуа Виета**: имея равносторонний треугольник со стороной, равной 1, построить с помощью циркуля и линейки отрезки длиной $\sqrt{2};\sqrt{3};\sqrt{4};\sqrt{5};\sqrt{6};\sqrt{7}$....

46.Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{11x-y}-\sqrt{y-x}=1; \\ 7\sqrt{y-x}+6y-26x=3.\end{cases}$ (МФТМ2002). Отв. (0,5;1,5).

47. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt{\cos \pi x-1}=(x-1)(x-2)$.Отв.2.

48. Решите уравнение $\sqrt{-x+3}+\sqrt{x-1}=3^{2-x}+3^{x-2}$.Отв.2.

49. Решите неравенство $\sin(x-1)+\dfrac{1}{\sin(x-1)}+\sqrt{5x-x^2-4}>2$. Отв. $(1;4]$.

50.Решите неравенство $\sqrt{1-\log_5(x^2-2x+2)}<\log_5(5x^2-10x+10)$.Отв. $[-1;1)\cup(1;3]$.

51. Решите уравнение

$$\sqrt{1+\sqrt{\sin 2x}}+\sqrt{1-\sqrt{\sin 2x}}=\sqrt{1+\sqrt{\cos x}}+\sqrt{1-\sqrt{\cos x}}\ .$$

Отв. $\left\{\dfrac{\pi}{6}+2\pi n; \dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right\}$.

52. При каких положительных значениях параметра а область определения функции $y=\sqrt{a^{x^2+6}-a^{x^2+2a|x|-5}}$ содержит не более трёх однозначных натуральных чисел и не более 9 трёхзначных натуральных чисел?

53.Решите уравнение $\sqrt[3]{25x(2x^2+9)}=\dfrac{3}{x}+4x$. Отв. $\pm\sqrt{3}$. Подсказка: используйте неравенство О.Коши.

54.Найдите значение выражения $f^2(\varphi(x))-\varphi^2(f(x))$ при

$x=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{19}+\dfrac{1}{215}-\dfrac{1}{336}+\sqrt[5]{3}$, если $\varphi(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{2x+2}}$, $f(x)=\dfrac{-2x^2+1}{2x^2+1}$.

55. Найдите $f(x)$, если $2xf(x)-\sqrt[3]{x+1}\,f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\sin\sqrt{x}$.

56. Найдите все значения x, которые не могут быть корнями уравнения $\sqrt{x-3a}=5x-1$ ни при каких значениях a.

57.Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{(x-4)^2+(y+7)^2}+\sqrt{(x-10)^2+(y-1)^2}=10,\\ 3x+y=9\end{cases}$$

58.Решите уравнение $(4x+1)\left(1+\sqrt{(4x+1)^2+7}\right)+3x\left(1+\sqrt{9x^2+7}\right)=0$.

Отв. $-\dfrac{1}{7}$. Подсказка: введите функцию и исследуйте её на монотонность.

59. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{1+a+\sqrt{a+2\cos^2 x}}=\cos 2x$ имеет решение. Отв. $\left[-\dfrac{5}{4};-1\right]$. Подсказка: введите функцию и исследуйте её на монотонность.

60. Решите уравнение $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{6x-1}=\sqrt[3]{2x+1}$.

Отв. $\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

61. Известно, что отрезки с длинами сторон a,b,c образуют треугольник. Докажите, что отрезки с длинами $\sqrt[3]{a};\sqrt[3]{b};\sqrt[3]{c}$ тоже образуют треугольник.

62. Решите уравнение $\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}=\sin x+\sqrt{x-3}$.Отв. $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\ge 2$

63.Найдите функцию $f(x)$, удовлетворяющую уравнению $5f(x)=3f\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{x}};x>0$. Отв. $f(x)=\dfrac{3x+5}{16\sqrt{x}}$.

64. Решите уравнение $x\sqrt{2\left(5-8x^2\right)}+240\sqrt{1+x^2}=\sqrt{26\left(225+x^2\right)}$. Отв.0,75.

Подсказка: докажите коллинеарность векторов $\{x;15\}$ и $\left\{\sqrt{\dfrac{5}{8}-x^2};4\sqrt{1+x^2}\right\}$.

Затем воспользуйтесь неравенством Коши-Буняковского.

65. Докажите, что для любого прямоугольного треугольника с гипотенузой **c** и радиусом вписанной окружности **r** выполняется неравенство
$c \geq \left(3\sqrt{3}-1\right)\cdot r$. Подсказка: воспользуйтесь неравенством Огюстена Коши.

66.Решите систему уравнений $\begin{cases} 10(y-x)=x^4+9; \\ \sqrt{y}+\sqrt{y-2x}=\sqrt{2}. \end{cases}$

Отв. $(1;2),(-1;0),(2;4{,}5),(-2;0{,}5)$. Подсказка: второе уравнение домножим на сопряжённое выражение.

67. Решите уравнение $7tg^3x-6=\sqrt[3]{\frac{1}{7}\left(tg^3x-6\right)}$.

