Многоуровневая система задач «МНОГОЧЛЕНЫ второй степени, квадратные уравнения, неравенства и системы с параметром, модулем».

Проектирование, построение, методика обучения.

Сочинение симфонии — это создание вселенной.

Густав Малер

Конструирование многоуровневой системы задач — это сочинение математической симфонии с гармоническим сочетанием разнородных задач, проблем, исследований, с многообразными и неожиданными поворотами развития темы задач:
от задания к заданию — в глубину познания.

Неизвестный (вероятно, древнегреческий) автор

В данном пособии представлены в системе задачи по теме, начиная с самых простых и заканчивая сложными, незнакомыми решателю, предлагавшимися на конкурсных экзаменах в вузы, на ЕГЭ в течение последних нескольких десятилетий.

Задачи разделены на три уровня сложности — знакомая задача, модифицированная задача, незнакомая задача — и выстроены в целесообразной последовательности, облегчающей решателю поиск идеи решения. Знакомая задача – та, которая разбиралась на занятии; для решения модифицированной задачи требуется совершить один-два самостоятельных шага в решении (не по образцу, не встречавшиеся в решении знакомой задачи). Для решения незнакомой задачи нужно скомбинировать несколько приёмов, возможно, из разных разделов, или сконструировать новый алгоритм.

Освоение приемов и алгоритмов решения задач на квадратные уравнения и неравенства с модулем и параметром, являющихся базой для большинства разделов, **обеспечивает успешность решения задач** из других тематических областей.

В начале даётся перечень базовых задач, на их основе проектировалась система задач. Далее идут теоретические упражнения, являющиеся формулировками теорем, некоторые из которых знакомы учащимся. Доказанные теоремы интенсивно используются для решения задач. Далее даны примеры краткого решения задач, демонстрирующие используемые приёмы и методы решения задач темы и мотивирующие к изучению пособия.

Многоуровневая система задач сконструирована в четырёх вариантах по три сотни задач в каждом, включая четыре исследовательские комплексные Зачётные задания. Ко многим задачам (особенно в первом варианте) даны ответы, подсказки. Данное пособие целесообразно использовать при подготовке к государственной итоговой аттестации уже в 9-х классах, а также при начале подготовки к ЕГЭ в 10-х классах. Автор стремился к построению полной системы задач, охватывающей все существующие аспекты заявленной темы.

Пособие состоит из пяти частей:

Эвристические рекомендации решателю

Если задача не получается, бывает полезно спросить себя и ответить, например, на такие вопросы:

1. Что требуется сделать в этой задаче? Что дано? Знакома ли эта задача и алгоритм её решения? В чём состоит затруднение?
2. Можно ли эту задачу разложить на более простые, элементарные подзадачи с известным мне алгоритмом их решения? Все ли элементарные подзадачи мне знакомы? В чём состоит препятствие (затруднение) в решении этой задачи?
3. Какие теоремы, определения, приёмы можно использовать в данной ситуации? В ряде случаев может оказаться полезной подробная расшифровка определения термина или подробная расшифровка теоремы.
4. Из каких теорем может следовать (вытекать) требование задачи?
5. Если в задаче требуется построение математической модели, то все ли условия были использованы для построения уравнений, неравенств, ограничений?
6. Если геометрическая задача не решается традиционным способом (через решение треугольников), то можно попробовать применить метод координат (на плоскости или в пространстве).
7. Если уравнение или неравенство не решается традиционными алгоритмами, можно попробовать применить функционально-аналитический подход, а в случае задач с параметром – координатно-параметрический метод.

Математическое мышление проявляется в стремлении осмыслить данные факты, сопоставить и сравнить их с уже известными, связать незнакомое со знакомым, непривычное с привычным по аналогии; сложную задачу разложить на элементарные подзадачи (анализ); реконструировать логическую цепочку от требования задачи к её условию, отвечая всякий раз на вопрос: «откуда, из какой теоремы это могло бы следовать?» (это тоже анализ или решение задачи с конца); вывести следствия из условий (синтез); выявить общую закономерность по частным фактам, наблюдениям, числовым экспериментам (с последующей проверкой путём доказательства).

Математическое мышление решатель вырабатывает сам, а многоуровневая система задач помогает ему в этом, создавая тренировочную базу для формирования всех отмеченных ***проявлений*** математического мышления. Ощущение озарения при исследовании передаёт Данте:

«И тут в мой разум грянул блеск с высот,
Неся свершенье всех его усилий…»

Желаем решателю не единожды испытать этот «блеск с высот».

Базовые задачи на квадратичную функцию, квадратные уравнения, неравенства, системы с параметром, модулем .

Параметр – это буквенный коэффициент (уравнения, неравенства), значение которого неизвестно.

Базовые задачи – это основные задачи, на которые раскладывается решение любой задачи темы, аналогично тому, как любой вектор раскладывается по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Изучить базовые задачи и их модификации –

значит *научиться* строить логические цепочки рассуждения от решения базовой задачи к модифицированной, а от неё к решению незнакомой, т.е. *научиться* решать задачи.

ПЕРЕЧЕНЬ БАЗОВЫХ ЗАДАЧ НА КВАДРАТНЫЙ ТРЁХЧЛЕН

БАЗОВАЯ ЗАДАЧА №1 Задача нахождения таблично заданной функции, исследования квадратичной функции $f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$: определение $D(f); E(f)$, точек пересечения с осями координат, промежутков монотонности (промежутков обратимости функции), промежутков знакопостоянства, координат вершины параболы, экстремумов, оси симметрии, касательной (невертикальной прямой, имеющей с параболой единственную общую точку); наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке; построение графика функции, построение графика уравнения.

БАЗОВАЯ ЗАДАЧА №2 Задача исследования разрешимости уравнения $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$; определение числа корней, задача нахождения корней этого уравнения.

БАЗОВАЯ ЗАДАЧА №3 Задача нахождения достаточных условий на коэффициенты уравнения $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$, обеспечивающих выполнение соотношений между корнями типа: $x_1=\lambda x_2;\quad \alpha x_1+\beta x_2=\gamma;\quad x^2{}_1+x_2{}^2=a;\quad x^3{}_1+x_2{}^3=b$ (с применением теоремы Виета).

БАЗОВАЯ ЗАДАЧА №4 Задача нахождения достаточных условий на коэффициенты уравнения $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$, обеспечивающих принадлежность корней данным промежуткам типа: $x_1; x_2\in(-\infty;\lambda);\quad x_1; x_2\in(\lambda;+\infty);\quad x_1; x_2\in(\alpha;\beta);\quad x_1<\lambda<x_2$, где λ, α, β - заданные числа; задачи на перемежаемость, неперемежаемость корней.

БАЗОВАЯ ЗАДАЧА №5 Задача решения систем квадратных уравнений.

БАЗОВАЯ ЗАДАЧА №6 Задача решения квадратных неравенств и систем квадратных неравенств.

БАЗОВАЯ ЗАДАЧА №7 Задача решения квадратных уравнений, неравенств и систем с параметром, содержащих модуль (схемы равносильных пеобразований освобождения от знака модуля).

Используемые сокращения:

МСЗ — многоуровневая система задач;

ММЗ — математическая модель задачи;

БЗ — базовая задача;

КПМ — координатно-параметрический метод;

К.з.п. *a* — контрольное значение параметра *a*.

Конкретизируем содержание, например, четвёртой Базовой задачи на расположение корней квадратного трехчлена

Теоретические упражнения

4.1. Корни квадратного трёхчлена $f(x)=ax^2+bx+c$: x_1, x_2 действительны, различны и лежат левее числа λ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} D=b^2-4ac>0, \\ x_{вершины}=-\dfrac{b}{2a}<\lambda, \\ a\cdot f(\lambda)>0. \end{cases}$ Докажите.

4.2. Корни квадратного трёхчлена $f(x)=ax^2+bx+c$: x_1, x_2 действительны, различны и лежат правее числа λ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} D=b^2-4ac>0, \\ x_{вершины}=-\dfrac{b}{2a}>\lambda, \\ a\cdot f(\lambda)>0. \end{cases}$ Докажите.

4.3. Корни квадратного трёхчлена $f(x)=ax^2+bx+c$: x_1, x_2 действительны, различны и принадлежат интервалу $(\alpha;\beta)$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} D=b^2-4ac>0, \\ \alpha<x_{вершины}<\beta, \\ a\cdot f(\alpha)>0, \\ a\cdot f(\beta)>0. \end{cases}$ Докажите.

4.4. Корни квадратного трёхчлена $f(x)=ax^2+bx+c$: x_1, x_2 действительны, различны и число λ лежит между ними тогда и только тогда, когда $a\cdot f(\lambda)<0$. Докажите.

4.5. Корни квадратных трехчленов $f_1(x)=x^2+p_1x+q_1$ и $f_2(x)=x^2+p_2x+q_2$ перемежаются (т.е. оба трехчлена имеют по 2 корня и между корнями одного трехчлена есть только один корень другого) тогда и только тогда, когда $\begin{cases} D_1>0, \\ D_2>0, \\ f_1(x_0)=f_2(x_0), \\ f_i(x_0)<0,\ i=\overline{1,2} \end{cases}$ Докажите.

4.6. Корни квадратных трехчленов $f_1(x)=x^2+p_1x+q_1$ и $f_2(x)=x^2+p_2x+q_2$ не перемежаются (т.е. оба трехчлена имеют по 2 корня и между корнями одного трехчлена нет ни одного корня другого) тогда и только тогда, когда $\begin{cases} D_1>0, \\ D_2>0, \\ f_1(x_0)=f_2(x_0), \\ f_i(x_0)>0,\ i=\overline{1,2} \end{cases}$ Докажите.

Примеры краткого решения задач

Пример 1. Вычислите сумму квадратов действительных корней уравнения $x^2+2(a^2-3a)x-(6a^3-14a^2+4)=0$ и найдите значения параметра a, при которых она принимает максимальное значение.

Решение. Дискриминант квадратного уравнения $D(a)=(a^2-1)(a^2-4)\geq 0$ при $a\leq -2; -1\leq a\leq 1; a\geq 2$. Сумма квадратов корней по теореме Франсуа Виета $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4(a^2-3a)^2+2(6a^3-14a^2+4)=4(a^4-3a^3+a^2+1)=f(a)$. Исследуем на максимум $f(a)$: $f'(a)=4a^3-9a^2+2a=a(4a^2-9a+2)=0;$ критические точки $a\in\{0;0{,}25;2\}$, причём $a_{\max}=0{,}25$. Следовательно, $\max(x_1^2+x_2^2)=\max f(a)=f(0{,}25)=\dfrac{261}{64}$.

Пример 2. При каждом значении параметра a определите количество корней уравнения $x^4-4x^3-6x^2+4ax+6a-a^2=0$.

Решение. Перепишем уравнение, как квадратное относительно а: $a^2+a(-6-4x)+x^2(-x^2+4x+6)=0$. Тогда $a_1=x^2; a_2=(-x^2+4x+6)$- корни квадратного уравнения, т.к. они удовлетворяют теореме Виета: $a_1+a_2=4x+6; a_1\cdot a_2=x^2(-x^2+4x+6)$. Таким образом, исходное уравнение четвёртой степени равносильно совокупности двух квадратных уравнений: $\left[\begin{array}{l} x^2=a; \\ x^2-4x-6+a=0. \end{array}\right.$ Первое уравнение разрешимо при $a\geq 0$, второе при $a\leq 10$. Проверим контрольные значения параметра a (к.з.п.a), при которых корни первого уравнения являются также корнями второго: подставляем $x=\pm\sqrt{a}$ во второе: $a\pm 4\sqrt{a}-6+a=0 \Leftrightarrow a\in\{1;9\}$. На координатной прямой ОА изобразим соответствующие промежутки и укажем над ними количество корней (это называется развёрткой по параметру):

a<0	a=0	0<a<1	1<a<9	a=9	9<a<10	a=10	a>10
2 корня	3 корня	4 корня	4 корня	3 корня	4 корня	3 корня	2 корня

Пример 3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x+y+2z=4x^2+y^2; \\ 2x+y+3z=a. \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение. Выразим из второго уравнения z и подставим в первое $z=\dfrac{a-2x-y}{3} \Rightarrow 12x^2+x+3y^2-y=2a.$ Если выражать x или y, то придётся возводить в квадрат трёхчлен при подстановке в первое уравнение. Выделим полные квадраты по переменным x,y $12\left(x+\dfrac{1}{24}\right)^2+3\left(y-\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{96a+5}{48}$. Левая часть неотрицательна, правая при $a<-\dfrac{5}{96}$ отрицательна, равенство невозможно, корней нет. При $a=-\dfrac{5}{96}$ правая часть равна нулю, левая обращается в нуль при единственной паре $x=-\dfrac{1}{24}; y=\dfrac{1}{6}$. При этом система имеет единственное решение, где z вычисляется единственным образом $z=\dfrac{-\frac{5}{96}+\frac{1}{12}-\frac{1}{6}}{3}$. При $a>-\dfrac{5}{96}$ уравнение $12\left(x+\dfrac{1}{24}\right)^2+3\left(y-\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{96a+5}{48}$ приводится к каноническому уравнению эллипса с полуосями, не совпадающими с осями координат; очевидно, что на эллипсе бесконечное множество точек, удовлетворяющих системе, требование задачи о единственности решения не выполняется.

Ответ: при $a=-\dfrac{5}{96}$ данная система имеет единственное решение.

Пример 4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $64x^6+4x^2=(3x+a)^3+3x+a$: 1)не имеет корней; 2) имеет единственный корень.

Решение. <u>1 способ (используется линия функций)</u>. Рассмотрим функцию $f(t)=t^3+t$, она монотонно возрастает, так как имеет положительную производную; данное уравнение запишем в виде $f(4x^2)=f(3x+a)$. Поскольку введённая функция монотонна, то каждое своё значение из множества значений она принимает только один раз, поэтому из равенства значений функции следует равенство значений аргументов, те. $f\left(4x^2\right)=f\left(3x+a\right)\Leftrightarrow 4x^2=3x+a\Leftrightarrow 4x^2-3x-a=0; D=9+16a<0\Leftrightarrow a<-\dfrac{9}{16}$.

Ответ: при $a<-\dfrac{9}{16}$ данное уравнение не имеет корней; при $a=-\dfrac{9}{16}$ данное уравнение имеет единственный корень.

<u>2 способ (используется линия преобразований)</u>. Используем формулу сокращённого умножения в следующей редакции $a^3-b^3=(a-b)\left(\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2\right)$, данное уравнение перепишем так: $\left(4x^2\right)^3-(3x+a)^3+\left(4x^2-3x-a\right)=0$ и разложим разность кубов по записанной формуле: $\left(\left(4x^2\right)-(3x+a)\right)\left(\left(4x^2+\dfrac{3x+a}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}(3x+a)^2\right)+\left(4x^2-3x-a\right)=0$; вынося общий множитель $\left(4x^2-3x-a\right)$ за скобку, получаем разложение: $\left(\left(4x^2\right)-(3x+a)\right)\left(\left(4x^2+\dfrac{3x+a}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}(3x+a)^2+1\right)=0$. Причём второй множитель (длинная скобка) в ноль не обращается, она положительна, как сумма квадратов плюс 1; следовательно, сокращая уравнение на этот множитель, получаем равносильное исходному уравнение: $\left(4x^2-3x-a\right)=0$, оно не имеет корней при $a<-\dfrac{9}{16}$; при $a=-\dfrac{9}{16}$ данное уравнение имеет единственный корень.

Пример 5. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $\left(2x^2+x+3a^2+5\right)^2=12a^2\left(2x^2+x+5\right)$ имеет ровно один корень.

Решение. Замена $\left(2x^2+x+5\right)=t$ приводит уравнение к виду $\left(t+3a^2\right)^2=12a^2t\Leftrightarrow\left(t-3a^2\right)^2=0\Leftrightarrow t=3a^2$.
Обратная замена даёт: $\left(2x^2+x+5\right)=3a^2\Leftrightarrow 2x^2+x+5-3a^2=0; D=0\to a=\pm\dfrac{\sqrt{26}}{4}$.

Отв. при $a=\pm\dfrac{\sqrt{26}}{4}$ данное уравнение имеет ровно один корень.

Пример 6. При $a>0$ решите неравенство $|x|\le a$.

Решение**.** Неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ x\le a\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ -x\le a\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le x\le a\\ -a\le x\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow -a\le x\le a.$$

Заметим, что при a<0 исходное неравенство решений не имеет.

Пример 7. При $a>0$ решите неравенство $|x|\ge a$.

Решение**.** Неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ x\ge a\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ -x\ge a\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge a\\ x\le -a\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;-a]\cup[a;+\infty).$$

Пример 8. Докажите, что среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического, причём равенство достигается лишь в случае равенства этих чисел ***(неравенство Коши)***, т.е. $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$, где $a\ge 0, b\ge 0$.

Решение. Выделяем полный квадрат: $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab}\ge 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0.$ QED.