Подсказка: докажите, что, если $f(x)$ - монотонно возрастающая функция, то уравнение $f(f(x))=x \Leftrightarrow f(x)=x$. Отв. $\frac{\pi}{4}+\pi n; n\in Z$.

68.Число $\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{19}$ является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами. Найдите такой многочлен. Отв.: например,
$p_9(x)=x^9-78x^6-1563x^3-17576$ или произведение этого многочлена на любой другой многочлен с целыми коэффициентами.

69. Решите уравнение $x+y+5=2\sqrt{3x}+\sqrt{2y}$.

Отв.(3;2). Подсказка: выделите сумму квадратов двучленов.

70.Решите уравнение $\sqrt[3]{1+\sqrt{x+3}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x+3}}=2$.

71. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+3\sqrt{x+y}=18; \\ x^2+y^2=125. \end{cases}$

Отв.(11;-2);(-2;11).

72. Решите неравенство $\sqrt{6x-x^2-8}-\sqrt{7-2x}\geq\sqrt{8x-x^2-15}$. Отв.3;3,5.

73. Решите систему уравнений (МФТИ):

$\begin{cases} \sqrt[2]{x-4y}-2\cdot\sqrt{x+3y}=1; \\ 7\cdot\sqrt{x+3y}+22y+5x=13. \end{cases}$ Отв:(13;-3).

Решение. ОДЗ $x+3y\ge 0; x-4y\ge 0.$ Умножая первое уравнение на 7 а второе на 2 и складывая, получим: $7\cdot\sqrt{x-4y}=-44y-10x+33$, добавим к нему первое уравнение системы

$$\begin{cases}\sqrt{x-4y}-2\cdot\sqrt{x+3y}=1;\\ 7\cdot\sqrt{x-4y}=-44y-10x+33.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-4y}-1=2\cdot\sqrt{x+3y};\\ 7\cdot\sqrt{x-4y}=-44y-10x+33.\end{cases}$$ после возведения в квадрат первого уравнения получаем два представления для $\sqrt{x-4y}$:

$$\begin{cases}2\cdot\sqrt{x-4y}=-3x-16y+1\\ 7\cdot\sqrt{x-4y}=-44y-10x+33\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}14\cdot\sqrt{x-4y}=-21x-112y+7\\ 14\cdot\sqrt{x-4y}=-88y-20x+66\end{cases}$$ которые можем приравнять: это даёт $x=-24y-59$.

Возвращаясь к исходной системе, запишем

$$\begin{cases}x=-24y-59;\\ 7\cdot\sqrt{x+3y}+22y+5x=13.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-24y-59;\\ 7\cdot\sqrt{-21y-59}=98y+308.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-24y-59;\\ \sqrt{-21y-59}=14y+44.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-24y-59;\\ -21y-59=196y^2+1232y+1936;\\ y\ge-\dfrac{22}{7}.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-24y-59;\\ \left[\begin{array}{l}y_1=-3;\\ y_2=-\dfrac{665}{196}<-\dfrac{22}{7};п.к.\end{array}\right.\\ y\ge-\dfrac{22}{7}.\end{cases}$$ Отв. x=13;y=-3.

Заметим, что возможно было аналогично получить два представления для

$$\sqrt{x+3y}:\begin{cases}4\cdot\sqrt{x+3y}=-3x-16y-1\\7\cdot\sqrt{x+3y}=-22y-5x+13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}28\cdot\sqrt{x+3y}=-21x-112y-7\\28\cdot\sqrt{x+3y}=-88y-2x+52\end{cases},$$

откуда, приравняв правые части уравнений, получить $x=-24y-59$. Далее аналогично.

Если Бог хочет сделать тебя счастливым, он ведёт тебя трудной дорогой, потому что лёгких путей к счастью не бывает. Омар Хайям, известный математик.

Вариант 9

1. Для многочлена $P_3(x)=2x^3-3x^2+4x+5$ вычислите $P_3\left(5+\sqrt{2}\right)+P_3\left(5-\sqrt{2}\right)$.

2. Упростите выражение $\sqrt{\left(\sqrt[3]{7}-2\right)^2}\cdot\left(4+\sqrt[3]{56}+\sqrt[3]{49}\right)$.

3. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-3}$.

4. Представьте данное выражение в виде квадрата двучлена:
$9+2a\sqrt{9-a^2}$

5. Является ли число $3-\sqrt{2}$ корнем уравнения $x^3 - 7x^2 - 7x + 1 = 0$?

6. Упростите выражение x^3+12x при $x=\sqrt[3]{4\left(\sqrt{5}+1\right)}-\sqrt[3]{4\left(\sqrt{5}-1\right)}$.

7. Упростите выражение $\left(\dfrac{1}{\left(a^{1/2}+b^{1/2}\right)^{-2}}-\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{3/2}-b^{3/2}}\right)^{-1}\right):\sqrt{ab}$

8. Приведите пример иррационального числа, заключенного между числами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$.

9. Найдите все рациональные значения x, при которых число $\sqrt{x^2+x+1}$ является рациональным.

10. Вычислите предел $\sqrt[3]{11\cdot\sqrt{17\cdot\sqrt[3]{11\cdot\sqrt{17\cdot\sqrt[3]{\ldots}}}}}$

11. Если $\sqrt{16-t}-\sqrt{3-t}=2$, то чему равно $\sqrt{16-t}+\sqrt{3-t}$?

12. Найдите значение выражения $\sqrt{5.(142857)\cdot 3.(142857)+\sqrt[19]{0.(19)\cdot 5.(210526315789473684)}}-3.(142857)$, используя прогрессию для обращения периодической дроби в обыкновенную.

13. Определите, рационально или иррационально число $a=\sqrt{11(1-0.(63))}$.

14. Пусть x - корень уравнения $\sqrt[3]{1+\sqrt{x+3}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x+3}}=2$. Тогда значение выражения $x^2+2x+11$ равно :
1) 12; 2) 15; 3) 14; 4) 7; 5) 7.5.

15. Значение выражения $\frac{4x+7}{x}$, где x - корень уравнения $\frac{\sqrt{3}}{x-\sqrt{x^2-x}}-\frac{\sqrt{3}}{x+\sqrt{x^2-x}}=-6$, равно:
1) 7; 2) -7; 3) 10; 4) -10; 5) $-\frac{1}{2}$.

16. На множестве целых чисел $(x\in Z)$ решите уравнение $\frac{\sqrt{9x^2+6x+16}-4}{3x(3x+2)}=\frac{\sqrt{19}-4}{3}$.

17. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(6x-7a)\cdot\left(7-\sqrt{8x-9}\right)=0$ имеет ровно один корень.

18. Решите уравнение $4x^3+(17-4\sqrt{2})x^2+(4-17\sqrt{2})x-4\sqrt{2}=0$, если известно, что произведение двух его корней равно 1.

19. Решите уравнение $\sqrt[12]{x^4}+2\cdot\sqrt[3]{-x}=3$.

20. Решите уравнение $(x-2)^{\frac{2}{3}}=\left((x-2)^{\frac{4}{9}}+(x^2-9x)^{\frac{4}{9}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

21. При каких значениях параметра a уравнение $(x+a)^{0.7}=\left((x+a)^{0.5}+(x+2)^{0.2}\right)^{1.4}$ не имеет корней?

22. Решите уравнение $5-x+2\sqrt{8-x}=0$.

23. Решите уравнение $\sqrt{x^2+3x+3}=2x+1$.

24. Решите неравенство $\sqrt{8+2x-x^2}>6-3x$.

25. Решите уравнение $\frac{x+3}{\cos x}=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

26. Решите уравнение $\sqrt{\sin x} - \operatorname{tg} x = 0$.

27. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{\cos x}}{x^2 - 4x - 12} < 0$.

28. Решите уравнение $\sqrt{(x+5)\sin 2x} = \sqrt{\dfrac{\sin 2x}{x+5}}$.

29. Решите уравнение $\sqrt{\sin 2x \cos x - \dfrac{1}{3}} = \sqrt{-\sin 2x \cos x - \dfrac{1}{3}}$.

30. Решите неравенство $\sqrt{8\cos x + 9} \le 1 + 4\operatorname{ctg} x \sin x$.

31. Решите уравнение $\dfrac{2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{x}{2}\right) + \sin 2x - 3}{\sqrt{-x^2 - \pi x + 20\pi^2}} = 0$.

32. Решите уравнение $\left(\operatorname{tg}\dfrac{17\pi}{4} - \operatorname{tg} x\right)\sqrt{18\sin\dfrac{25\pi}{6}\sin\dfrac{x}{2} + \cos x - 5} = 0$.

33. Решите уравнение $(3 + 5\cos 2x)\left(2 - 4\sin x + \sqrt{3 - \cos 2x + 5\sin x}\right) = 0$.

34. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\sqrt{2 - 5x} = a - |3x|$ имеет ровно два корня. Отв. $\left\{\sqrt{2}; \dfrac{97}{60}\right\}$.

35. Решите уравнение $(a^2 + 4)\sqrt{x+2} + a^2 x - x^2 = a\sqrt[4]{-14 - 7x} + a^2 - 7$ при всех значениях параметра а.
Отв. $x = -2, a = \pm 1$; при других а решений нет.

36. Пусть $(x_0; y_0)$- решения системы $\begin{cases} 4x + \sqrt{y - a} = 3, \\ 2y + x = 1 - a \end{cases}$. Найдите такое значение параметра а, при котором $x_0 = y_0$. Отв.

37. Решите уравнение $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} = 1$. Отв. $x \in [2;5]$.

38. Решите уравнение $x = a + \sqrt{a + \sqrt{x}}, a > 1$. Отв. $x = \dfrac{1 + 2a + \sqrt{1 + 4a}}{2}$.

39.Найти все значения а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 5^{\sqrt{a^2 - x^2}} - 5^{\sqrt{a^2 - y^2}} = 0, \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0. \end{cases}$ имеет ровно 2 решения.

Отв. $a \in (-3; -1] \cup [1; 3)$

40. Найти все значения а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \dfrac{\left(\sqrt{x^2} - y\right)\left(y - \sqrt{x^2} - 8\right)}{8 + \sqrt{x^2 + 5x + 4}} = 0, \\ x^2 + y + 4a = a^2 + 8. \end{cases}$ имеет ровно 2 решения.