Причём, равенство возможно только при a=b. Неравенство можно доказать для $n, n\ge 3$ неотрицательных слагаемых.

Пример 9. Решим неравенство $\left||x^3+x-3|-5\right|\le x^3-x+8$.

Решение. Используем тот факт, что неравенство $|f(x)|\le g(x)$ равносильно двойному неравенству $-g(x)\le f(x)\le g(x)$. Таким образом, исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}|x^3+x-3|-5\le x^3-x+8\\ |x^3+x-3|-5\ge -x^3+x-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x^3+x-3|\le x^3-x+13\\ |x^3+x-3|\ge -x^3+x-3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\begin{cases}x^3+x-3\le x^3-x+13\\ x^3+x-3\ge -x^3+x-13\end{cases}\\ \left[\begin{array}{l}x^3+x-3\ge -x^3+x-3\\ x^3+x-3\le x^3-x+3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{cases}x^3\le 8\\ x^3\ge -5\end{cases}\\ \left[\begin{array}{l}x^3\ge 0\\ x\le 3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\quad -\sqrt[3]{5}\le x\le 8.$$

Пример 10. Докажите справедливость равносильных преобразований:

а) $|f(x)|=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}f(x)=g(x)\\ f(x)=-g(x)\end{array}\right.\end{cases}$

Б) $f(|x|)=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0,\\ f(x)=g(x);\end{cases}$ или $\begin{cases}x<0,\\ f(-x)=g(x)\end{cases}$.

С) $|f(x)|=|g(x)|\Leftrightarrow f^2=g^2\Leftrightarrow(f-g)(f+g)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=g(x)\\ f(x)=-g(x)\end{array}\right.$.

Д) $|f(x)|=-f(x)\Leftrightarrow f(x)\le 0.$

Е) $|f(x)+g(x)|=f(x)+g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0;\\ g(x)\ge 0.\end{cases}$

Ж) $\left|f(x)+g(x)\right| = f(x)-g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geq 0; \\ g(x)\leq 0. \end{cases}$

Пример 11. Найдите площадь фигуры, которая задаётся на координатной плоскости следующими условиями:

$\begin{cases} \left|\,|x-y|-|y-1|\,\right| = x-2y+1 \\ (x-1)^2+(y-1)^2 \leq 1 \end{cases}$. Подсказка: второе неравенство задает круг, а первое уравнение задает секторы в этом круге. Отв. $\dfrac{\pi}{8}$

Покажем, что многие задачи из тригонометрии, иррациональных, логарифмических, показательных, дробно-рациональных уравнений приводят к базовым задачам БЗ.4.1;4.2; 4.3; 4.4 на квадратный трёхчлен и расположение его корней относительно данных точек или промежутков и другим задачам.

Пример 12. При каких значениях *а* уравнение $\sin^6 x+\cos^6 x+a\sin x\cos x=0$ имеет хотя бы один корень?

После преобразований по формуле суммы кубов и замены $t=\sin x\cos x$ получаем задачу: при каких а квадратный трёхчлен $f(t)=3t^2-at-1$ имеет корни на отрезке $[-0{,}5;0{,}5]$.Это БЗ.4.3. Рекомендуется восстановить пропущенные выкладки. Отв. $a\leq -0{,}5; a\geq 0{,}5$.

Пример 13. При каких значениях параметра *а* уравнение $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}\right)^2+2a\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}+1=0$ имеет решение? После преобразований и замены $t=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$ с учетом $t\in[0;0{,}5]$,получаем задачу: при каких а квадратный трёхчлен $f(t)=t^2+2at+1$ имеет корни на отрезке $[0;0{,}5]$.Это БЗ.4.3. Рекомендуется восстановить пропущенные выкладки. Отв. $a\leq -1{,}25$.

Пример 14. Решите уравнение $4^{1-|x-1|}-2(a-1)2^{1-|x-1|}+3a-5=0$ при всех значениях параметра *а*. После преобразований и замены $t=2^{1-|x-1|}$ с учетом $t\in(0;2]$,получаем задачу: при каких а квадратный трёхчлен $f(t)=t^2-(a-1)t+3a-5$ имеет корни на промежутке $(0;2]$.Это БЗ.4.3. Рекомендуется восстановить пропущенные выкладки.

Пример 15. Решите уравнение $\sin 4x=a\cdot tgx$ при всех значениях параметра *а*.

После преобразований по формулам синуса и косинуса двойного угла и замены $t=\cos^2 x$ получаем задачу: при всех а для квадратного уравнения $f(t)=8t^2-4t-a=0$ найти корни на отрезке $[0;1]$. Эту задачу можно свести к БЗ.4.4; 4.3 или непосредственно решив квадратное уравнение, выяснить, при каких а корни принадлежат отрезку $[0;1]$.

Пример 16. Найдите все целые к, при каждом из которых уравнение $2\sin^2 x+6\cos^2\dfrac{x}{2}=5-2k$ имеет решение.

После преобразований по формуле понижения степени косинуса и по основному тригонометрическому тождеству, и замены $t=\cos x$ получаем задачу: при каких а квадратный трёхчлен $f(t)=2t^2-3t-2k$ имеет корни на отрезке $[-1;1]$.Это БЗ.4.3. ($k\in\{0;1;2\}$).

Пример 17. Решите уравнение $\log_{4-x^2}(ax+2)=\log_{\frac{1}{4-x^2}}(x-1)$ при всех значениях параметра *a*.

После преобразований получаем задачу: при каких а квадратный трёхчлен $f(x)=ax^2-(a-2)x-3$ имеет корни на интервале $(1;2)$ и не равные $\sqrt{3}$.Это две БЗ.4.3.

Пример 18. При каких а уравнение $a\cdot\sin 2x=\sin 4x+\sin 6x$ имеет хотя бы один корень на интервале $\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$?

После преобразований по формулам синуса двойного и синуса тройного аргумента, вынесения общего множителя, равного $\sin 2x$ за скобку, и замены $t=\cos 2x$ получаем задачу: при каких а квадратный трёхчлен $f(t)=4t^2+2t-1-a$ имеет хотя бы один корень на интервале $(-1;1)$. Это БЗ.4.3; 4.4. Отв. $a\in[-1{,}25;1]\cup(1;+\infty)$.

Пример 19. Решите уравнение $\sqrt{a-\sin x}=\sqrt{\cos 2x+3a}$ при всех значениях параметра *a*.

После преобразований и замены $t=\sin x$ получаем задачу: при каких *a* квадратный трёхчлен $f(t)=2t^2-t-2a-1$ имеет корни на отрезке $[-1;1]$, удовлетворяющие неравенству $t\le a$.Это модифицированная БЗ.4.3. Отв. $a\in\left[\frac{3-\sqrt{17}}{4};1\right]$.

Приведённые примеры убеждают в полезности овладения техникой решения базовых задач на квадратный трёхчлен. Решение заданий из предлагаемой многоуровневой системы задач на многочлены второй степени создаёт основу, базу для успешного решения задач остальных разделов школьного курса математики.

Базовые задачи на расположение корней квадратного трехчлена и примеры решения задач

4.1 Корни квадратного трёхчлена $f(x)=ax^2+bx+c$: x_1,x_2 действительны, различны и лежат левее числа λ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} D=b^2-4ac>0, \\ x_{вершины}=-\dfrac{b}{2a}<\lambda, \\ a\cdot f(\lambda)>0. \end{cases}$ Докажите.

4.2 Корни квадратного трёхчлена $f(x)=ax^2+bx+c$: x_1,x_2 действительны, различны и лежат правее числа λ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} D=b^2-4ac>0, \\ x_{вершины}=-\dfrac{b}{2a}>\lambda, \\ a\cdot f(\lambda)>0. \end{cases}$ Докажите.

4.3 Корни квадратного трёхчлена $f(x)=ax^2+bx+c$: x_1,x_2 действительны, различны и принадлежат интервалу $(\alpha;\beta)$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} D=b^2-4ac>0, \\ \alpha<x_{вершины}<\beta, \\ a\cdot f(\alpha)>0, \\ a\cdot f(\beta)>0. \end{cases}$ Докажите.

4.4 Корни квадратного трёхчлена $f(x)=ax^2+bx+c$: x_1,x_2 действительны, различны и число λ лежит между ними тогда и только тогда, когда $a\cdot f(\lambda)<0$. Докажите.

4.5 Корни квадратных трехчленов $f_1(x)=x^2+p_1x+q_1$ и $f_2(x)=x^2+p_2x+q_2$ перемежаются (т.е. оба трехчлена имеют по 2 корня и между корнями одного трехчлена есть только один корень другого) тогда и только тогда, когда $\begin{cases} D_1>0, \\ D_2>0, \\ f_1(x_0)=f_2(x_0), \\ f_i(x_0)<0,\ i=\overline{1,2} \end{cases}$ Докажите.

4.6 Корни квадратных трехчленов $f_1(x)=x^2+p_1x+q_1$ и $f_2(x)=x^2+p_2x+q_2$ не перемежаются (т.е. оба трехчлена имеют по 2 корня и между корнями одного трехчлена нет ни одного корня другого) тогда и только тогда, когда $\begin{cases} D_1>0, \\ D_2>0, \\ f_1(x_0)=f_2(x_0), \\ f_i(x_0)>0,\ i=\overline{1,2} \end{cases}$ Докажите.

Обобщением и развитием этого типа задач являются задачи на расположение корней многочленов третьей и четвёртой степеней, которые будут рассмотрены во второй части Многоуровневой Системы Задач «Многочлены высших степеней».

Пример 20. При каких значениях параметра a квадратное уравнение $ax^2+2(a+1)x+2a=0$ имеет:

а) 2 различных отрицательных корня?

б) 2 различных положительных корня?

в) 2 различных корня в интервале (1, 2)?

г) 2 корня разных знаков?

Решение.

а) Это базовая задача 4.1 ($\lambda=0$). Решаем систему

$$\begin{cases} D=b^2-4ac>0, \\ x_{вершины}=-\dfrac{b}{2a}<\lambda, \\ a\cdot f(\lambda)>0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2-2a^2>0, \\ -\dfrac{a+1}{a}<0, \\ a\cdot 2a>0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a^2+2a+1>0, \\ \dfrac{a+1}{a}>0, \\ a^2>0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2a-1<0, \\ a\in(-\infty;\,-1)\cup(0;\,+\infty) \\ a\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow a\in\left(0;\,1+\sqrt{2}\right)$$

При $a\in\left(0;\,1+\sqrt{2}\right)$ два различных отрицательных корня.

б) Это базовая задача 4.2 ($\lambda=0$). Решаем систему

$$\begin{cases} D=b^2-4ac>0 \\ x_{вершины}=-\dfrac{b}{2a}>\lambda \\ a\cdot f(\lambda)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in\left(1-\sqrt{2}\,;\,1+\sqrt{2}\right) \\ a\in(-1;\,0) \\ a\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a\in\left(1-\sqrt{2}\,;\,0\right)$$

При $a\in\left(1-\sqrt{2}\,;\,0\right)$ 2 различных положительных корня.

в) Это базовая задача 4.3 ($\alpha = 1, \beta = 2$). Решаем систему

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac > 0 \\ 1 < x_{вершины} < 3 \\ a \cdot f(1) > 0 \\ a \cdot f(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{2} < a < 1+\sqrt{2} \\ a \cdot (a + 2a + 2 + 2a) > 0 \\ a \cdot (4a + 4a + 4 + 2a) > 0 \\ 1 < -\dfrac{a+1}{a} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{2} < a < 1+\sqrt{2} \\ a \cdot (a + 2a + 2 + 2a) > 0 \\ a \cdot (4a + 4a + 4 + 2a) > 0 \\ 1 < -\dfrac{a+1}{a} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{2} < a < 1+\sqrt{2} \\ a \cdot (5a + 2) > 0 \\ -2 < \dfrac{a+1}{a} < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{2} < a < 1+\sqrt{2} \\ a \in (-\infty;\, 0.4) \cup (0;\, +\infty) \\ \dfrac{a+1}{a} + 2 > 0 \\ \dfrac{a+1}{a} + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{2} < a < 1+\sqrt{2} \\ a \in (-\infty;\, 0.4) \cup (0;\, +\infty) \\ \dfrac{3a+1}{a} > 0 \\ \dfrac{2a+1}{a} < 0 \end{cases}$$

При $a \in \left(1-\sqrt{2}\,;\, -0.4\right)$ 2 корня в интервале (1, 2).

Замечание: задания а) и б) можно было решить с применением теоремы Франсуа Виета, но задачу в) с помощью этой теоремы решить проблематично.

г) Это базовая задача 4.4 ($\lambda = 0$). Решаем неравенство

$a \cdot f(\lambda) < 0 \;\Leftrightarrow\; a \cdot 2a < 0;\; a^2 < 0$ - нет решений.

Пример 21. Найдите все значения параметра *a*, при которых корни уравнений $x^2 + \dfrac{8x}{a} - \dfrac{3}{a} = 0$ и $x^2 + \dfrac{4x}{a} - \dfrac{19}{a} = 0$ перемежаются (т.е. оба уравнения имеют по два корня и между корнями одного из уравнений есть только один корень другого уравнения.).

Решение. Это базовая задача 4.5 ($a \neq 0$). Решим систему

$$\begin{cases} D_1 > 0, \\ D_2 > 0, \\ f_1(x_0) = f_2(x_0), \\ f_i(x_0) < 0,\; i = \overline{1,2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{64}{a^2} + \dfrac{12}{a} > 0 \\ \dfrac{16}{a^2} + \dfrac{78}{a} > 0, \quad a \neq 0 \\ x_0^2 + \dfrac{8x_0}{a} - \dfrac{3}{a} = x_0^2 + \dfrac{4x_0}{a} - \dfrac{19}{a} \\ f_i(x_0) < 0,\; i = \overline{1,2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{64+12a}{a^2} > 0 \\ \dfrac{16+78a}{a^2} > 0, \quad a \neq 0 \\ x_0 = -4 \\ f_2(-4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -\dfrac{16}{3} \\ a > -\dfrac{4}{19}, \quad a \neq 0 \\ 16 - \dfrac{16}{a} - \dfrac{19}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -\dfrac{16}{3} \\ a > -\dfrac{4}{19} \\ \dfrac{35-16a}{a} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a \in \left(0;\, \frac{35}{16}\right).$$

При $a \in \left(0;\, \dfrac{35}{16}\right)$ корни уравнений перемежаются.

Пример 22. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых корни уравнений $x^2 + \dfrac{2x}{a} + 28 = 0$ и $x^2 + \dfrac{12x}{a} - 8 = 0$ не перемежаются, т.е. оба уравнения имеют по два корня и между двумя корнями одного из уравнений нет ни одного корня другого уравнения.

Решение. Это базовая задача 4.6 ($a \neq 0$). Решаем систему

$$\begin{cases} D_1 > 0, \\ D_2 > 0, \\ f_1(x_0) = f_2(x_0), \\ f_i(x_0) > 0,\ i = \overline{1,2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \dfrac{4}{a^2} - 112 > 0 \\ \dfrac{144}{a^2} + 32 > 0 \ (\text{верно } \ \forall a) \\ x_0^2 + \dfrac{2x_0}{a} + 28 = x_0^2 + \dfrac{12x_0}{a} - 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \dfrac{1}{a^2} - 28 > 0 \\ x_0 = 3.6a \\ 12.96a^2 + 7.2 + 28 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{28a^2 - 1}{a^2} < 0$$

$\Leftrightarrow a \in \left(-\dfrac{1}{\sqrt{28}};\, 0\right) \cup \left(0;\, \dfrac{1}{\sqrt{28}}\right)$. При $a \in \left(-\dfrac{1}{\sqrt{28}};\, 0\right) \cup \left(0;\, \dfrac{1}{\sqrt{28}}\right)$ корни уравнений не перемежаются.

Рассмотрим другие примеры решения задач на квадратный трёхчлен.

Пример 23. Найдите все значения параметра *a*, при которых множество решений неравенства $\frac{1}{2}x(x-2) \le a(|x-1|-1)$ содержит число, равное сумме кубов корней уравнения $x^2 - 3x + 1 = 0$.

Ответ: требования задачи выполнены при $a \ge 9$.

Решение.

1) Квадратное уравнение имеет два различных корня x_1; x_2, т.к. D>0, по теореме Франсуа Виета $x_1 + x_2 = 3; \quad x_1 \cdot x_2 = 1$, тогда вычислим $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 \cdot x_2\right) = 3 \cdot (9-3) = 18.$
2) По условию, необходимо, чтобы число x=18 удовлетворяло исходному неравенству, найдём необходимое условие на а. $\frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 16 \le a \cdot 16 \Leftrightarrow a \ge 9.$
3) Покажем, что условие $a \ge 9$ является достаточным для выполнения требования задачи. Построив в одной системе координат параболу $y = \frac{1}{2}x(x-2)$ и угол (галочку) $y = a(|x-1|-1)$, обнаруживаем, что графики функций пересекутся в точке с абсциссой x=18 при a=9: $\frac{1}{2}x(x-2) = a(|x-1|-1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x(x-2) = a(x-2)$ при x=18 получаем $9 \cdot 16 = a \cdot 16 \Leftrightarrow a = 9.$ Если a>9, то абсцисса точки пересечения x>18, т.е. x=18 всегда принадлежит множеству решений нервенства. Ответ: требования задачи выполнены при $a \ge 9$.