Отв. $a \in \left(-2; 2 - \sqrt{6}\right) \cup \{0; 4\} \cup \left(2 + \sqrt{6}; 6\right)$.

41. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt[3]{x^2 + 1} - \sqrt[3]{16 - 2x}}{\log_2 x + 3} \geq 0$, Отв. $x \in [3; +\infty) \cup (0; 0{,}125)$.

Используйте **приём рационализации**.

42. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $x^2 + ax + 5 = \sqrt{28x^2 + 10ax + 25}$ имеет ровно три различных корня. Решите уравнение при найденных значениях параметра. Отв. $\left[-\dfrac{23}{3\sqrt{2}}; -3\sqrt{2}\right) \cup \left(-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}\right) \cup \left(3\sqrt{2}; \dfrac{23}{3\sqrt{2}}\right]$.

43. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{2x^2 + 7x - 4}}{x + 4} < \dfrac{1}{2}$ Отв. $x \in (-\infty; -4) \cup \left[0{,}5; \dfrac{8}{7}\right)$.

44. Найти все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\left|x^2 - a^2\right| = |x + a| \cdot \sqrt{4x + 4a^2 - 12a}$ имеет ровно два различных решения. Отв. $[0; 1) \cup (1; 4)$.

45. Найдите все значения x , которые не могут быть корнями уравнения $3 \cdot \sqrt{3x^4 - 2x^3} = \left(\sqrt{2}\sin a + \cos a\right) \cdot \left(x - 3x^2 + 6\right)$ни при каких значениях *a*.

46. **Решите исследовательскую задачу**. Проведите исследование разрешимости уравнения $\left(\sqrt{a-x^2}-0{,}5\right)^2=x^2-x+0{,}25$ в зависимости от значений параметра a тремя способами: 1)алгебраическим с переходом к равносильной системе; 2)графическим с построением графиков функций в левой и правой частях уравнения; 3)комбинированным с исследованием a, как функции аргумента x.

45.**Решите историческую задачу Леонарда Эйлера**: рационализировать $y=\sqrt{(a+bx)(c+dx)}$ подстановкой $y=(a+bx)\cdot z$.

46.Решите систему уравнений $\begin{cases} x-2y+\sqrt{x^2-4y^2-49}=-7; \\ \left(x^2-49\right)\sqrt{x^2-4y^2-49}=0. \end{cases}$

47.Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x+2y+7\sqrt{3x+2y}=8; \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}=2. \end{cases}$

48. Решите уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{2-x}=x^2-2x+3$.Отв.1.

49. Решите неравенство $\sin\left(x-\sqrt{2}\right)+\dfrac{1}{\sin\left(x-\sqrt{2}\right)}+\sqrt{5x-x^2-4}>2$. Отв. $\left(\sqrt{2};4\right]$.

50. Решите уравнение $\sqrt{2x^2-4x}=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$. Отв. $-\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

51. Решите неравенство $5^{2x-10-3\sqrt{x-2}}-4\cdot 5^{x-2}<5^{1+3\sqrt{x-2}}$. Отв. $[2;18)$.

52.Решите уравнение $6\cdot\sqrt[2]{x}=\dfrac{x^2+13x+4}{x+2}$.

Отв. $1;4$. Подсказка: используйте неравенство О.Коши.

53. Найдите $f(x)$, если $xf\left(\sqrt{x}\right)-3(x+2)f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=x^{\frac{5}{2}}$.

54. Найдите все значения *x*, которые не могут быть корнями уравнения $\sqrt{x+a}=2x+3$ ни при каких значениях *a*.

55.Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{(x-5)^2+(y+4)^2}+\sqrt{(x-7)^2+(y-10)^2}=10\sqrt{2},\\ 4x+3y=33\end{cases}$$

56.Найдите наименьшее значение функции

$f(x)=\sqrt{5x^2+20}+\sqrt{5x^2-32x+64}+\sqrt{5x^2-40x+100}+\sqrt{5x^2-8x+16}$ Отв. $4\sqrt{145}$. Подсказка: рассмотрите векторы $\vec{a}(5x,10)$; $\vec{b}(16-5x,8)$; $\vec{c}(20-5x,10)$; $\vec{d}(5x-4,8)$, их модули, модуль суммы и сумму модулей.

57.Решите уравнение $(4x+1)\left(2+\sqrt{(4x+1)^2+3}\right)+3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0$.

Отв. $-\dfrac{1}{7}$. Подсказка: введите функцию и исследуйте её на монотонность.

58. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3a+\sqrt{3a+x-x^2}}=x-x^2$ имеет решение. Отв. $\left[-\dfrac{1}{12};0\right]$. Подсказка: введите функцию и исследуйте её на монотонность.

59.Решите уравнение $9^{\sin^2\frac{\pi x}{4}}+9^{\cos^2\frac{\pi x}{4}}=\sqrt{34+4x-2x^2}$.

Отв.1. Подсказка: используйте неравенство Коши и метод оценки.

60.Решите уравнение $\sqrt[3]{24+\sqrt{x-2}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x-2}}=1$.

61.Дано: $f(x)=0{,}5\cdot\sqrt{x^3+1}$ и $g(x)=x\cdot e^{-x}$. Покажите, что $f'(2)$ является корнем уравнения $g'(x)=0$.

62.При каких значениях а неравенство $\sqrt{x^2-10x+26}\geq\dfrac{a^2+2a-3}{a^2+2a-8}$ выполняется при всех значениях х? Отв. (-4;2).
Подсказка: найдите $E\left(\sqrt{x^2-10x+26}\right)$.

63. Напишите уравненние такой касательной к графику функции $y=\sqrt{1-6x}$, которая отсекает на положительных направлениях осей координат равные отрезки.

Отв. $y=-x+\dfrac{5}{3}$.

64. Решите систему $\begin{cases} \sqrt{x}(x+2y)=19; \\ \sqrt{y}(-2x+y)=21 \end{cases}$. Отв.(1;9).

Подсказка: система сводится к однородному кубическому уравнению относительно новой переменной $t=\dfrac{x}{y}$ или $t=\dfrac{y}{x}$.

65. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=3x+4\sqrt{16-x^2}$. Отв. 20 и -12.

66. Решите уравнение $\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}=3\cdot\sqrt[3]{x^2-1}$.

Отв. $\dfrac{9}{7}$. Подсказка: это однородное уравнение.

67. Решите уравнение $\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=1$. Отв. $3\sqrt{21};-3\sqrt{21}$.

68. Решите уравнение $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$. Отв. 1.

69. Решите уравнение $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^3-x+1}=\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^3-x}$. Отв. $0;-1;\pm\sqrt{2}$.

70. Решите уравнение $\sqrt[3]{\left(2x+\sqrt{1+x^2}\right)^2}-5\cdot\sqrt[3]{3x^2-1}+\sqrt[3]{\left(2x-\sqrt{1+x^2}\right)^2}=0$.

Отв. $\dfrac{9}{\sqrt{115}};\dfrac{7}{\sqrt{120}}$. Подсказка: это однородное уравнение.

71. Решите уравнение $\sqrt[4]{18-x}+\sqrt[4]{x+14}=4$.Отв.2.

72. Решите уравнение $\sqrt[3]{(x+8)^2}-\sqrt[3]{(x+8)(8-x)}+\sqrt[3]{(8-x)^2}=4$. Отв.0.

Подсказка: домножьте на сумму корней.

73. Решите уравнение $\sqrt[3]{13-x}+\sqrt[3]{x+22}=5$. Отв.-15;5.

74. Решите неравенство $\sqrt{4x-x^2-3}-\sqrt{7-3x}\geq\sqrt{7x-x^2-10}$. Отв.2;7/3.

Если Бог хочет сделать тебя счастливым, он ведёт тебя трудной дорогой, потому что лёгких путей к счастью не бывает. Омар Хайям, известный математик.

Вариант 10

1. Упростив правую часть равенства, решите уравнение $\frac{4-5x}{2x+3}=$

$$=\left(\frac{a-2b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{4b^2}}+\frac{\sqrt[3]{2a^2b}+\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{4b^2}+\sqrt[3]{16ab}}\right):\frac{a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{2b}+b\sqrt[3]{a}+a\sqrt[3]{2b}}{a+b}$$

2. Для многочлена $P_3(x)=2x^3-3x^2+4x+5$ вычислите $P_3\left(7+\sqrt{17}\right)+P_3\left(7-\sqrt{17}\right)$.

3. Упростите выражение $\sqrt[4]{\left(3\cdot\sqrt[3]{2}-4\right)^4}\cdot\left(16+6\cdot\sqrt[3]{16}+9\cdot\sqrt[3]{4}\right)$.

4. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{2+\sqrt{17-12\sqrt{2}}}$

5. Представьте данное выражение в виде квадрата двучлена: $6-2\sqrt{9-a^2}$

6. Пусть $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - x - 7$. Покажите, что $f\left(2+\sqrt{3}\right)+f\left(2-\sqrt{3}\right)$ является целым числом.

7. Упростите выражение $\frac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{1-8x^{-1}+16x^{-2}}}$

8. Докажите иррациональность числа $\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{10}$.

9. Докажите рациональность числа $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

10. Вычислите предел $\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[4]{5\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[4]{5\cdot\sqrt[3]{\ldots}}}}}$

11. Если $\sqrt{12-t}-\sqrt{4-t}=1$, то чему равно $\sqrt{12-t}+\sqrt{4-t}$?

12. Найдите значение выражения $\left[(0.(6))^3-\sqrt{0.(4)}\right]^{-1}$, используя прогрессию для обращения периодической дроби в обыкновенную.

13. Определите, рационально или иррационально число $a=\sqrt{\frac{1-0.(63)}{11}}$.

14. Сумма корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{x+3+\sqrt{x+14}}+\sqrt{x+3-\sqrt{x+14}}=4$ принадлежит промежутку:

1) (1.9; 1.99); 2) (2.1; 2.2); 3) (-2; -1);
4) (2; 3); 5) (1.5; 2.5).