Пример 24. Найдите все значения параметра *a*, при которых количество корней уравнения $a^2 + 6a + 11 = \frac{6a + 25 - (3a+7)}{x-2} 0\ (1)$ равно количеству корней уравнения $1 - (a-1)x - (3a+5)x^2 = 0\ (2)$. Решите первое уравнение при всех найденных значениях а.

Отв.по одному корню при a=-7;x=4,75. $a_2 = -\frac{5}{3} \Rightarrow \exists! \ x = \frac{203}{52}$.

Решение.

1) ОДЗ $x \neq 2$; контрольное значение параметра $a = -\frac{5}{3}$, при этом второе уравнение имеет единственный корень $x = -\frac{3}{8}$; а первое уравнение имеет единственный корень $x = \frac{203}{52}$. Значит, $a = -\frac{5}{3}$ удовлетворяет требованию задачи.

2) Исследуем количество корней второго уравнения в зависимости от значений параметра *a*, для наглядности сделаем развёртку по параметру.

a<-7	*a*=-7	-7 <*a* <-3	*a*=-3	$-1 < a < -\frac{5}{3}$	$a = -\frac{5}{3}$	$a > -\frac{5}{3}$
2 корня	1 корень	0 корней	1 корень	1 корень	1 корень	2 корня

3)Аналогично исследуем количество корней первого уравнения в зависимости от значений параметра *a*, для наглядности сделаем развёртку по параметру. После преобразований на ОДЗ получаем уравнение вида $2a^2 + 18a + 47 = x(a+6)(a+3)$. При $a \neq -3; a \neq -6$ уравнение имеет единственный корень $x = \frac{2a^2 + 18a + 47}{(a+6)(a+3)}$. Таким образом, из трёх значений $a \in \left\{-7; -3; -\frac{5}{3}\right\}$ после исключения а=-3, осталось два значения параметра, $a \in \left\{-7; -\frac{5}{3}\right\}$, удовлетворяющих требованию задачи. Подставляя последовательно эти значения в первое уравнение, найдем соответствующие значения х=4,75; $x = \frac{203}{52}$.

Пример 25. Найдите все значения параметра *a*, при которых каждое из уравнений

$$a^2 + 4a + 5 - 3x + \frac{\sqrt{a+2}}{x^2} = 0 \ (1) \quad \text{и} \quad x + \frac{2}{x} + \frac{x + 3a + 9}{a+2} = 0 \ (2)$$

имеет хотя бы один корень, и при этом произведение количества корней одного на количество корней другого равно $\frac{2}{3}\log_2(7-a)$.

Решите первое уравнение при всех найденных значениях а.

Решение.

1) Необходимо, чтобы было а<7, а>-2 и число $n = \frac{2}{3}\log_2(7-a)$ было целым положительным, следовательно, число $n = \frac{1}{3}\log_2(7-a)$ должно быть равным $\frac{1}{2}$, или натуральным. Выясним, при каких значениях *a* требование выполняется: $\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\log_2(7-a) \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \log_2(7-a) \Leftrightarrow 2^{\frac{3}{2}} = 7 - a;$ $a = 7 - \sqrt{8} \in (-2;7)$, но при этом значении а второе уравнение имеет два корня, т.к. дискриминант его положителен. Следовательно, произведение числа корней больше или рано 2, а $\frac{2}{3}\log_2(7-a) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, значит, $a \neq 7 - \sqrt{8}$. Рассмотрим

второй случай: $n=\frac{1}{3}\log_2(7-a)\Leftrightarrow 3n=\log_2(7-a)\Leftrightarrow 8^n=7-a\Leftrightarrow a=7-8^n$. Таким образом получили двойное неравенство $-2<a<7\Leftrightarrow -2<7-8^n<7\Leftrightarrow n=1\Rightarrow a=-1.$

2) Итак, необходимому условию удовлетворяет единственное значение а=-1. Проверим достаточность этого условия.

$\begin{cases} a^2+4a+5-3x+\dfrac{\sqrt{a+2}}{x^2}=0; \\ a=-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3x+\dfrac{1}{x^2}=0; \\ a=-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^3+2x^2+1=0; \\ a=-1; \end{cases} \Leftrightarrow \exists! x=1;$ - 1корень.

$\begin{cases} x+\dfrac{2}{x}+\dfrac{x+3a+9}{a+2}=0; \\ a=-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{2}{x}+\dfrac{x+6}{1}=0; \\ a=-1; \end{cases} \Leftrightarrow x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2};$ -два корня. Произведение числа корней уравнений равно $\frac{2}{3}\log_2(7+1)=2.$ Ч.т.д.

Пример 26. Найдите все значения параметра *а*, при которых решение неравенства $||x|-3|\le 3a|x|$ содержит не менее двух и не более четырёх положительных простых чисел. Отв. $\left[\frac{2}{15};\frac{8}{33}\right)$.

Решение.

1) При $a<0$ решений нет. При а=0 числа $x\in\{-3;3\}$требованию задачи не удовлетворяют.

2) При а>0 имеем систему $\begin{cases} -3a|x|\le|x|-3\le 3a|x|; \\ a>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\le|x|(1+3a); \\ |x|(1-3a)\le 3; \\ a>0; \end{cases}$ при $a\ge\frac{1}{3}$ второму неравенству и системе удовлетворяют бесконечное множество значений х, требование задачи не выполняется. Значит, $a\in\left(0;\frac{1}{3}\right)$. Тогда, учитывая положительность значений х, система примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{3}{(1+3a)}\le|x|; \\ |x|\le\dfrac{3}{(1-3a)}; \\ 0<a<\dfrac{1}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{(1+3a)}\le\dfrac{3}{(1-3a)}; \\ \dfrac{3}{(1+3a)}\le x\le\dfrac{3}{(1-3a)}; \\ 0<a<\dfrac{1}{3}; \quad x>0; \end{cases}$$

Для наглядности систему решаем графически: в системе координат аох по оси абсцисс откладываем параметр а, $0<a<\frac{1}{3}$, масштаб по оси абсцисс берем такой: три клетки равно $\frac{1}{30}$, по оси ординат (масштаб обычный) – значения функций $x=\dfrac{3}{(1+3a)};\ x=\dfrac{3}{(1-3a)}$. Исследование показывает, что два простых числа 3,5 между гиперболами появятся при $a=\frac{4}{30}$, три простых числа 2,3,5 между гиперболами появятся при $a=\frac{5}{30}$,

четыре простых числа 2,3,5,7 между гиперболами появятся при $a=\frac{4}{21}$,

пять простых чисел 2,3,5,7,11 между гиперболами появятся при $a=\frac{8}{33}$, значит,

ответ: при $a\in\left[\frac{2}{15};\frac{8}{33}\right)$ требование задачи выполнено.

Пример 27 (МГУ). Найдите все значения параметра с, при которых система неравенств $\begin{cases}3x^2-8xy-8y^2\geq 2;\\ x^2-4xy+2y^2\leq\dfrac{c+1}{2c+1}\end{cases}$ имеет решение. Ответ: с>-0,5.

Решение.

Умножим второе неравенство на -4 и сложим со вторым: цель- выделить полный квадрат

$$\begin{cases}3x^2-8xy-8y^2\geq 2;\\ -4x^2+16xy-8y^2\geq\dfrac{-4c-4}{2c+1}\end{cases}\Rightarrow -x^2+8xy-16y^2\geq\frac{-2}{2c+1}\Leftrightarrow(x-2y)^2\leq\frac{2}{2c+1}$$

Для разрешимости последнего неравенства **необходимо** с>-0,5.

Докажем, что это условие **достаточно** для разрешимости исходного неравенств.

Изучим функцию $y=\dfrac{x+1}{2x+1}=\dfrac{\frac{1}{2}(2x+1)+0.5}{2x+1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{0.5}{2x+1}$ на интервале $x\in(0{,}5;+\infty)$: эта функция убывает от бесконечности до 0,5, графиком является ветка гиперболы, расположенная выше горизонтальной асимптоты $y=\frac{1}{2}$ и правее вертикальной асимптоты $x=-\frac{1}{2}$. Множеством значений функции является интервал $E\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)=(0{,}5;+\infty)$. Теперь ясно, что если пара чисел (x;y) удовлетворяет уравнению $x^2-4xy+2y^2=0{,}5$, то она тем более удовлетворяет неравенству $x^2-4xy+2y^2\leq\dfrac{c+1}{2c+1}$, т.к. $\dfrac{c+1}{2c+1}>\dfrac{1}{2}$ при $c>-\dfrac{1}{2}$.

Иначе: $\dfrac{1}{2}=x^2-4xy+2y^2\leq\dfrac{c+1}{2c+1}$. Поэтому, для доказательства разрешимости неравенства $x^2-4xy+2y^2\leq\dfrac{c+1}{2c+1}$ достаточно будет доказать разрешимость уравнения $\dfrac{1}{2}=x^2-4xy+2y^2$ при $c>-\dfrac{1}{2}$.

Аналогично, если пара чисел (x;y) удовлетворяет уравнению $3x^2-8xy-8y^2=2$, то она тем более удовлетворяет неравенству $3x^2-8xy-8y^2\geq 2$, т.к. $2\geq 2$ - верно. Поэтому, для доказательства разрешимости неравенства $3x^2-8xy-8y^2\ge 2$ достаточно будет доказать разрешимость уравнения $3x^2-8xy-8y^2=2$.

Таким образом, достаточно доказать разрешимость системы $\begin{cases}3x^2-8xy-8y^2=2\\ x^2-4xy+2y^2=\dfrac{1}{2};\end{cases}$

Умножим второе уравнение на -4 и сложим со вторым: цель- выделить полный квадрат

$-x^2+8xy-16y^2=0\Leftrightarrow(x-4y)^2=0\Leftrightarrow x-4y=0\Leftrightarrow x=4y$. Подставляя во второе уравнение системы уравнений, получим: $y=\pm 0{,}5\Rightarrow x=\pm 2$. Ответ: с>-0,5.

Пример 28. Найдите все значения параметра *a*, при которых количество корней уравнения $(a-6)x^3-4x^2+x=0$ (1) равно количеству общих точек линий $x^2+y^2=a^2$ и $y=8-|x-2|$ (2). Ответ: при $a\in\{\pm\sqrt{68};\pm5\sqrt{2};6;10\}$.

Решение.

1) Исследуем количество корней уравнения $(a-6)x^3-4x^2+x=0\Leftrightarrow x((a-6)x^2-4x+1)=0$ в зависимости от значений параметра *a* и построим развёртку по параметру.
2) Старший коэффициент равен 0 при a=6, исследуем к.з.п.a=6: $\begin{cases}a=6;\\ -4x^2+x=0\end{cases}\Rightarrow x\in\{0;0{,}25\}$ - 2 корня.
3) При $\begin{cases}a\ne 6;\\ x((a-6)x^2-4x+1)=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ne 6;\\ x\in\left\{0;\dfrac{2\pm\sqrt{10-a}}{a-6}\right\};\end{cases}$ при a<10- три корня; при a=10 – 2 корня; при a>10 – один корень. Развёртка по параметру *a* имеет вид:

a	*a*<6	*a*=6	6<*a*<10	*a*=10	*a*>10
Количество корней ур-я $x((a-6)x^2-4x+1)=0$	3	2	3	2	1

4) В одной системе координат XOYпостроим окружность $x^2+y^2=a^2$ с центром в начале координат, радиуса $|a|$ и прямой угол $y=8-|x-2|$ с вершиной в точке (2;8), направленный ветвями вниз. При $0\le|a|<3\sqrt{2}$ фигуры не имеют общих точек;

   при $|a|=3\sqrt{2}$ происходит касание прямой и окружности, одна общая точка;

   при $3\sqrt{2}<|a|<5\sqrt{2}$ - две точки пересечения;

   при $|a|=5\sqrt{2}$ - происходит касание второй прямой и окружности, три общих точки;

   при $5\sqrt{2}<|a|<\sqrt{68}$ - четыре точки пересечения;

   при $|a|=\sqrt{68}$ - три точки пересечения;

   при $|a|>\sqrt{68}$ - две точки пересечения. Полученный результат можно также представить графически на числовой прямой OA в виде развёртки по параметру.
5) Сравнивая полученные развёртки, приходим к ответу:

Ответ:при $a \in \{\pm\sqrt{68};\pm 5\sqrt{2};6;10\}$ количество корней уравнения $(a-6)x^3 - 4x^2 + x = 0$ (1) равно количеству общих точек линий $x^2 + y^2 = a^2$ и $y = 8 - |x-2|$ (2).

Пример 29. (МФТИ 2004) Найдите все целые значения x,y, при которых справедливо уравнение $3xy + 16x + 13y + 61 = 0$. Ответ: $(-6;-7);(4;-5);(-4;3)$.

Решение.

Существует несколько приёмов решения уравнений в целых числах типа $axy + bx + cy + d = 0$.

1) Выразить одну переменную через другую, выделить целую часть в неправильной алгебраической дроби, рассмотреть случаи, когда дробный остаток принимает целочисленные значения. Этот способ для данного уравнения не годится.
2) Разложить левую часть на множители с целыми коэффициентами, т.е. привести уравнение к виду $(kx+l)(mx+n) = p$.

Покажем применение второго приёма.

$$3xy + 16x + 13y + 61 = 0 \Leftrightarrow y(3x+13) + 16x + 61 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(3x+13) + \frac{16}{3}(3x+13) - \frac{16}{3}\cdot 13 + 61 = 0 \Leftrightarrow (3x+13)\left(y + \frac{16}{3}\right) - \frac{25}{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3x+13)\left(y + \frac{16}{3}\right) = \frac{25}{3} \Leftrightarrow (3x+13)(3y+16) = 25 \Leftrightarrow (3x+13) = \frac{25}{(3y+16)}.$$

Дробь примет целые значения при условии, что знаменатель является делителем 25, т.е $(3y+16) \in \{\pm 1;\pm 5;\pm 25\}$. Рассмотрев все шесть систем, выясняем, что решение имеют только следующие : 1)$\begin{cases} 3y+16=1; \\ 3x+13=25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4; \\ y=-5. \end{cases}$ 2)$\begin{cases} 3y+16=-5; \\ 3x+13=-5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-6; \\ y=-7. \end{cases}$ 3)$\begin{cases} 3y+16=25; \\ 3x+13=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4; \\ y=3. \end{cases}$

Ответ:(-6;-7); (4;-5); (-4;3).

Пример 30. (МФТИ 1998) Найдите все целые значения *x,y*, при которых справедливо уравнение $x^3 - 6x^2 - xy + 13x + 3y + 7 = 0$.

Ответ: $(2;17);(4;27);(-16;307);(22;423)$.

Решение.

Приведём один из возможных приёмов решения уравнений в целых числах данного типа. Замечаем, что неизвестная **y** входит в уравнение в первой степени, выразим её через x:

$$x^3 - 6x^2 - xy + 13x + 3y + 7 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 13x + 7 = xy - 3y \Leftrightarrow y = \frac{x^3 - 6x^2 + 13x + 7}{x-3};$$

Перед делением на x-3 мы проверили, не является x=3 корнем исходного уравнения $3^3 - 6\cdot 3^2 - 3y + 13\cdot 3 + 3y + 7 = 0; 19 \neq 0$, или корнем многочлена $x^3 - 6x^2 + 13x + 7$, выяснили, что не является и деление не приведёт к потере корней. Выделим в неправильной алгебраической дроби целую и дробную части $y = \frac{x^3 - 6x^2 + 13x + 7}{x-3} = x^2 - 3x + 4 + \frac{19}{x-3}$. Дробная часть принимает целые значения только если x-3 является делителем 19, т.е. если $(x-3) \in \{-1;1;-19;19\}$. Рассматривая

поочерёдно четыре случая, находим четыре решения исходного уравнения:
$$\left[\begin{array}{l} x-3=-1 \to x_1=2 \to y_1=17; \\ x-3=1 \to x_2=4 \to y_2=27; \\ x-3=-19 \to x_3=-16 \to y_3=307; \\ x-3=19 \to x_4=22 \to y_4=423. \end{array}\right.$$

Ответ: $(2;17);(4;27);(-16;307);(22;423)$.

Пример 31. (МГУ 1979) Решите систему уравнений $\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0; \\ 3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0. \end{cases}$

Отв.(2;1).

Решение.