15. Если x - корень уравнения $\sqrt{\dfrac{3x+7}{3x+2}}+4\cdot\sqrt{\dfrac{3x+2}{3x+7}}=4$, то значение выражения $5-9x^2+x$ равно:

1) -4; 2) 4; 3) $-4\dfrac{7}{9}$; 4) $4\dfrac{7}{9}$; 5) $\dfrac{46}{9}$.

16. Значение выражения $\dfrac{22x+3}{x}$, где x - корень уравнения $\dfrac{1}{6x-\sqrt{36x^2-x}}-\dfrac{1}{6x+\sqrt{36x^2-x}}=10$, равно:

1) -11; 2) 11; 3) -55; 4) 33; 5) 55.

17. На множестве целых чисел $(x\in Z)$ решите уравнение

$$\frac{1-\sqrt{4x^2-10x+7}}{10x-4x^2-6}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

18. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(7x-5a)\cdot(8-\sqrt{9x-10})=0$ имеет ровно один корень.

19. Решите уравнение $2x^3-(10+2\sqrt{3})x^2+(2+5\sqrt{3})x-\sqrt{3}=0$, если известно, что произведение двух его корней равно 1.

20. Решите уравнение $3\cdot\sqrt[12]{x^2}-\sqrt[6]{-x}=4$.

21. Решите уравнение $(6-x)^{0.6}=\left((6-x)^{0.36}+(x^2-7x)^{0.7}\right)^{\frac{5}{3}}$.

22. При каких значениях параметра a уравнение $(x+3)^{0.3}=\left((x+2)^{0.2}+(x-a)^{0.7}\right)^{1.5}$ не имеет корней?

23. Решите уравнение $x-2+2\sqrt{5-x}=0$.

24. Решите уравнение $5\sqrt{4x^2-3}+6x=0$.

25. Решите уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{2+x}=\dfrac{4}{\sqrt{2+x}}$.

26. Решите неравенство $\sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x$.

27. Решите уравнение $\sqrt{1-\sin^2 x}=(3-x)\cos x$.

28. Решите уравнение $\sqrt{\operatorname{tg} x}+\sqrt{6}\sin x=0$.

29. Решите неравенство $\dfrac{7-6x-x^2}{\sqrt{\sin x}}\ge 0$.

30. Решите уравнение $\sqrt{(x+19)\cos x} = \sqrt{\dfrac{x+19}{\cos x}}$.

31. Решите уравнение $\sqrt{1-\dfrac{\operatorname{tg}2x}{2}} = \sin x + \cos x$.

32. Решите неравенство $\sqrt{4\cos x + 7} \le 1 + 4\operatorname{ctg} x \sin x$.

33. Решите уравнение $\dfrac{1+2\cos^2\dfrac{\pi x}{3} + \cos 2\pi x}{\sqrt{30 - x - x^2}} = 0$.

34. При каких значениях параметра а любое решение уравнения $5\cdot\sqrt[3]{9x-18} + 7\log_3(2x-1) + 4a = 0$ принадлежит отрезку $[7;10]$?

35. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\sqrt{9-3x} = a - |1{,}5x|$ имеет более двух корней. Отв. $[4{,}5;5)$.

36. Решите уравнение $(a-1)\sqrt{x^2-25} + (a+8)x - \log_2(x+3) = a\sqrt[2]{15-3x} + a^2 - 29$ при всех значениях параметра а.

Отв. $x = 5, a = -6, a = 11,$; при других а решений нет.

37. Пусть $(x_0; y_0)$- решения системы $\begin{cases} 2ax - \sqrt{3x+y-12} = 12, \\ -2y + x = 11 \end{cases}$. Значение выражения $ax_0 + y_0$ равно 3. Найдите соответствующее значение параметра а. Отв.1,2.

38. Упростите выражение $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ и вычислите его значение при x=1+a, 0<a<1. Отв.2.

39.Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = 5x + \sqrt{104 - x^2}$ на отрезке $\left[2;\sqrt{104}\right]$.Отв. $y(2) = 20; y(10) = 52$.

40.Найти все значения а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \sqrt{4-y^2} = \sqrt{4-a^2x^2}, \\ x^2 + y^2 = 4x + 2y. \end{cases}$ имеет ровно 2 различных решения.

Отв. $a \in (-\infty;-2) \cup (-2;-0{,}5) \cup \{0\} \cup (0{,}5;2) \cup (2;+\infty)$.

41. Найти все значения а, при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases}\dfrac{\left(\sqrt{x^2}-y\right)\left(y-\sqrt{x^2}-8\right)}{8+\sqrt{x^2+5x+4}}=0,\\ x^2+y+4a=a^2+8.\end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

Отв. $a\in\left(-2;2-\sqrt{6}\right)\cup\{0;4\}\cup\left(2+\sqrt{6};6\right)$.

42. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{1-x^3}}{x+1}\le x$. Отв. $x\in[-2;-1)\cup[0;1]$.

43. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\left|x^2-9a^2\right|+3=|x+3a|+3|x-3a|$ имеет ровно два различных положительных решения. Отв. $(-\infty;-1)\cup\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)\cup\left\{\dfrac{2}{3}\right\}\cup(1;+\infty)$

44. Найдите все значения x, которые не могут быть корнями уравнения
$3\cdot\sqrt{3x^4-2x^3}=\left(\dfrac{-7\sin a+4\sqrt{2}\cos a}{\sqrt{27}}\right)\cdot\left(6+x-3x^2\right)$ ни при каких значениях а.

45. **Решите историческую задачу немецкого математика *Оскара Шлёмильха (1823 - 1901), чьё имя носит название остаточного члена в формуле Тейлора*.**

Решите кубическое уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$, если его корни составляют:
1) арифметическую прогрессию;
2) геометрическую прогрессию. Подсказка: используйте теорему Виета для кубического уравнения.

◂ **1)** Пусть $\div$ x_1,x_2,x_3 - корни кубического уравнения $\Rightarrow$

$$x_2-x_1=x_3-x_2 \qquad (1)$$

- по свойству арифметической прогрессии. По формулам Виета для кубического уравнения

$$x_1+x_2+x_3=-a \qquad (2)$$
$$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=b \qquad (3)$$
$$x_1x_2x_3=-c \qquad (4)$$

Из (1), (2) $\Rightarrow$ $2x_2=x_1+x_3;\quad 3x_2=-a\ \Rightarrow\ x_2=-\dfrac{a}{3}$ (5)

Из (2), (5) $\Rightarrow$ $x_1+x_3=-a-x_2\Rightarrow x_1+x_3=-a+\dfrac{a}{3};x_1+x_3=-\dfrac{2a}{3}$ (6)

Из (4), (5) $\Rightarrow$ $x_1x_3\left(-\dfrac{a}{3}\right)=-c\Rightarrow x_1x_3=\dfrac{3c}{a}$ (7)

Тогда по формулам Виета для квадратного уравнения числа x_1 и x_3 удовлетворяют квадратному уравнению

$$z^2+\frac{2a}{3}z+\frac{3c}{a}=0;\ z_{1,2}=\frac{-\frac{2}{3}a\pm\sqrt{\frac{4}{9}a^2-\frac{12c}{a}}}{2}=-\frac{a}{3}\pm\sqrt{\frac{a^2}{9}-\frac{3c}{a}}=-\frac{a}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^3-27c}{a}},$$

здесь

$$x_3=-\frac{a}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^3-27c}{a}},\ x_1=-\frac{a}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^3-27c}{a}},\ x_2=-\frac{a}{3}. \qquad (8)$$

Наконец, подставляя x_1 и x_3 в соотношение (3) (до сих пор не использованное нами), получим необходимое условие того, что корни кубического уравнения образуют арифметическую прогрессию:

$$-\frac{a}{3}\left(-\frac{a}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^3-27c}{a}}\right)+\frac{3c}{a}+\left(-\frac{a}{3}\right)\left(-\frac{a}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^3-27c}{a}}\right)=b\Rightarrow$$

$\dfrac{2a^2}{9}+\dfrac{3c}{a}=b\Rightarrow\dfrac{2a^3+27c}{9a}=b$ - это и есть необходимое условие того, что корни кубического уравнения образуют арифметическую прогрессию.

Ответ: $x_1=-\dfrac{a}{3}+\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{a^3-27c}{a}},\ x_2=-\dfrac{a}{3},\ x_3=-\dfrac{a}{3}-\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{a^3-27c}{a}}$.

2) Пусть $∷\ x_1,x_2,x_3$ - корни кубического уравнения $\Longrightarrow$

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_3}{x_2} \qquad (9)$$

Из (4), (9) $\Rightarrow\ x_2^2=x_1x_3,\ x_1x_2x_3=-c\ \Rightarrow\ x_2^3=-c\Rightarrow\ x_2=-\sqrt[3]{c}\ \Rightarrow$

$$x_1x_3=\frac{-c}{-\sqrt[3]{c}}=\sqrt[3]{c^2} \qquad (10)$$

Из (2) $\Rightarrow\ x_1+x_3=-a-x_2;\ x_1+x_3=-a+\sqrt[3]{c}$. По формулам Виета для квадратного уравнения x_1 и x_3, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases}x_1+x_3=-a+\sqrt[3]{c}\\ x_1x_3=\sqrt[3]{c^2},\end{cases}$$

являются корнями уравнения $z^2-\left(\sqrt[3]{c}-a\right)z+\sqrt[3]{c^2}=0,\ z_{1,2}=\dfrac{\sqrt[3]{c}-a\pm\sqrt{\left(\sqrt[3]{c}-a\right)^2-4\sqrt[3]{c^2}}}{2}$.

Итак,

$$x_1=\frac{\sqrt[3]{c}-a-\sqrt{\left(\sqrt[3]{c}-a\right)^2-4\sqrt[3]{c^2}}}{2},$$

$$x_2=-\sqrt[3]{c}\,,\ \ x_3=\frac{\sqrt[3]{c}-a+\sqrt{\left(\sqrt[3]{c}-a\right)^2-4\sqrt[3]{c^2}}}{2} \qquad (11)$$

- корни кубического уравнения.
Необходимое условие того, что корни кубического уравнения составляют геометрическую прогрессию, получим, подставляя (11) в (3): $b=a\sqrt[3]{c}$.