Квадратное уравнение с двумя переменными бывает полезно рассмотреть как квадратное уравнение с одной переменной, рассматривая вторую переменную как параметр. Если применить этот подход, например, к первому уравнению, $10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0 \Leftrightarrow 10x^2-2x(y+19)+5y^2-6y+41=0,$ то, вычислив дискриминант $D_1(y)=(y+19)^2-10(5y^2-6y+41)=-(7y-7)^2$, заметим, что он неотрицателен в единственной точке y=1, тогда x=2. Подставляя найденные значения во второе уравнение, получаем **ответ**: x=2; y=1.

Заметим, что если указанный подход (который логично назвать «проверкой на дискриминант») применить ко второму уравнению $3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0 \Leftrightarrow$

$3x^2-x(17-5y)-2y^2-6y+20=0,$ то, вычислив дискриминант $D(y)=(17-5y)^2-12(-2y^2-6y+20)=(7y-7)^2$, находим $\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{17-5y-(7y-7)}{6}=4-2y; \\ x_2=\dfrac{17-5y+(7y-7)}{6}=\dfrac{y+5}{3}. \end{array}\right.$

Далее, подставляя поочерёдно в первое уравнение $x=4-2y;\ x=\dfrac{y+5}{3}$, получим в обоих случаях y=1, x=2.

Обобщим приобретённый опыт: проверка дискриминанта целесообразна, т.к. может приводить к особо удачным случаям, как в первом примере, или к просто удачным случаям, как во втором примере.

Пример 32. (МГУ 1979) Найдите те решения системы уравнений

$\begin{cases} y^2-4xy+4y-1=0; \\ 3x^2-2xy-1=0. \end{cases}$ которые удовлетворяют условию $x\cdot y>0$. Отв.(1;1).

Решение.

Проверка дискриминанта ничего не даёт; используем приём подстановки: выражая $y=\dfrac{3x^2-1}{2x}$ из второго и подставляя в первое уравнение, после преобразований получим уравнение

$15x^4-24x^3+2x^2+8x-1=0$. Замечаем, что сумма коэффициентов равна 0, следовательно (правило нулевой суммы коэффициентов уравнения), один из корней равен 1, разделив многочлен на x-1, получим $15x^4-24x^3+2x^2+8x-1=(x-1)(15x^3-9x^2-7x+1)=(x-1)^2(15x^2+6x-1)$, т.к. для кубического многочлена сумма коэффициентов тоже равна нулю. При x=1 получаем y=1 одно из решений системы. Корням $x=\frac{-3\pm\sqrt{24}}{15}$ квадратного уравнения $15x^2+6x-1=0$ соответствуют значения y, которые не удовлетворяют требованию задачи $x\cdot y>0$.

При проверке условия $x\cdot y>0$ пришлось оценивать иррациональные числа. Отв.(1;1).

Пример 33. (МГУ 1981) Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0; \\ 2x^2-4x+3+y^3=0. \end{cases}$

Отв.(1;-1).

Решение.

Выразим из первого уравнения $y^2=\frac{2x}{1+x^2}\ge 0 \Rightarrow x\ge 0$. Как известно, $\frac{2x}{1+x^2}\le 1$ (достаточно умножить на знаменатель и выделить полный квадрат). Итак, $0\le y^2=\frac{2x}{1+x^2}\le 1 \Leftrightarrow -1\le y\le 1 \Leftrightarrow -1\le y^3\le 1 \Leftrightarrow 0\le y^3+1\le 2.$

Во втором уравнении выделим полный квадрат: $2(x-1)^2+(1+y^3)=0$, сумма двух неотрицательных слагаемых равна нулю, только если каждое из слагаемых равно нулю, следовательно, из второго уравнения получаем систему $\begin{cases} 2(x-1)^2=0; \\ (1+y^3)=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1; \\ y=-1. \end{cases}$ Проверка подтверждает правильность решения. Отв.(1;-1).

Суммируем накопленные приёмы решения систем уравнений 2-й степени:

1) группировка, подстановка, разложение на множители;

2) сложение (вычитание) предварительно умноженных на некоторое число уравнений. Цель — выделение **полного квадрата** или упрощение уравнения;

3) использование свойств функций (например, чётность, симметричность, монотонность, ограниченность), использование неравенств для получения оценок;

4) проверка дискриминантов уравнений для выявления счастливых и очень счастливых случаев.

Пример 34. (МГУ 1979) Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x^2+2y^2-3x+5y=3; \\ 4{,}5x^2+3y^2-3x+8y=7. \end{cases}$

Отв. $(2;-1);\left(\frac{12}{7};-\frac{1}{7}\right)$.

Решение.

Заметим пропорциональность коэффициентов при старших степенях неизвестных; воспользуемся приёмом №2 из списка: $\begin{cases}3x^2+2y^2-3x+5y=3;\\4{,}5x^2+3y^2-3x+8y=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9x^2+6y^2-9x+15y=9;\\9x^2+6y^2-6x+16y=14\end{cases}$ вычитаем первое из второго:

$\begin{cases}3x^2+2y^2-3x+5y=3;\\3x+y=5;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2+2y^2-3x+5y=3;\\y=5-3x;\end{cases}$ подставляя второе в первое, получим: ответ: $(2;-1);\left(\frac{12}{7};-\frac{1}{7}\right)$.

Пример 35. (МГУ 1977) Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases}x^2+y^2=2(1+a);\\(x+y)^2=14\end{cases}$ имеет ровно два решения. Найдите эти решения. Отв. a=2,5; $\left(\sqrt{\frac{7}{2}};\sqrt{\frac{7}{2}}\right);\left(-\sqrt{\frac{7}{2}};-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$.

Решение.

Заметим, что неизвестные входят в уравнения чётно и симметрично, т.е.наряду с решением $(x;y)$, решением будут пары $(-x;-y)$, $(y;x)$, $(-y;-x)$, всего 4 решения. Требование задачи будет выполнено только при x=y, тогда из 4 решений остаются два: $(x;x);(-x;-x)$.**Необходимое** условие существования ровно двух решений получено: если решений ровно два, то это $(x;x);(-x;-x)$. Найдём соответствующие значения параметра, затем останется проверить достаточность найденного условия.

$\begin{cases}x^2+y^2=2(1+a);\\(x+y)^2=14;\\x=y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2=2(1+a);\\(2x)^2=14;\\x=y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=2(1+a);\\x^2=3{,}5;\\x=y\end{cases} \Rightarrow 2(1+a)=3{,}5 \Rightarrow a=2{,}5.$ Итак, если решений ровно два, то a=2,5. Это необходимое условие.

Докажем достаточность этого условия.

Проверим, что при $a=2{,}5$ действительно будет ровно два решения у системы $\begin{cases}x^2+y^2=2(1+2{,}5);\\(x+y)^2=14;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2=7;\\(x+y)^2=14;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2=7;\\2xy=7;\end{cases}$ складывая и вычитая два последних уравнения, получим $\Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)^2=14;\\(x-y)^2=0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2x)^2=14;\\x=y;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm\sqrt{\frac{7}{2}};\\y=x;\end{cases}$ действительно, ровно два решения!

Пример 36. (МГУ 1989) Найдите все целые значения x,y, при которых справедливо уравнение $9x^2y^2+6xy^2-9x^2y+2x^2+y^2-18xy+7x-5y+6=0$.

Отв. $(0;2);(-2;0);(2;1);(0;3)$.

Решение.

Требуется решить диофантово уравнение $9x^2y^2+6xy^2-9x^2y+2x^2+y^2-18xy+7x-5y+6=0$.

Рассматриваем уравнение, как квадратное относительно у с параметром х, преобразуем:
$y^2(9x^2+6x+1)-y(9x^2+18x+5)+2x^2+7x+6=0 \Leftrightarrow$
$y^2(3x+1)^2-y(3x+1)(3x+5)+2x^2+7x+6=0 \Leftrightarrow$ в первых двух слагаемых последнего уравнения угадывается квадрат суммы $\left(y(3x+1)-\frac{(3x+5)}{2}\right)^2$,действительно:

$$\left((y(3x+1))^2-2y(3x+1)\frac{(3x+5)}{2}+\left(\frac{(3x+5)}{2}\right)^2\right)-\left(\frac{(3x+5)}{2}\right)^2+2x^2+7x+6=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(y(3x+1)-\frac{(3x+5)}{2}\right)^2-\left(\frac{(x+1)}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow \{\text{как разность квадратов}\}$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(y(3x+1)-\frac{(3x+5)}{2}\right)-\left(\frac{(x+1)}{2}\right)\right)\cdot\left(\left(y(3x+1)-\frac{(3x+5)}{2}\right)+\left(\frac{(x+1)}{2}\right)\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&y(3x+1)=x+2;\\&y(3x+1)=2x+3;\end{aligned}\right. \Leftrightarrow\left\{\begin{aligned}&y=\frac{x+2}{3x+1};\\&y=\frac{2x+3}{3x+1}.\end{aligned}\right.$$

На множестве целых чисел знаменатель дробей в ноль не обращается, некоторые целочисленные решения легко угадываются, например, (0;2), (-2;0), но покажем приём нахождения **всех** целых решений. Уравнения $\left[\begin{aligned}&y(3x+1)=x+2;\\&y(3x+1)=2x+3;\end{aligned}\right.$ принадлежат к уравнениям вида, уже встречавшегося нам, они решаются разложением левой части на множители.

$$\left[\begin{aligned}&y(3x+1)=x+2;\\&y(3x+1)=2x+3;\end{aligned}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&y(3x+1)-\frac{1}{3}(3x+1)+\frac{1}{3}=2;\\&y(3x+1)-\frac{2}{3}(3x+1)+\frac{2}{3}=3;\end{aligned}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\left(y-\frac{1}{3}\right)(3x+1)=\frac{5}{3};\\&\left(y-\frac{2}{3}\right)(3x+1)=\frac{7}{3};\end{aligned}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&(3y-1)(3x+1)=5;\\&(3y-2)(3x+1)=7;\end{aligned}\right.$$

Простые числа 5 и 7 можно разложить в произведение двух целых чисел только следующими 4 способами:

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&(3y-1)(3x+1)=5=1\cdot5=5\cdot1=(-1)\cdot(-5)=(-5)\cdot(-1); \quad (1)\\&(3y-2)(3x+1)=7=1\cdot7=7\cdot1=(-1)\cdot(-7)=(-7)\cdot(-1) \quad (2).\end{aligned}\right.$$

Для каждого уравнения получаем по четыре системы уравнений в целых числах, некоторые из них имеют решения в целых числах, например, первое уравнение имеет решения (-2;0);(0;2). Второе уравнение имеет решения (2;1);(0;3).

Отв. $(0;2);(-2;0);(2;1);(0;3)$.

Пример 37. ((МГУ 1988) Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений $\left\{\begin{aligned}&axy+x-y+1{,}5=0;\\&x+2y+xy+1=0\end{aligned}\right.$ имеет единственное решение. Найдите это решение.

Отв. при а=-0,5; $\exists!\left(-\frac{4}{3};\frac{1}{2}\right)$. При а=1 $\exists!\left(-\frac{8}{7};\frac{1}{6}\right)$. При $a=\frac{-7\pm4\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\exists!$

Решение.

Из второго уравнения получаем $y(x+2)+(x+1)=0$, ясно, что при x=-2 уравнение и система не имеют решений ни при каких a. ОДЗ: $x \neq -2$. При $x \neq -2$ получаем $y=-\dfrac{x+1}{x+2}$, подставляя в первое уравнение, запишем решаемую систему в виде

$$\begin{cases}(ax-1)y+x+1{,}5=0;\\ y=-\dfrac{x+1}{x+2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-(ax-1)\cdot\dfrac{x+1}{x+2}+x+1{,}5=0;\\ y=-\dfrac{x+1}{x+2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2a-2)x^2+(2a-9)x-8=0;\\ y=-\dfrac{x+1}{x+2}; \quad x\neq -2.\end{cases} \quad (*)$$

Контрольными значениями параметра, подлежащими исследованию, являются:
1)значения параметра, при которых старший коэффициент уравнения равен нулю (при a=1);
2) значения параметра, при которых дискриминант равен нулю;
3) значения параметра, при которых корень, зависящий от параметра, не принадлежит ОДЗ.

При a=1 система $(*)$ примет вид $\begin{cases}(0)x^2+(2-9)x-8=0;\\ y=-\dfrac{x+1}{x+2}; \quad x\neq -2.\end{cases} \Rightarrow \exists!\ x=-\dfrac{8}{7}; y=\dfrac{1}{6}$ -единственное решение системы.

При $a \neq 1$ дискриминант D(a) квадратного уравнения в системе $(*)$ равен нулю

$$D(a)=(2a-9)^2+4(2a-2)8=0 \Leftrightarrow a=\frac{-7\pm 4\sqrt{2}}{2}.$$

Если положить в квадратном уравнении в системе $(*)$ x равным -2, то соответствующее значение параметра *a* будет $a=-0{,}5$, это необходимое условие. Проверим достаточность этого условия для единственности решения: при a=-0,5 квадратное уравнение в системе $(*)$ примет вид

$$-3x^2-10x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, п.к.\\ x=-\dfrac{4}{3}; \rightarrow y=0{,}5.\end{array}\right.$$ Система имеет единственное решение.

Ответ: при $a \in \left\{-0{,}5; 1; \dfrac{-7\pm 4\sqrt{2}}{2}\right\}$ система имеет единственное решение.

Пример 38. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $(1-a^2)x^4+(a-3)x^2+a+2-\sqrt{a^2+4a+4}=0$ имеет единственное решение. Найдите это решение. Отв. при $a\in[-2;-1)\cup(1;3] \Rightarrow \exists! \quad x=0.$

Решение.

Замечаем, что функция $f(x)=(1-a^2)x^4+(a-3)x^2+a+2-\sqrt{a^2+4a+4}$ является чётной, поэтому, наряду с корнем x уравнения, корнем будет и –x, единственность корня будет обеспечена только, если –x=x, т.е. при x=0. Итак, если корень единственный, то это x=0, отсюда, подставляя в уравнение x=0, находим **необходимое условие на параметр a:**

$$(1-a^2)0^4+(a-3)0^2+a+2-\sqrt{a^2+4a+4}=0 \Leftrightarrow a+2=|a+2| \Leftrightarrow a\geq -2.$$

Проверим достаточность этого условия для выполнения требования задачи:

$$\begin{cases}a\geq -2;\\ (1-a^2)x^4+(a-3)x^2+a+2-\sqrt{a^2+4a+4}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a\geq -2;\\ \left((1-a^2)x^2+(a-3)\right)x^2=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a \ge -2; \\ \left[\begin{array}{l} x^2 = 0; \\ \left(\left(1-a^2\right)x^2 + (a-3)\right) = 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

Проверим контрольные значения параметра *a*: $a \in \{-1;1\}$:при этих значениях уравнение принимает вид $\pm 1 - 3 = 0$, оно не имеет корней. При $a \ne \pm 1$ уравнение примет вид $x^2 = \dfrac{a-3}{a^2-1}$. При a=3 корень x=0 – единственный. Решая методом интервалов неравенство $x^2 = \dfrac{a-3}{(a-1)(a+1)} < 0$ (чтобы не было других корней) при условиях $a \ne \pm 1$, $a \ge -2$, находим, что при $a \in [-2;-1) \cup (1;3] \Rightarrow \exists! \quad x = 0.$ QED.

Пример 39. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение

$(a^2 - 9)x^4 + (a^3 - 8)x^2 + a + \sqrt{a^2+2a+1} + 1 = 0$ имеет ровно три различных корня.

Найдите эти корни.

Отв. $a \in (-\infty;-3) \Rightarrow \exists\, 3$ *различных корня.*

Решение.

1)При $a \ne \pm 3$ левая часть уравнения является многочленом 4-ой степени $P_4(x) = (a^2 - 9)x^4 + (a^3 - 8)x^2 + a + \sqrt{a^2+2a+1} + 1$, который обладает свойствами: 1)по следствию из основной теоремы алгебры многочлен имеет 4 корня, считая кратные и комплексные корни, 2)он накладывается на множители по своим корням $P_4(x) = (a^2-9)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$; 3) $P_4(x)-$ чётная функция.

2)По требованию задачи $P_4(x)$ должен обладать 3 различными корнями, следовательно, какие-то два корня совпадают: $P_4(x) = (a^2-9)(x-x_1)^2(x-x_2)(x-x_3)$.

3) $P_4(x)-$ чётная функция, отсюда выводим два важных следствия о виде многочлена $P_4(x)$: $(x-x_1)^2 = x^2$, иначе функция $(x-x_1)^2$ не будет чётной. Функция $(x-x_2)(x-x_3) = x^2 - (x_2+x_3)x + x_2x_3$ является чётной тогда и только тогда, когда второй коэффициент (x_2+x_3) равен нулю, т.е. когда числа $x_2 = -x_3$ противоположны.

4) Следовательно многочлен имеет вид $P_4(x) = (a^2-9)(x-x_1)^2(x-x_2)(x-x_3) = (a^2-9)(x)^2(x^2-x_2{}^2)$. Три корня его $0;-x_1;x_1$.

5) Найдём необходимое условие на параметра а для существования трёх различных корней: если x=0 – корень, то подставляя его в исходное уравнение, получаем

$(a^2 - 9)0^4 + (a^3 - 8)0^2 + a + \sqrt{a^2+2a+1} + 1 = 0$ $\Leftrightarrow a + 1 + |a+1| = 0 \Leftrightarrow |a+1| = -a-1 \Leftrightarrow a \le -1$ *это* ***необходимое условие.***

6)Проверим, является это условие **достаточным** для существования трёх различных корней, при этом условии исходное уравнение примет вид (свободный член равен нулю):

$$(a^2-9)x^4+(a^3-8)x^2=0 \Leftrightarrow x^2\left((a^2-9)x^2+a^3-8\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a\le -1; \\ \left[\begin{array}{l} x=0; \\ x^2=-\dfrac{a^3-8}{a^2-9}; \end{array}\right. \end{cases}$$

Для существования второго и третьего корней необходимо и достаточно,чтобы $-\dfrac{a^3-8}{a^2-9}>0$, решая это неравенство методом интервалов с учётом ограничений на параметр а, получаем: a<-3.

Отв. $a\in(-\infty;-3)\Rightarrow \exists\, 3$ *различных корня* $: 0;\pm\sqrt{-\dfrac{a^3-8}{a^2-9}}$.

Пример 40. (ЕГЭ 2008). Найдите все значения параметра а, при каждом из которых множество решений неравенства $\dfrac{25+a(10-x)}{x^2}<\dfrac{5}{x}\left(2+\dfrac{5a}{x^2}\right)-1$ содержится в каком-нибудь отрезке длиной 4 и при этом содержит некоторый отрезок длиной 1.

Отв. $[-4;-1)\cup(1;4]$

Решение.

1)ОДЗ: $x\ne 0$.

2)Преобразуем данное нераввенство, приведём обе части неравенства к одному знаменателю

$$\frac{25+a(10-x)}{x^2}<\frac{5}{x}\left(2+\frac{5a}{x^2}\right)-1 \Leftrightarrow \frac{25+a(10-x)}{x^2}<\frac{10}{x}+\frac{25a}{x^3}-1 \Leftrightarrow \frac{25+a(10-x)}{x^2}<\frac{10x^2+25a-x^3}{x^3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{25x+10ax-ax^2}{x^3}<\frac{10x^2+25a-x^3}{x^3} \Leftrightarrow \frac{x^3-x^2(10+a)+x(25+10a)-25a}{x^3}<0$$

Корни многочлена $P_3(x)=x^3-x^2(10+a)+x(25+10a)-25a$ можно угадать методом «пристального взгляда» или с помощью теоремы Франсуа Виета для кубического уравнения. Это корни : 5;5; а. Наконец, можно разложить на множители $P_3(x)$ методом группировки: $P_3(x)=(x-5)^2(x-a)$.

3)Для решения неравенства $\dfrac{x^3-x^2(10+a)+x(25+10a)-25a}{x^3}<0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-5)^2(x-a)}{x^3}<0$ методом интервалов отметим на числовой прямой нули числителя и знаменателя: 0;5; а. Рассмотрим несколько случаев возможного расположения параметра а на числовой прямой: a<0; a=0; 0<a<5; a=5; a>5.

$\begin{cases} a<0; \\ \dfrac{(x-5)^2(x-a)}{x^3}<0; \end{cases} \Leftrightarrow x\in(a;0)$. Согласно требованию задачи, интервал длиной а должен содержаться в отрезке длины 4 и содержать отрезок длины 1, т.е. длина интервала $x\in(a;0)$ должна быть от 1 до 4. Анализируя всевозможные положения левого конца интервала на прямой, приходим к заключению, что требование задачи выполняется , если $a \in [-4;-1)$.

При а=0 имеем $\begin{cases} a = 0; \\ \dfrac{(x-5)^2 x}{x^3} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$, решений нет.

При 0<а<5 имеем $\begin{cases} 0 < a < 5; \\ \dfrac{(x-5)^2 (x-a)}{x^3} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0;a)$, требованию задачи удовлетворяют те правые концы интервала, при которых $a \in (1;4]$.

При а=5 множеством решений является интервал $x \in (0;5)$, который нельзя поместить в отрезок длиной 4.

При а>5 множеством решений имеет вид $x \in (0;5) \cup (5;a)$, которое нельзя поместить в отрезок длиной 4.

Отв. при $a \in [-4;-1) \cup (1;4]$ множество решений неравенства $\dfrac{25 + a(10-x)}{x^2} < \dfrac{5}{x}\left(2 + \dfrac{5a}{x^2}\right) - 1$ содержится в каком-нибудь отрезке длиной 4 и при этом содержит некоторый отрезок длиной 1.

Пример 41. (Исследовательское задание на квадратный трёхчлен).

1) Изобразите две различные параболы $y = ax^2 + bx + c$, удовлетворяющих следующим свойствам:а)ветви параболы направлены вниз,

б)вершина параболы $V_0(x_0; y_0) \in IV\ \textit{четверти}$.

2)Определите знаки коэффициентов a,b,c параболы $y = ax^2 + bx + c$. Определяются ли они однозначно?

3)Найдите все значения параметра к, при каждом из которых знаки коэффициентов a,b,c будут такими, как это определено в п.2, если $a(k) = 3 - 2k - k^2; \quad b(k) = k^2 + 3k - 4; \quad c(k) = |k-2| - 10.$

4)Пусть параметр k принадлежит множеству, определённому в п.3. Может ли соответствующая парабола пересечь ось ОХ?

Решение.

2)a<0, т.к. ветви направлены вниз. $y(0) = c < 0$ по условию. $x_0 = -\dfrac{b}{2a} > 0; a < 0 \Rightarrow b > 0.$

3)Решим систему $\begin{cases} a(k) = 3 - 2k - k^2 < 0; \\ b(k) = k^2 + 3k - 4 > 0; \\ c(k) = |k-2| - 10 < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k+3)(k-1) > 0; \\ (k+4)(k-1) > 0; \\ -8 < k < 12. \end{cases} \Leftrightarrow k \in (-8;-4) \cup (1;12).$

4) Пусть параметр k принадлежит $k \in (-8;-4) \cup (1;12)$. Может ли соответствующая парабола пересечь ось ОХ? Всё зависит от знака дискриминанта, исследуем, например, случай, когда дискриминант отрицателен, тогда парабола не пересекает оси абсцисс:

$$\begin{cases} k \in (-8;-4) \cup (1;12); \\ D(k) = (k^2 + 3k - 4)^2 - 4(3 - 2k - k^2)(|k-2| - 10) < 0. \end{cases}$$

Система распадается на совокупность трёх систем, решаемых на промежутках $[2;12)$; $(1;2)$; $(-8;-4)$.

Исследуем первую систему:

$$\begin{cases} k \in [2;12); \\ (k+4)^2(k-1) + 4(k+3)(k-12) < 0; \textit{сократили} \quad \textit{на} \quad (k-1) > 0 \quad \textit{при}\ k \in [2;12) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} k \in [2;12); \\ k^3 + 11k^2 - 28k - 160 < 0. \end{cases}$$

Исследуем с помощью производной и построим схематический график кубической функции $y = k^3 + 11k^2 - 28k - 160$ на промежутке $k \in [2;12)$,

$$y' = 3k^2 + 22k - 28 = 0 \Rightarrow k_{кр} = \frac{-11 \pm \sqrt{205}}{3} \notin [2;12) \Rightarrow y(k) \uparrow \textit{на} [2;12).$$

$$y(4) = -80; y(5) = 100 \Rightarrow \exists \textit{корень}\ k_0 \in (4;5).$$

Следовательно, при $k \in (2;k_0); k_0 \in (4;5) \Rightarrow D(k) < 0$ и парабола ось ОХ не пересекает;

при $k \in (k_0;12); k_0 \in (4;5) \Rightarrow D(k) > 0$ и парабола пересекает ось абсцисс, проверьте это, например, при целых $k \in \{5;6;7;8;9;10;11\}$.

Чем объяснить такой «парадокс»?

Исследуем вторую систему:

$$\begin{cases} k \in (1;2); \\ (k+4)^2(k-1) + 4(k+3)(-k-8) < 0; \textit{сократили} \quad \textit{на} \quad (k-1) > 0 \quad \textit{при}\ k \in (1;2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} k \in (1;2); \\ k^3 + 3k^2 - 36k - 112 < 0. \end{cases}$$

Исследуем с помощью производной и построим схематический график кубической функции $y = k^3 + 3k^2 - 36k - 112$ на промежутке $k \in (1;2)$, критические точки многочлена не принадлежат интервалу, на $(1;2)$ функция монотонно убывает, значения функции отрицательные, следовательно, дисриминант отрицателен и парабола оси абсцисс не пересекает.

Исследуем третью систему:

$$\begin{cases} k \in (-8;-4); \\ (k+4)^2(k-1) + 4(k+3)(-k-8) > 0; \textit{сократили} \quad \textit{на} \quad (k-1) < 0 \quad \textit{при}\ k \in (-8;-4) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} k \in (-8;-4); \\ k^3 + 3k^2 - 36k - 112 > 0. \end{cases}$ Исследуем с помощью производной и построим схематический график кубической функции $y = k^3 + 3k^2 - 36k - 112$ на промежутке $k \in (-8;-4)$, критическая точка многочлена $k_{\max} = -1 - \sqrt{13}$ принадлежат интервалу $(-8;-4)$, вычислив значения кубического многочлена в ближайших целых точках $y(-5) = 18; y(-6) = -4$, понимаем, что на интервале $(-6;-5)$ есть корень многочлена $\bar{k} \in (-6;-5)$.

Итак, при $k \in (-8;\bar{k}); \bar{k} \in (-6;-5) \Rightarrow D(k) > 0$ и парабола ось абсцисс пересекает. Проверьте это при k=-7.

При $k \in (\bar{k};-4); \bar{k} \in (-6;-5) \Rightarrow D(k) < 0$ и парабола ось абсцисс не пересекает.

Ответ: 1)знаки коэффициентов $\begin{cases} a(k) = 3 - 2k - k^2 < 0; \\ b(k) = k^2 + 3k - 4 > 0; \quad при \quad k \in (-8;-4) \cup (1;12). \\ c(k) = |k-2| - 10 < 0. \end{cases}$

2)при указанных знаках коэффициентов соответствующая парабола пересекает ось абсцисс при $k \in (k_0;12), k_0 \in (4;5); \quad k \in (-8;\bar{k}), \bar{k} \in (-6;-5)$; например, при $k \in \{-7;5;6;7;8;9;10;11\}$. Значение ординаты вершины параболы не учтено в математической модели, в этом причина «парадокса».

Пример 42. (Исследовательское задание на квадратный трёхчлен).

Каноническим уравнением параболы называется уравнение вида $y = k(x - x_0)^2 + y_0$, где точка $V_0(x_0; y_0)$ является вершиной параболы.

1)Приведите данное уравнение $y = 2x^2 - 4ax + 2{,}125a^2 - 0{,}75a - 0{,}875$ к каноническому виду, определите координаты $x_0(a); y_0(a)$ вершины параболы.

2)Исключив параметр **a** из равенств для координат $x_0(a); y_0(a)$, найдите уравнение линии, на которой лежат вершины всех заданных парабол, зависящих от параметра (уравнение линии вершин).

3) На одной системе координат XOY изобразите линию вершин и различные параболы $y = 2x^2 - 4ax + 2{,}125a^2 - 0{,}75a - 0{,}875$ при $a \in \{-3;-1;3;7;9\}$.

Решение.

1)Для приведения уравнения к каноническому виду выделяем полный квадрат, используя формулы сокращённого умножения:

$$y = 2x^2 - 4ax + 2{,}125a^2 - 0{,}75a - 0{,}875 = 2(x^2 - 2ax) + 2{,}125a^2 - 0{,}75a - 0{,}875 =$$

$$= 2(x^2 - 2ax + a^2 - a^2) + 2{,}125a^2 - 0{,}75a - 0{,}875 = 2(x-a)^2 + 0{,}125a^2 - 0{,}75a - 0{,}875 =$$

$$= 2(x-a)^2 + \frac{1}{8}a^2 - \frac{3}{4}a - \frac{7}{8} = 2(x-a)^2 + \frac{1}{8}(a^2 - 6a - 7) = 2(x-a)^2 + \frac{1}{8}(a-7)(a+1).$$

2)Здесь $x_0(a) = a; \quad y_0(a) = \frac{1}{8}(a-7)(a+1).$

Исключая параметр а (т.е.заменяем а на х) из уравнений и опуская индекс, получим уравнение линии вершин $V: \quad y = \frac{1}{8}(x-7)(x+1)$- это парабола с ветвями вверх и корнями 7 и -1.

3)Выпишем уравнения парабол при $a \in \{-3;-1;3;7;9\}$:

$$\begin{cases} a = -3; \\ y = 2(x+3)^2 + \frac{1}{8}(-3-7)(-3+1) = 2(x+3)^2 + 2{,}5; \end{cases} \qquad V_0(-3;2{,}5) \in V.$$

$$\begin{cases} a = -1; \\ y = 2(x+1)^2 + \frac{1}{8}(-8)(0) = 2(x+3)^2; \end{cases} \qquad V_0(-1;0) \in V.$$

$$\begin{cases} a = 3; \\ y = 2(x-3)^2 + \frac{1}{8}(-4)(4) = 2(x-3)^2 - 2; \end{cases} \qquad V_0(3;-2) \in V.$$

$$\begin{cases} a = 7; \\ y = 2(x-7)^2 + \frac{1}{8}(0) = 2(x-7)^2; \end{cases} \qquad V_0(7;0) \in V.$$

$$\begin{cases} a = 9; \\ y = 2(x-9)^2 + \frac{1}{8}(2)(10) = 2(x-9)^2 + 2{,}5; \end{cases} \qquad V_0(9;2{,}5) \in V.$$

Изобразите их на одной с.к. с линией вершин $V: \quad y = \frac{1}{8}(x-7)(x+1)$.

Пример 43. При каждом значении параметра а исследуйте количество корней уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - a - 4 = 0$, принадлежащих полуинтервалу $x \in (-4;2]$.

Решение.

Рассмотрим данную функцию $y = x^2 - 2ax + a^2 - a - 4$ и приведём её к каноническому виду $y = x^2 - 2ax + a^2 - a - 4 = (x-a)^2 - a - 4$, здесь $V_0(a;-a-4)$вершина параболы, линия вершин $y = -x - 4$. По условию

$$(x-a)^2 - a - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-a)^2 = a + 4 \Rightarrow \begin{cases} a < -4 \quad \textit{корней} \quad \textit{нет}; \\ a = -4 \quad \exists!\, x = a = -4 \notin (-4;2]; \\ a > -4 \quad \exists x_1 = a - \sqrt{a+4};\, x_2 = a + \sqrt{a+4}; \end{cases}$$

Далее исследуем, при каких а>-4 корни $x_1 = a - \sqrt{a+4}; x_2 = a + \sqrt{a+4}$ принадлежат заданному полуинтервалу $x \in (-4;2]$.

Проведём исследование сначала графическим способом.

При а=-4 соответствующая парабола $y=(x+4)^2$ касается оси абсцисс в точке (-4;0) и корней на полуинтервале $x\in(-4;2]$уравнение не имеет.

При а<-4 движение парабол происходит влево-вверх по линии вершин $y=-x-4$

и пересечений с ОХ нет.

При а>-4 движение парабол происходит вправо-вниз по линии вершин $y=-x-4$

и правая ветвь параболы пересекает полуинтервал $(-4;2]$. При -4<a<-3 единственная точка пересечения.

При а=-3 парабола пройдёт через точки (-4;0) и (-2;0); точка пересечения с полуинтервалом единственная. Правый корень пересекает полуинтервал при -4<a<0. При а=0 правый корень пройдёт точку полуинтервала (2;0), при а>0 правый корень выйдет за пределы полуинтервала, при этом левый корень будет пересекать полуинтервал в точке (-2;0).

При -3<a<0 будет два пересечения и левый корень будет пересекать полуинтервал при $-3<a\le 5$.

Результаты исследования для наглядности разместим на развёртке по параметру, т.е.на числовой прямой ОА, над прямой указываем наличие пересечений левого корня $x_1=a-\sqrt{a+4}$ параболы; под прямой указываем наличие пересечений правого корня $x_2=a+\sqrt{a+4}$ параболы.

$x_1=a-\sqrt{a+4}$	0 корней	0 к	0 k	1 к	1 к	1 к	1 к	0 к
	$a\le -4$	-4<a<-3	a=-3	-3<a<0	a=0	0<a<5	a=5	a>5
$x_2=a+\sqrt{a+4}$	0 корней	1 к	1 k	1 к	1 к	0 к	0 к	0 к

Ответ:

$$a\le -4\Rightarrow 0\quad k;$$
$$-4<a\le -3\Rightarrow 1\quad k\quad x_2;$$
$$-3<a\le 0\Rightarrow 2\quad k\quad x_1;x_2$$
$$0<a\le 5\Rightarrow 1\quad k\quad x_1;$$
$$a>5\Rightarrow 0\quad k.$$

При $a\in(-4;5]$существует хотя бы один корень на полуинтервале$(-4;2]$.