46.Решите систему уравнений $\begin{cases} x+5y+\sqrt{x^2-25y^2-36}=6; \\ \left(x^2-36\right)\sqrt{x^2-25y^2-36}=0. \end{cases}$

47. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x+4y+4\sqrt{3x+4y}=5; \\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y+3}=4. \end{cases}$

48. Решите уравнение $\frac{3}{\pi}\arccos(x-1)=3+\sqrt{x^4-4x^3+4x^2}$. Отв.0.

49. (ЕГЭ2001).Решите уравнение
$\sqrt[4]{\log_5^4\left|x^2-3x-3\right|+1}=\cos^4\left(\left(x-2\right)\sin\left(2x+1\right)\right)$. Отв.2.

50. Решите уравнение $\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)=4$. Отв.7.Тк.с.412.

51.Решите уравнение $\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{1+x}=3$.
Отв.0. Подсказка: используйте неравенство О.Коши.

52. Найдите $f(x)$, если $x^2 f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)-(x+1)f\left(\sqrt[3]{x}\right)=tg\,x$.

53. Найдите все значения x , которые не могут быть корнями уравнения
$\frac{(a+1)(a+2)}{a^2+3a+4}=x^2+6\sqrt{x}+7$ ни при каких значениях a.

54.Решите системy уравнений $\begin{cases} \sqrt{(x-7)^2+(y-6)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=10, \\ 4x-6y=7 \end{cases}$

55.Найдите наименьшее значение функции
$f(x)=x\sqrt{2}+\sqrt{2x^2+2x+1}+\sqrt{2x^2-14x+25}+\sqrt{2x^2-26x+89}$ Отв. $\sqrt{221}$
. Подсказка: рассмотрите векторы $\vec{a}(x,x)$; $\vec{b}(4-x,3-x)$; $\vec{c}(x+1,x)$; $\vec{b}(5-x,8-x)$, их модули, модуль суммы и сумму модулей.

56.Решите уравнение $(2x+1)\left(1+\sqrt{(2x+1)^2+7}\right)+x\left(1+\sqrt{x^2+7}\right)=0$.

Отв. $-\frac{1}{3}$. Подсказка: введите функцию и исследуйте её на монотонность.

57. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\sqrt{a+\sqrt{a+\sin x}}=\sin x$ имеет решение. Отв. $[-0,25;0]$. Подсказка: введите функцию и исследуйте её на монотонность.

58. Напишите уравненние такой касательной к графику функции $y=(2+3x)^{-\frac{1}{3}}$, которая высекает на осях координат равнобедренный треугольник.

Отв. $y=-x+\frac{2}{3}$.

59. Исследуйте функцию $y=x^2-6x+8\sqrt{x}$ на монотонность.

Отв. функция монотонно возрастает на всей области определения.

60. Изобразите множество точек M(a,b) координатной плоскости Oab таких, что уравнение $\sqrt{3x+a}=\sqrt{x^2-2bx+a}$ имеет два различных корня относительно x. Отв. в плоскости Oab множество точек на сторонах и внутри тупого угла со сторонами на прямых a=0 (ось ординат) и a+6b+9=0 за исключением точек горизонтальной прямой b=-1,5.

61.Решите систему $\begin{cases}\sqrt{x}(x+3y)=13;\\ \sqrt{y}(3x+y)=14\end{cases}$. Отв.(1;4).

Подсказка: сложив уравнения, получим куб суммы двух чисел.

62. Решите уравнение $\sqrt[5]{0,5+x}+\sqrt[5]{0,5-x}=1$.Отв. $\pm 0,5$.

63. Решите уравнение $\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(x+7)(2-x)}+\sqrt[3]{(7+x)^2}=3$. Отв.-6;1.

Подсказка: домножьте на сумму корней.

64. Решите уравнение $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$. Отв.1;2;1,5.

65. Решите уравнение $8\sqrt{x+5}=\frac{x^2+34x+161}{x+9}$. Отв.-1.

66. Решите уравнение $\frac{2x+5}{3x+8}=\frac{3+2\sqrt{x^2+3x-4}}{5+3\sqrt{x^2+3x-4}}$. Отв.5.

67. Решите уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$.   Отв.16/25.

68. Решите уравнение $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$. Отв.1;2;10.

69.Найдите все a, при которых корни уравнения $\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}=a$ существуют и принадлежат отрезку $[2;27]$.   Отв. $[1;5]$.

70. Решите уравнение $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a-x}=\sqrt[4]{b}, b>0$.

71. Решите уравнение $\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{b-x}=\sqrt[4]{a+b-2x}$.

Если Бог хочет сделать тебя счастливым, он ведёт тебя трудной дорогой, потому что лёгких путей к счастью не бывает.
Омар Хайям, известный математик.

Когда вы подвергаете сомнению проблему и видите в ней бесчисленное множество вещей, вы слышите Путь . "