Пример 44. (Исследовательское задание).

Найдите корень уравнения $3x^4-8x^3-18x^2+135=0$и докажите, что он единственный.

Решение.

Первый способ с использованием теоремы о рациональных корнях многочлена.

Если многочлен имеет рациональные корни, то они находятся среди чисел вида $x \in \left\{\pm 3; \pm 9; \pm 27; \pm 5; \pm 15; \pm 45; \pm 135; \pm 1; \pm \frac{5}{3}\right\}$.Проверяем, какие из чисел являются корнем:

$P_4(3) = 3 \cdot 3^4 - 8 \cdot 3^3 - 18 \cdot 3^2 + 135 = 0 \Rightarrow$ x=3 является корнем, остальные числа проверять не будем, воспользуемся следствием из теоремы Этьена Безу: если x=3 является корнем многочлена $P_4(x)$, то он делится на (x-3). Выполнив деление (например, «уголком»), получаем: $P_4(x) = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 135 = (x-3)(3x^3 + x^2 - 15x - 45)$. Применяя к многочлену третьей степени $P_3(x) = 3x^3 + x^2 - 15x - 45$ теорему о рациональных корнях многочлена, проверяем , какие из чисел $x \in \left\{\pm 3; \pm 9; \pm 5; \pm 15; \pm 45; \pm 1; \pm \frac{5}{3}\right\}$ являются корнем $P_3(x)$. $P_3(3) = 3 \cdot 3^3 + 3^3 - 18 \cdot 3 - 45 = 0 \Rightarrow$ x=3 является корнем, остальные числа проверять не будем, воспользуемся следствием из теоремы Этьена Безу: если x=3 является корнем многочлена $P_3(x)$, то он делится на (x-3). Выполнив деление (например, «уголком»), получаем: $P_3(x) = (3x^3 + x^2 - 15x - 45) = (x-3)(3x^2 + 10x + 15)$. Таким образом, $P_4(x) = (x-3)^2(3x^2 + 10x + 15)$, квадратный трёхчлен корней не имеет (убедитесь в этом), следовательно, исходное уравнение имеет единственный (двукратный) корень.

Второй способ с использованием производной и условия касания графиков кривых (функционально-аналитический способ).

Перепишем данное уравнение в виде $3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 135 = 0 \Leftrightarrow 3x^4 + 135 = 8x^3 + 18x^2$, очевидно, что функция $f(x) = 3x^4 + 135 \geq 135, x \in R$. График кубического многочлена $\varphi(x) = 8x^3 + 18x^2 = 8x^2(x + 2{,}25)$ пересекает ось абсцисс в точке x=-2,25, касается оси в x=0, функция имеет $\varphi_{\max}(-1{,}5) = 13{,}5$, поэтому при $x \leq 0$ корней уравнение не имеет.

При x>0 обе функции возрастают с различными скоростями и иметь единственную общую точку графики могут лишь при условии касания кривых. Запишем условие касания кривых (равенство функций, равенство производных):

$$\begin{cases} f(x) = \varphi(x); \\ f'(x) = \varphi'(x); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^4 + 135 = 8x^3 + 18x^2; \\ 12x^3 = 24x^2 + 36x; \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^4 + 135 = 8x^3 + 18x^2; \\ x^2 = 2x + 3; \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Концовка решения аналогичная: $P_4(x) = (x-3)^2(3x^2 + 10x + 15)$, следовательно, исходное уравнение имеет единственный (двукратный) корень.

Пример 45. (Исследовательское задание).

Точка А принадлежит параболе $\pi: y = x^2 - 4x + 7$, а точка В принадлежит кривой $\omega: x^2 + y^2 - 4x - 15y + 60 = 0$. Какое наименьшее значение может иметь длина отрезка АВ?

Ответ: $\min\limits_{x} \rho(\omega; \pi) = \min\limits_{x} \rho(O; \pi) - R = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$.

Решение.

Выделяя полные квадраты, получаем канонические уравнения параболы $\pi: y=(x-2)^2+3$ с вершиной в точке $V(2;3)$ и окружности $\omega: (x-2)^2+(y-7{,}5)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$ с центром $O(x_0;y_0)=O(2;7{,}5);\quad R=\frac{1}{2}.$ Для построения графиков кривых удобно взять крупный масштаб, хотя бы две клетки на единицу. Получили интересную картинку: внутри параболы - окружность малого радиуса. Проведём несколько радиусов ОА и продолжим их до пересечения с параболой в точке В. Получили несколько отрезков АВ, длины которых нужно минимизировать. Точка В может как лежать на продолжении радиуса ОА, так и не лежать на нём. Рассмотрим **первую ситуацию: точка В лежит на продолжении радиуса ОА.**

Постановка задачи: найти

$$\min_x \rho(\omega;\pi)=\min_x \rho(O;\pi)-R=\min_x \sqrt{(x-x_0)^2+(ax^2+bx+c-y_0)^2}-R=$$
$$\min_x \sqrt{(x-2)^2+(x^2-4x+7-7{,}5)^2}-\frac{1}{2}.$$

В силу симметрии графиков относительно прямой x=2 достаточно рассматривать только значения $x\ge 2$. Понятно, что искомый минимум достигается там, где имеет минимум функция

$y=(x-2)^2+(x^2-4x+7-7{,}5)^2=(x-2)^2+(x^2-4x-0{,}5)^2$. Находим точку минимума:

$$y'=2(x-2)+2(x^2-4x-0{,}5)(2x-4)=(2x-4)(1+2x^2-8x-1)=2(x-2)2x(x-4);$$

$$x_{\min}=4; y_{\min}(4)=(4-2)^2+(4^2-4\cdot4-0{,}5)^2=4+0{,}25=\frac{17}{4}.$$

Тогда $\min_x \sqrt{(x-2)^2+(x^2-4x+7-7{,}5)^2}-\frac{1}{2}=\sqrt{(4-2)^2+(-0{,}5)^2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{17}-1}{2}.$

Отмечалось, что точка В может как лежать на продолжении радиуса ОА, так и не лежать на нём; **первую ситуацию, когда точка В лежит на продолжении радиуса ОА (т.е.на луче ОА), мы исследовали и получили ответ** $\min_x \rho(\omega;\pi)=\min_x \rho(O;\pi)-R=\frac{\sqrt{17}-1}{2}.$

Рассмотрим **вторую ситуацию, когда точка $B_1\in\pi$ не лежит на продолжении радиуса ОА (т.е.на луче ОА), пересечение продолжение радиуса ОА (т.е. луча ОА) с параболой обозначим как и ранее $B\in\omega$. Проведём луч OB_1; $B_1\in\pi$, точку пересечения луча OB_1** с окружностью обозначим Т: $OB_1\cap\omega=T$. Рассмотрим треугольник OB_1A, по неравенству треугольника справедливо неравенство $OA+AB_1>OB_1 \Leftrightarrow OA+AB_1>OT+TB_1 \Leftrightarrow AB_1>TB_1$, т.к.ОТ=ОА как радиусы.

Но $AB_1>TB_1$ означает, что AB_1 не удовлетворяет требованию минимальности длины отрезка АВ. Мы приходим к первому рассмотренному случаю.

Ответ: $\min_x \rho(\omega;\pi)=\min_x \rho(O;\pi)-R=\frac{\sqrt{17}-1}{2}.$

Пример 46. (Исследовательское задание).

Составьте уравнение общей касательной к графикам функций $\pi_1 : y = x^2 + 3x + 5$ $\pi_2 : y = -x^2 - x + 1$.

Ответ: $y = -x + 1; \quad y = 3x + 5.$

Решение.

1)Преобразуем данные функции к виду $\pi_1 : y = x^2 + 3x + 5 = (x + 1{,}5)^2 + 2{,}75$; $\pi_2 : y = -x^2 - x + 1 = 1{,}25 - (x + 0{,}5)^2$ и построим их графики: первая парабола имеет вершину в точке $(-1{,}5; 2{,}75)$, ветви её направлены вверх; вторая парабола имеет вершину в точке $(-0{,}5; 1{,}25)$, ветви её направлены вниз. Из графика видно, что есть две общие касательные, уравнения которых вида $y = ax + b$ мы должны найти.

2) Прямая $y = ax + b$ и парабола $y = x^2 + 3x + 5$ имеют одну общую точку т.и т.т.когда уравнение $ax + b = x^2 + 3x + 5$ имеет одно решение, что равносильно тому, что дискриминант квадратного уравнения $0 = x^2 + (3 - a)x + 5 - b$ равен нулю:

$D = (3 - a)^2 - 4(5 - b) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 4b = 11 \quad (K1)$ – условие касания с первой параболой.

3)Аналогично находим условие касания со второй параболой:

$$\begin{cases} y = ax + b; \\ y = -x^2 - x + 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2 - x + 1 = ax + b; \\ D = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (a + 1)x + b - 1 = 0; \\ D = (a + 1)^2 - 4(b - 1) = a^2 + 2a - 4b = -5 \quad (K2) \end{cases}$$

$a^2 + 2a - 4b = -5 \quad (K2)$ – условие касания со второй параболой.

4) Для нахождения a,b имеем систему: $\begin{cases} a^2 - 6a + 4b = 11 \quad (K1); \\ a^2 + 2a - 4b = -5 \quad (K2). \end{cases}$ Складывая, вычитая уравнения системы, получаем $\begin{cases} 2a^2 - 4a = 6; \\ -8a + 8b = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \{-1; 3\}; \\ b = a + 2, \end{cases} \Leftrightarrow$

a	-1	3
b	1	5

Ответ: уравнения общих касательных: $y = -x + 1; \quad y = 3x + 5.$

Замечание: перед решением этой задачи целесообразно рассмотреть **подготовительную задачу** об отыскании уравнеия касательной, проходящей через точку, не принадлежащую графику функции, например:

найдите уравнение той касательной к графику функции $y = x^2$, которая проходит через точку $(-1; -1)$. **Решение**. $y - y_0 = k(x - x_0) \Rightarrow y + 1 = k(x + 1) = kx + k;$

$$\begin{cases} y = kx + k - 1; \\ y = x^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = kx + k - 1; \\ D = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - kx - k + 1 = 0; \\ D = k^2 + 4k - 4 = 0, \end{cases} k = -2 \pm 2\sqrt{2}.$$

Отв. $y + 1 = (-2 - 2\sqrt{2})(x + 1)$; $y + 1 = (-2 + 2\sqrt{2})(x + 1)$ - уравнения искомых касательных.

Замечание. В рассмотренном примере условие касания обеспечивается равенством нулю дискриминанта. Однако, если ищется касательная не к параболе, то говорить о дискриминанте не приходится. В этом случае используется общее условие касания кривых $y = f(x); y = \varphi(x)$:

$\begin{cases} f(x) = \varphi(x); \\ f'(x) = \varphi'(x), \end{cases}$ т.е. равенство функций, равенство производных.

Условие легко получить из формулы для тангенса угла между кривыми $y = f(x); y = \varphi(x)$ в точке их пересечения x_0: $\quad tg\alpha = \left| \dfrac{f'(x_0) - \varphi'(x_0)}{1 + f'(x_0)\varphi'(x_0)} \right|$.

Решим задачу более общим способом.

Составьте уравнение общей касательной к графикам функций $\pi_1 : y = x^2 + 3x + 5$ $\pi_2 : y = -x^2 - x + 1$.

Ответ: $y = -x + 1; \quad y = 3x + 5.$

Решение.

1)Преобразуем данные функции к виду $\pi_1 : y = x^2 + 3x + 5 = (x + 1{,}5)^2 + 2{,}75$; $\pi_2 : y = -x^2 - x + 1 = 1{,}25 - (x + 0{,}5)^2$ и построим их графики: первая парабола имеет вершину в точке $(-1{,}5; 2{,}75)$, ветви её направлены вверх; вторая парабола имеет вершину в точке $(-0{,}5; 1{,}25)$, ветви её направлены вниз. Из графика видно, что есть две общие касательные, уравнения которых вида $y = ax + b$ мы должны найти.

2) Условие касания прямой $y = ax + b$ и параболы $y = x^2 + 3x + 5$ имеет вид $\begin{cases} ax + b = x^2 + 3x + 5; \\ a = 2x + 3; \end{cases}$

исключаем неизвестную x, выражая его из второго уравнения и подставляя в первое:

$\begin{cases} a \cdot \dfrac{a-3}{2} + b = \left(\dfrac{a-3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \dfrac{a-3}{2} + 5; \\ x = \dfrac{a-3}{2}; \end{cases} \Rightarrow a^2 - 6a + 4b = 11 \quad (K1) -$ условие касания с первой параболой.

3) Условие касания прямой $y = ax + b$ и параболы $y = -x^2 - x + 1$ имеет вид

$\begin{cases} ax + b = y = -x^2 - x + 1; \\ a = -2x - 1; \end{cases}$ исключаем неизвестную x, выражая его из второго уравнения и подставляя

в первое: $\begin{cases} a \cdot \dfrac{-a-1}{2} + b = \left(\dfrac{-a-1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \dfrac{-a-1}{2} + 5; \\ x = \dfrac{-a-1}{2}; \end{cases} \Rightarrow a^2 + 2a - 4b = -5 \quad (K2) -$ условие касания со второй параболой.

4) Для нахождения a,b имеем систему: $\begin{cases} a^2-6a+4b=11 & (K1); \\ a^2+2a-4b=-5 & (K2). \end{cases}$ Складывая, вычитая уравнения системы, получаем $\begin{cases} 2a^2-4a=6; \\ -8a+8b=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in\{-1;3\}; \\ b=a+2, \end{cases} \Leftrightarrow$

a	-1	3
b	1	5

Ответ: уравнения общих касательных: $y=-x+1$; $y=3x+5$.

Обобщённый подход применим для графиков тригонометрических, логарифмических, показательных и иных функций, в отличии от первого подхода.

Пример 47. (Исследовательское задание).

На прямой $l: x=-\frac{15}{4}y$ найдите точку, через которую проходят две взаимно – перпендикулярные касательные к параболе $\pi: y=2x^2$.

Ответ: $\left(\frac{15}{32};-\frac{1}{8}\right)$.

Решение.

1)Построим графики функций $y=-\frac{4}{15}x$ и $y=2x^2$. Заметим, что через точку (0;0), принадлежащую прямой $l: x=-\frac{15}{4}y$ проходит касательная (ось абсцисс), но другая перпендикулярная ей ось (ординат), хотя и имеет одну точку с параболой, не является касательной к ней (объясните, почему). Из графика можно увидеть на прямой точку в IV четверти, из которой можно провести две взаимно – перпендикулярные касательные к параболе $\pi: y=2x^2$.

2)Известно, что две прямые $l_1: y=k_1x+b_1$ и $l_2: y=k_2x+b_2$ перпендикулярны т.и т.т. $l_1\perp l_2 \Leftrightarrow k_1\cdot k_2=-1$, когда их произведение равно -1, т.е. угловые коэффициенты искомых касательных имеют вид $k;-\frac{1}{k}$.

3)Уравнение искомой касательной, проходящей через точку $\left(x_0;-\frac{4}{15}x_0\right)$ на данной прямой можно записать в виде $y+\frac{4}{15}x_0=k(x-x_0)$ или $y+\frac{4}{15}x_0=-\frac{1}{k}(x-x_0)$. Отметим, что в этих уравнениях учтено, что прямые взаимно – перпендикулярны, вершина прямого угла находится на прямой $y=-\frac{4}{15}x$, но пока не отражено, что каждая из прямых имеет по единственной общей точке с параболой $y=2x^2$. Это значит, что системы $\begin{cases} y+\frac{4}{15}x_0=k(x-x_0); \\ y=2x^2; \end{cases}$ и $\begin{cases} y+\frac{4}{15}x_0=-\frac{1}{k}(x-x_0); \\ y=2x^2; \end{cases}$

имеют единственное решение, следовательно, соответствующие квадратные уравнения имеют нулевой дискриминант:

$$\begin{cases} 2x^2 = k(x - x_0) - \frac{4}{15}x_0; \\ D = 0; \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 2x^2 = -\frac{1}{k}(x - x_0) - \frac{4}{15}x_0; \\ D = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - kx + kx_0 + \frac{4}{15}x_0 = 0; \\ D_I = k^2 - 8\left(kx_0 + \frac{4}{15}x_0\right) = 0; \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 2x^2 + \frac{1}{k}x - \frac{1}{k}x_0 + \frac{4}{15}x_0 = 0; \\ D_{II} = \frac{1}{k^2} - 8\left(-\frac{1}{k}x_0 + \frac{4}{15}x\right) = 0. \end{cases}$$

Для отыскания касательных получена система уравнений: $\begin{cases} D_I = k^2 - 8\left(kx_0 + \frac{4}{15}x_0\right) = 0; \\ D_{II} = \frac{1}{k^2} - 8\left(-\frac{1}{k}x_0 + \frac{4}{15}x\right) = 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} k^2 = 8\left(kx_0 + \frac{4}{15}x_0\right); \\ \frac{1}{k^2} = 8\left(-\frac{1}{k}x_0 + \frac{4}{15}x\right); \end{cases} \Leftrightarrow (\pm)\begin{cases} \frac{k^2}{8} - \frac{1}{8k^2} = kx_0 + \frac{x_0}{k}; \\ \frac{k^2}{8} + \frac{1}{8k^2} = x_0\left(k - \frac{1}{k}\right) + \frac{8}{15}x_0; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{8}\left(k + \frac{1}{k}\right)\left(k - \frac{1}{k}\right) = x_0\left(k + \frac{1}{k}\right); \\ \frac{k^2}{8} + \frac{1}{8k^2} = x_0\left(k - \frac{1}{k}\right) + \frac{8}{15}x_0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{8}\left(k - \frac{1}{k}\right) = x_0; \\ \frac{k^2}{8} + \frac{1}{8k^2} = x_0\left(k - \frac{1}{k}\right) + \frac{8}{15}x_0 = x_0\left(k - \frac{1}{k} + \frac{8}{15}\right); \end{cases}$$

Здесь сокращение на $k + \frac{1}{k} \neq 0$.

Подставляя первое уравнение во второе, получим:

$$\frac{k^2}{8} + \frac{1}{8k^2} = \frac{1}{8}\left(k - \frac{1}{k}\right)\left(k - \frac{1}{k} + \frac{8}{15}\right) \Leftrightarrow k^2 + \frac{1}{k^2} = k^2 - 2 + \frac{1}{k^2} + \frac{8}{15}\left(k - \frac{1}{k}\right) \Leftrightarrow \frac{15}{4} = k - \frac{1}{k} \Leftrightarrow$$

$$15k = 4k^2 - 4 \Leftrightarrow k_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 + 64}}{8} = \left\{-\frac{1}{4}; 4\right\}.$$

При $k = 4 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{8}\left(k - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{8}\left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{32}$; очевидно, что при

$k = -\frac{1}{4} \Rightarrow x_0 = \frac{1}{8}\left(k - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{8}\left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{32}$.

Такаим образом, существует единственная точка на прямой $y = -\frac{4}{15}x$, это точка

$\left(\frac{15}{32};-\frac{4}{15}\cdot\frac{15}{32}\right)\equiv\left(\frac{15}{32};-\frac{1}{8}\right)$.

Ответ: на прямой $l: x=-\frac{15}{4}y$ существует единственная точка $\left(\frac{15}{32};-\frac{1}{8}\right)$, через которую проходят две взаимно – перпендикулярные касательные к параболе $\pi: y=2x^2$, $y=4x-2;\quad y=-\frac{x}{4}-\frac{7}{64}$.

Пример 48.

При всех значениях параметра а определите количество корней уравнения $|2t-a|-|t+2a|=t^2$.

Решение.

Для решения удобно использовать координатно-параметрическую плоскость XOt (КПП), где по оси абсцисс откладывается **координата** t, по оси ординат – **параметр** a (отсюда и название).

1)Находим нули подмодульных выражений: $2t-a=0;\quad t+2a=0$, они представляют собой прямые $a=2t$; $a=-\frac{1}{2}t$ в координатно-параметрической плоскости XOt . Эти прямые делят плоскость XOt на четыре области (квадранта), которые занумеруем римскими цифрами I,II,III,IV, где первый квадрант содержит луч OT, т.е.полупрямую, содержащую положительное направление оси OT, остальные квадранты нумеруются против часовой стрелки, т.е.в положителльном направлении.

2)Рассмотрим I-ый квадрант. Для раскрытия модулей и построения графика уравнения в первом квадранте возьмем пробную точку внутри области (не на границе), например,t=1;a=0. В этой точке знаки подмодульных выражений ++, поэтому оба модуля раскрываем с плюсом. Таким образом, в **I-ом квадранте схема раскрытия модулей ++.**

3) В **I-ом квадранте уравнение принимает вид:** $a=\frac{1}{3}t(1-t)$; **это парабола с ветвями, направленными вниз, координаты вершины имеют вид:** $t_B=\frac{1}{2};\quad a_B=\frac{1}{12};\quad t_P=\frac{5}{2}$, **где** $t_P=\frac{5}{2}$ - это абсцисс точки пересечения параболы $a=\frac{1}{3}t(1-t)$ и границы $a=-\frac{1}{2}t$ области.

4) Итак, графиком уравнения в I-ой области является фрагмент построенной параболы.

5) Во II,III,IV квадрантах поступаем аналогично: берём пробную точку, определяем схему раскрытия модулей, записываем уравнение в соответствующей области и строим график.Рекомендуется для лучшего понимания проделать все выкладки самостоятельно.

Для удобства сведём информацию в таблицу:

I квадрант	пробная точка t=1;a=0	схема раскрытия модулей ++	**Вид уравнения:** $a=\frac{1}{3}t(1-t)$; **характеристики параболы:** $t_B=\frac{1}{2};\quad a_B=\frac{1}{12};\quad t_P=\frac{5}{2}$,
II квадрант	пробная точка	схема раскрытия	**Вид уравнения:** $a=-t(t+3)$;

	t=0;a=1	модулей -+	**характеристики параболы:** $t_B=-\frac{3}{2};\quad a_B=\frac{9}{4};\quad t_P=-\frac{5}{2}$
III квадрант	пробная точка t=-1;a=0	схема раскрытия модулей --	**Вид уравнения:** $a=\frac{1}{3}t(t+1);$ **характеристики параболы:** $t_B=-\frac{1}{2};\quad a_B=-\frac{1}{12};\quad t_P=-\frac{5}{2}$
IV квадрант	пробная точка t=0;a=-1	схема раскрытия модулей +-	**Вид уравнения:** $a=t(t-3);$ **характеристики параболы:** $t_B=\frac{3}{2};\quad a_B=-\frac{9}{4};\quad t_P=\frac{5}{2}$

Построенная фигура, составленная из четырёх парабол, похожая на наклонённую восьмёрку или «бабочку», является графиком исходного уравнения.

6)Проводя горизонтальные прямые при различных значениях параметра а, фиксируем количество точек пересечения прямых с построенным графиком уравнения. Количество точек пересечения равно количеству корней уравнения при соответствующих значениях параметра а (метод сечений).

Ответ представляет собой развёртку по параметру а:

$a<-\frac{9}{4}\to 0\quad \textit{корней};$

$a=-\frac{9}{4}\to 1\quad \textit{корень};$

$-\frac{9}{4}<a<-\frac{1}{12}\to 2\quad \textit{корня};$

$a=-\frac{1}{12}\to 3\quad \textit{корня};$

$-\frac{1}{12}<a<0\to 4\quad \textit{корня};$

$a=0\to 3\quad \textit{корня};$

$0<a<\frac{1}{12}\to 4\quad \textit{корня};$

$a=\frac{1}{12}\to 3\quad \textit{корня};$

$\frac{1}{12}<a<\frac{9}{4}\to 2\quad \textit{корня};$

$a=\frac{9}{4}\to 1\quad \textit{корень};$

$a>\frac{9}{4}\to 0\quad \textit{корней}.$

Пример 49.

Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение

$a^2-2ax-8x^2-4a+4x+12|x|=0$ имеет ровно 4 различных корня.

Ответ: при $a \in \left(0;\frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right) \cup \left(\frac{8}{3};4\right)$ уравнение имеет 4 различных корня.

Решение.

Знакомый решателю способ раскрытия модуля при положительных и отрицательных x приводит к двум разным квадратным уравнениям, для каждого из которых требуется обеспечить по два корня x в соответствующей области (это первыя и вторая базовые задачи на расположение корней квадратного трёхчлена при $\lambda = 0$).

Мы применим иной подход, основанный на замене ролей координаты x и параметра a: рассматриваем данное уравнение как квадратное относительно **a** с параметром **x**:
$a^2 - 2a(x+2) - 8x^2 + 4x + 12|x| = 0$, учитывая чётность второго коэффициента, вычислим дискриминант $D_1(x) = (x+2)^2 - \left(-8x^2 + 4x + 12|x|\right) = 9x^2 - 12|x| + 4 = (3|x|-2)^2$.

Получаем два корня: $\left[\begin{array}{l} a_1 = x + 2 - (3|x| - 2) = x - 3|x| + 4; \\ a_2 = x + 2 + (3|x| - 2) = x + 3|x|; \end{array}\right.$ или

$a_{1,2} = x - 3|x| + 4 = \begin{cases} 4x + 4, x \le 0; \\ 4 - 2x, x \ge 0. \end{cases}$ $\quad a_{3,4} = x + 3|x| = \begin{cases} -2x, x \le 0; \\ 4x, x \ge 0. \end{cases}$

Для решения удобно использовать координатно-параметрическую плоскость ХОА (КПП), где по оси абсцисс откладывается **координата** x, по оси ординат – **параметр** a (отсюда и название).

Графиком первого и второго корней является угол с вершиной в точке x=0,a=4, ветви его направлены вниз.

Графиком третьего и четвёртого корней является угол с вершиной в точке x=0,a=0, ветви его направлены вверх.

При $a = \frac{4}{3}$ первый и третий корни совпадают: $-2x = 4x + 4 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$.

При $a = \frac{8}{3}$ второй и четвёртый корни совпадают: $4x = 4 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

При 0<a<4 уравнение имеет 3 или 4 корня. При этом $a = \frac{4}{3}$ и $a = \frac{8}{3}$ - контрольные значения параметра a, при которых количество корней уменьшается до трёх.

Ответ: при $a \in \left(0;\frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right) \cup \left(\frac{8}{3};4\right)$ уравнение имеет 4 различных корня.

Пример 50.

Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\left|a^2+x^2-9a-5x\right|=a+x$ имеет ровно 4 различных корня.

Ответ: при $a\in\left(4-\sqrt{20};0\right)\cup\left(\frac{8}{3};4+\sqrt{20}\right)$ уравнение имеет 4 различных корня.

Решение.

1)Модуль принимает только неотрицательные значения, отсюда получаем

необходимое условие: $a+x\ge 0\Leftrightarrow a\ge -x$. В КПП ХОА (параметр а откладывается по оси ординат) неравенство задаёт верхнюю полуплоскость, расположенную выше прямой $a=-x$.

2)Один из известных способов избавления от модуля в уравнении- возведение в квадрат.

Возводим в квадрат обе части равенства, переносим всё влево, раскладываем разность квадратов на множители, приравниваем каждый множитель к нулю, получаем совокупность:

$$\left[\begin{array}{l}a^2+x^2-9a-5x-a-x=0;\\ a^2+x^2-9a-5x+a+x=0.\end{array}\right.$$

Далее выделяем полные квадраты по переменным x,a:

$$\left[\begin{array}{l}a^2+x^2-9a-5x-a-x=0;\\ a^2+x^2-9a-5x+a+x=0.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(a-5)^2+(x-3)^2=34;\to O_1(3;5),R_1=\sqrt{34};\\ (a-4)^2+(x-2)^2=20;\to O_2(2;4),R_1=\sqrt{20}.\end{array}\right.$$

Эти уравнения задают две окружности в КПП ХОА.

3)Учитывая необходимое условие $a+x\ge 0\Leftrightarrow a\ge -x$, строим эти окружности и оставляем те части окружности (дуги), которые расположены выше прямой $a=-x$.

4)Применяем метод сечений, т.е. проводим горизонтальные прямые $a=const$ и фиксируем количество точек пересечения прямой с построенными дугами окружностей.

Ответ: при $a\in\left(4-\sqrt{20};0\right)\cup\left(\frac{8}{3};4+\sqrt{20}\right)$ уравнение имеет 4 различных корня.

Очевидно, имея график уравнения, нетрудно определить значения параметра а, при которых будет 1;2;3;4 корня. Проверьте это.

Пример 51.

Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $a^2+x^2-4a-6x=\left|2a-4x\right|$ имеет ровно 2 различных корня.

Ответ: при $a\in\left(1-\sqrt{26};5{,}6\right)\cup\left(1+\sqrt{26};3+\sqrt{10}\right)$ уравнение имеет 2 различных корня.

Решение.

1)Модуль принимает только неотрицательные значения, отсюда получаем

необходимое условие: $a^2+x^2-4a-6x\ge 0 \Leftrightarrow (a-2)^2+(x-3)^2-13\ge 0$. В КПП ХОА (параметр а откладывается по оси ординат) неравенство задаёт внешнюю часть круга и границу круга с центром $O(3;5), R=\sqrt{13}$.

2)Один из известных способов избавления от модуля в уравнении- нахождение нулей подмодульного выражения и рассмотрение областей, в которых подмодульные выражения положительны; отрицательны:

$2a-4x=0 \Leftrightarrow a=2x$, в КПП – это прямая, выше неё подмодульное выражение положительно (достаточно взять пробную точку), ниже неё подмодульное выражение отрицательно. Поэтому исходное уравнение распадается на совокупность двух систем:

$$a^2+x^2-4a-6x=|2a-4x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+x^2-4a-6x=2a-4x\\ a\ge 2x;\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+x^2-4a-6x=-2a+4x\\ a\le 2x;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(a-3)^2+(x-1)^2=10\\ a\ge 2x;\end{cases}\\ \begin{cases}(a-1)^2+(x-5)^2=26\\ a\le 2x;\end{cases}\end{array}\right.$$

Выделение полных квадратов по переменным х,а позволяет определить координаты центров и радиусы окружностей, которые будем строить: выше прямой $a=2x$ для первой системы и ниже прямой $a=2x$ для второй системы.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(a-3)^2+(x-1)^2=10;\\ a\ge 2x;\end{cases} \to O_1(1;3), R_1=\sqrt{10};\\ \begin{cases}(a-1)^2+(x-5)^2=26;\\ a\le 2x;\end{cases} \to O_2(5;1), R_2=\sqrt{26};\end{array}\right.$$

Эти системы уравнений и неравенств задают дуги двух окружностей в КПП ХОА.

3)Построив эти дуги окружностей, убеждаемся, что необходимое условие выполняется.

4)Применяем метод сечений, т.е. проводим горизонтальные прямые $a=const$ и фиксируем количество точек пересечения прямой с построенными дугами окружностей.

Ответ: при $a\in\left(1-\sqrt{26};5{,}6\right)\cup\left(1+\sqrt{26};3+\sqrt{10}\right)$ уравнение имеет 2 различных корня.

Очевидно, имея график уравнения, нетрудно определить значения параметра а, при которых будет 1;2;3;4 корня. Проверьте это.

Пример 52.

Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^2-4a^2}=\sqrt{4x^2+(8a-3)x-6a}$ имеет единственный корень на отрезке $[-4;2]$.

Ответ: при $a\in\left[-1;-\frac{3}{4}\right]\cup\left(\frac{3}{8};2\right]\Rightarrow \exists!\quad x=-2a.$

Решение.

1)Данное уравнение равносильно системе, в которую входят **необходимое условие существования квадратного корня,** следствие из данного уравнения и условие $x \in [-4;2]$:

$$\begin{cases} x \in [-4;2]; \\ x^2 - 4a^2 \ge 0; \\ x^2 - 4a^2 = 4x^2 + (8a-3)x - 6a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-4;2] \\ x^2 - 4a^2 \ge 0; \\ 3x^2 + (8a-3)x + 4a^2 - 6a = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-4;2] \\ x^2 - 4a^2 \ge 0; \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = -2a; \\ x_2 = 1 - \dfrac{2}{3}a; \end{array}\right. \end{cases}$$

2)Проверка необходимого условия и условия $x \in [-4;2]$ для первого корня :

$$\begin{cases} x^2 - 4a^2 \ge 0; \\ x \in [-4;2]; \\ x_1 = -2a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 - 4a^2 \ge 0; \\ -4 \le -2a \le 2; \\ x_1 = -2a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 - 4a^2 \ge 0; \\ -1 \le a \le 2; \\ x_1 = -2a; \end{cases}$$ выполнено при $a \in [-1;2]$.

3)Проверка необходимого условия и условия $x \in [-4;2]$ для второго корня :

$$\begin{cases} x^2 - 4a^2 \ge 0; \\ x \in [-4;2]; \\ x_2 = 1 - \dfrac{2}{3}a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(1 - \dfrac{2}{3}a\right)^2 - 4a^2 \ge 0; \\ x \in [-4;2]; \\ x_2 = 1 - \dfrac{2}{3}a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(1 - \dfrac{2}{3}a - 2a\right)\left(1 - \dfrac{2}{3}a + 2a\right) \ge 0; \\ -4 \le 1 - \dfrac{2}{3}a \le 2; \\ x_2 = 1 - \dfrac{2}{3}a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(1 - \dfrac{8}{3}a\right)\left(1 + \dfrac{4}{3}a\right) \ge 0; \\ a \in [-1{,}5;7{,}5]; \\ x_2 = 1 - \dfrac{2}{3}a; \end{cases}$$

Итак, при $a \in \left[-\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{8}\right] \Rightarrow x_2 = \left(1 - \dfrac{2}{3}a\right) \in ОДЗ$ и удовлетворяет условию $x \in [-4;2]$.

4)Для наглядности удобно сделать развёртку по параметру: над осью параметра ОА запишем

$x_1 = -2a$	0к	1к	1к	1к	1к	1к	1к	1к	0к
	$a \in (-\infty;-1)$	a= -1	$a \in (-1;-0{,}75)$	a= -0,75	$a \in \left(-\frac{3}{4};\frac{3}{8}\right)$	$a = \frac{3}{8}$	$a \in \left(\frac{3}{8};2\right)$	a= 2	a>2
$x_2 = 1 - \frac{2}{3}a$	0к	0к	0к	1к	1к	1к	0к	0к	0к

информацию про первый корень, под осью параметра запишем информацию про второй корень. Корни $x_1 = -2a$ и $x_2 = 1 - \frac{2}{3}a$ совпадают при а=-0,75. Из развёртки видно, что первый корень существует на промежутках, где второго корня уже нет. Отсюда получаем ответ:

при $a \in \left[-1;-\frac{3}{4}\right] \cup \left(\frac{3}{8};2\right] \Rightarrow \exists! \quad x=-2a.$

Пример 53.

Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $x\sqrt{x-3a}=\sqrt{15a-10ax}$ имеет единственный корень на отрезке $[-1;2]$.

Ответ: при $a \in \left[0;\frac{1}{2}\right] \Rightarrow \exists! \quad x \in [0;1,5]$. Ни при каких значениях параметра **а** корень уравнения не принадлежит $[-1;0) \cup (1,5;2]$.

Решение.

1)Множеством значений квадратного корня является множество неотрицательных чисел $E(\sqrt{\ })=[0;+\infty)$, следовательно, $x \geq 0$. Поэтому искомый единственный корень может находиться только на отрезке $[0;2]$.

2)Данное уравнение равносильно системе, в которую входят **необходимое условие существования квадратного корня** и следствие из данного уравнения:

$$\begin{cases} x \geq 3a; \\ 15a-10ax \geq 0; \\ x^2(x-3a)=15a-10ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3a; \\ 3a \geq 2ax; \\ x^3-3ax^2+10ax-15a=0; \end{cases}$$

При а=0 эта система имеет единственное решение х=0, удовлетворяющее требованию задачи.

При а>0 система имеет вид $\begin{cases} x \geq 3a; \\ 3 \geq 2x; \quad x \leq 1,5. \\ x^3-3ax^2+10ax-15a=0; \end{cases}$ Заметим, что при а=0,5 областью допустимых значений х является единственная точка х=1,5, удовлетворяющая требованию задачи. Найдём соответствующее х=1,5 значение параметра а:

$$\begin{cases} x=1,5; \\ x^3-3ax^2+10ax-15a=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1,5; \\ a=0,5; \end{cases}$$

Проверка: при а=0,5 решим уравнение $x^3-3\cdot 0,5x^2+10\cdot 0,5x-15\cdot 0,5=0 \Leftrightarrow 2x^3-3\cdot x^2+5x-15=0$ рациональные корни ищем среди дробей вида $\frac{p}{q}$, где р- делители -15, q- делители 2; число 1,5 является корнем, единственность корня следует из разложения $2x^3-3\cdot x^2+5x-15=(x-1,5)(2x^2+10)$.

При а<0 получаем, что $x \geq 1{,}5$.

3)Итак, при $a \in \{0;0{,}5\}$требования задачи выполняются. Покажем, что при $a \in (0;05)$ требования задачи выполняются и других искомых значений нет.

Рассмотрим уравнение $x^3 - 3ax^2 + 10ax - 15a = 0$ при а>0, $0 \leq x \leq 1{,}5$ как неявно заданную функцию от x, выразим а через x : $a(x) = \dfrac{x^3}{3x^2 - 10x + 15}$. Функция $a(x)$непрерывна на R, знаменатель её в ноль не обращается, $a(0) = 0;\ a(1{,}5) = \dfrac{1{,}5^3}{3 \cdot 1{,}5^2 - 10 \cdot 1{,}5 + 15} = \dfrac{1}{2}$

функция $a(x)$имеет неотрицательную производную $a'(x) = \dfrac{x^2(3x^2 - 20x + 45)}{(3x^2 - 10x + 15)^2} \geq 0$, следовательно, она монотонно возрастает от 0 до 0,5.

В силу монотонности функция $a(x)$обратима, т.е.для каждого значения $a \in [0;0{,}5]$существует единственное значение $x \in [0;1{,}5]$, в котором данное значение а достигается (для каждого образа существует единственный прообраз).

При а<0 получаем ту же функцию $a(x) = \dfrac{x^3}{3x^2 - 10x + 15}$, где левая часть отрицательна, а правая часть отрицательной быть не может, т.к. исходное уравнение не определено при x<0.

Ответ: при $a \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right] \Rightarrow \exists!\ \ x \in [0;1{,}5]$. Ни при каких значениях параметра **а** корень уравнения не принадлежит $[-1;0) \cup (1{,}5;2]$.

Пример 54.

Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение
$(|x+2| + |x-a|)^2 - 4(|x+2| + |x-a|) + 3a(4-3a) = 0$ имеет ровно два различных корня.

Ответ: при $a \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(1; \dfrac{4}{3}\right]$ уравнениеимеет два различных корня.

Решение.

1)Замечаем, что выражения $3a$ и $(4-3a)$удовлетворяют теореме Франсуа Виета, следовательно,
$\left[\begin{array}{l}(|x+2| + |x-a|) = 3a; \\ (|x+2| + |x-a|) = 4 - 3a;\end{array}\right.$ левые части неотрицательны по свойству модуля, получаем, что
$0 \leq a \leq \dfrac{4}{3}$.

В координатно-параметрической плоскости (КПП) , применяя метод областей, построим графики обоих уравнений. В горизонтальной полосе $0 \le a \le \frac{4}{3}$ есть два промежутка $a \in \left[0;\frac{1}{2}\right) \cup \left(1;\frac{4}{3}\right]$, в которых горизонтальные прямые a=const дважды пересекают график уравнений. Ответ: при $a \in \left[0;\frac{1}{2}\right) \cup \left(1;\frac{4}{3}\right]$ уравнениеимеет два различных корня.

Пример 55 (ЕГЭ 2023).

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\left(x^2+y^2+6x\right)\cdot\sqrt{x+y+6}=0;\\ y=x+a;\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: при $a \in [0;6] \cup \left\{3-3\sqrt{2};3+3\sqrt{2}\right\}$ система уравнений имеет два различных решения.

Решение.

1)Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю, а другой при этом существует, поэтому данная система равносильна следующей системе

$$\begin{cases}\left(x^2+y^2+6x\right)\cdot\sqrt{x+y+6}=0;\\ y=x+a;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2+y^2+6x=0;\\ x+y+6=0; \Leftrightarrow y=-x-6;\end{array}\right.\\ x+y+6\ge 0; \quad y=x+a;\end{cases}$$

2)Графиками первого и второго уравнений являются дуга окружности с центром $O(-3;0)$ радиуса R=3 и прямая y=6-x, окружность и прямая пересекаются в точках (-6;0) и (0;-6); дуга окружности расположена выше прямой.

3)Найдём условия касания окружности $x^2+y^2+6x=0 \Leftrightarrow (x+3)^2+y^2=9$ и прямой y=x+a.

Система $\begin{cases}(x+3)^2+y^2=9;\\ y=x+a;\end{cases}$ имеет единственное решение, если квадратное уравнение $(x+3)^2+(x+a)^2=9 \Leftrightarrow 2x^2+2x(a+3)+a^2=0$ имеет единственное решение, что равносильно $D_1(a)=(a+3)^2-2a^2=6a+9-a^2=0 \Leftrightarrow a_1=3-3\sqrt{2}; \quad a_2=3+3\sqrt{2}.$ Первое значение параметра $a_1=3-3\sqrt{2}$ соответствует нижней касательной к окружности, второе $a_2=3+3\sqrt{2}$ - верхней.

4)Исследуя с помощью графиков количество общих точек графиков (дуги окружности и прямой $y=-x-6$) и прямых y=x+a, получаем:

При $a<3-3\sqrt{2}; \quad a>3+3\sqrt{2}$ -1 решение;

при $a \in [0;6] \cup \left\{3-3\sqrt{2}; \quad 3+3\sqrt{2}\right\}$ - 2 решения;

при $a \in \left(3-3\sqrt{2};0\right) \cup \left(6;3+3\sqrt{2}\right)$ - 3 решения.

Ответ: при $a \in [0;6] \cup \left\{3-3\sqrt{2}; \quad 3+3\sqrt{2}\right\}$ - 2 решения.

Пример 56. (ЕГЭ 2019).

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{x^2-4x+a}{4x^2-6ax+a^2}=0$ имеет ровно два различных решения.

Ответ: при $a\in(-\infty;-5)\cup(-5;0)\cup(0;3)\cup(3;4)$ уравнение имеет два различных решения.

Решение.

1 способ решения

1)Замечаем, что уравнение $x^2-4x+a=0$ имеет два различных корня только при a<4, это необходимое условие.

2)Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель при этом существует и не обращается в ноль, поэтому данная система равносильна следующей системе

$$\begin{cases} x^2-4x+a=0; \\ 4x^2-6ax+a^2\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+a=0 \\ \left[\begin{array}{l} x\neq a; \\ x\neq \frac{a}{5}; \end{array}\right. \end{cases}$$

3)Подставляя поочерёдно в уравнение $x^2-4x+a=0$ сначала $x=a$, затем $x=\frac{a}{5}$, находим, что значения $a\in\{-5;0;3\}$ из интервала $a\in(-\infty;4)$ надо исключить. Получаем Ответ: при $a\in(-\infty;-5)\cup(-5;0)\cup(0;3)\cup(3;4)$ уравнение имеет два различных решения.

2 способ решения использует координатно-параметрическую плоскость xoa . Построим в КПП графики параболы $a=-x^2+4x$ и прямых $a=x;\quad a=5x$, точки пересечения графиков имеют ординаты при значениях $a\in\{-5;0;3\}$. При этих значениях а нули числителя и знаменателя совпадают, количество корней равно единице, исключаем значения $a\in\{-5;0;3\}$.
Ответ: при $a\in(-\infty;-5)\cup(-5;0)\cup(0;3)\cup(3;4)$.

Пример 57.

Две параболы расположены на плоскости так, что оси координат являются их осями симметрии и параболы пересекаются в четырёх точках. Докажите, что эти четыре точки принадлежат одной окружности. Найдите уравнение этой окружности.

Решение. Запишем уравнения парабол $y=cx^2+d; c>0; d<0;\qquad x=ay^2+b; a>0; b<0.$

Координаты четырёх точек пересечения парабол удовлетворяют системе уравнений

$\begin{cases} y=cx^2+d; \\ x=ay^2+b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{c}=x^2+\frac{d}{c}; \\ \frac{x}{a}=y^2+\frac{b}{a}; \end{cases}$ складывая уравнения, получаем $x^2-\frac{x}{a}+\frac{d}{c}+y^2-\frac{y}{c}+\frac{b}{a}=0$; далее выделяем полные увадраты по формулам сокращённого умножения:

$$\left(x^2-2\cdot\frac{x}{2a}+\frac{1}{(2a)^2}\right)-\frac{1}{(2a)^2}+\frac{d}{c}+\left(y^2-\frac{y}{2c}+\frac{1}{(2c)^2}\right)-\frac{1}{(2c)^2}+\frac{b}{a}=0;\Leftrightarrow$$

$$\left(x^2-\frac{1}{2a}\right)^2+\left(y^2-\frac{1}{2c}\right)^2=\frac{1}{(2a)^2}-\frac{d}{c}+\frac{1}{(2c)^2}-\frac{b}{a};$$

причём, $\frac{1}{(2a)^2}-\frac{d}{c}+\frac{1}{(2c)^2}-\frac{b}{a}>0$ как сумма четырёх положительных чисел. Последнее уравнение

является уравнением окружности с центром в точке $O\left(\frac{1}{2a};\frac{1}{2c}\right)$ и

с радиусом $R=\sqrt{\frac{1}{(2a)^2}-\frac{d}{c}+\frac{1}{(2c)^2}-\frac{b}{a}}$.

Вопрос: как решить задачу, если оси симметрии парабол параллельны осям координат?

Подсказка: в уравнении параболы $y=ax^2+bx+c$ выделите полный квадрат, найдите сдвиг вдоль оси абсцисс такой, чтобы уничтожился линейный член. Аналогичное проделайте со второй параболой $x=dy^2+ey+l$, задача сведётся к уже решённой в новых осях координат.

Пример 58. Турнир Архимеда,2001.

Приведённый квадратный трёхчлен $P_2(x)=x^2+bx+c$ имеет положительный дискриминант D. Сколько корней имеет уравнение $P_2(x)+P_2\left(x+\sqrt{D}\right)=0$?

Решение. Запишем уравнение

$$P_2(x)+P_2\left(x+\sqrt{D}\right)=0\Leftrightarrow x^2+bx+c+\left(x+\sqrt{D}\right)^2+b\left(x+\sqrt{D}\right)+c=0\Leftrightarrow$$
$$2x^2+\left(2b+2\sqrt{D}\right)x+D+b\sqrt{D}+2c=0;$$

Дискриминант последнего уравнения равен

$$D_2=\left(b+\sqrt{D}\right)^2-2\left(D+b\sqrt{D}+2c\right)=0.$$

Ответ: 1 корень.

Вопрос: Сколько корней имеет уравнение $P_2(x)+P_2\left(x-\sqrt{D}\right)=0$?

Пример 59. Турнир Архимеда,2001.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax^2-2x+2a^2-4=0$ имеет только целые корни.

Решение. 1)Проверим контрольное значение параметра a=0 $\Rightarrow x=-2; x\in Z$, значит, a=0 удовлетворяет требованию задачи.

2)Необходимое условие разрешимости уравнения $D\geq 0\Leftrightarrow 1-a\left(2a^2-4\right)\geq 0\Leftrightarrow 2a^3-4a-1\leq 0$.

3)По теореме Франсуа Виета корни x_1, x_2 удовлетворяют уравнениям $x_1 + x_2 = \frac{2}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = 2a - \frac{4}{a}$.

4)Теорема: числа x_1, x_2 являются целыми тогда и только тогда, когда $x_1 + x_2 = \frac{2}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = 2a - \frac{4}{a}$ являются целыми. Докажите самостоятельно.

5) $\begin{cases} \frac{2}{a} \in Z; \\ 2a - \frac{4}{a} \in Z; \\ 2a^3 - 4a - 1 \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \left\{ \pm 1; \pm 2; \pm \frac{1}{n}; \pm \frac{2}{k}; \right\}; n, k \in Z; \\ 2a - \frac{4}{a} \in Z; \\ 2a^3 - 4a - 1 \le 0; \end{cases}$ Из чисел первого соотношения системе удовлетворяют $a \in \left\{ 1; -2; \frac{1}{2} \right\}$.

Ответ: при $a \in \left\{ 0; 1; -2; \frac{1}{2} \right\} \Rightarrow x \in Z.$

Пример 60. Региональный этап всероссийской олимпиады школьников по математике 2015/2016гг.

Даны квадратные трёхчлены $f_1(x); f_2(x); f_3(x); \dots f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2, с одинаковыми коэффициентами при x, но разными свободными членами. У каждого многочлена есть по два корня. У каждого многочлена $f_i(x)$ выбрали по одному корню и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + f_4(x_3) + \dots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?

Решение. 1)По условию $\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c_1 = 0; \\ ax_2^2 + bx_2 + c_2 = 0; \\ ax_3^2 + bx_3 + c_3 = 0; \\ \dots. \\ ax_{99}^2 + bx_{99} + c_{99} = 0; \\ ax_{100}^2 + bx_{100} + c_{100} = 0; \end{cases}$

2)Распишем интересующую нас сумму более подробно:

$$\left(ax_1^2 + bx_1 + c_2\right) + \left(ax_2^2 + bx_2 + c_3\right) + \left(ax_3^2 + bx_3 + c_4\right) + \dots. + \left(ax_{99}^2 + bx_{99} + c_{100}\right) + \left(ax_{100}^2 + bx_{100} + c_1\right) =$$
$$= \left(ax_1^2 + bx_1 + c_1 - c_1 + c_2\right) + \left(ax_2^2 + bx_2 + c_2 - c_2 + c_3\right) + \left(ax_3^2 + bx_3 + c_3 - c_3 + c_4\right) + \dots$$
$$. + \left(ax_{99}^2 + bx_{99} + c_{99} - c_{99} + c_{100}\right) + \left(ax_{100}^2 + bx_{100} + c_{100} - c_{100} + c_1\right) =$$
$$= \left(-c_1 + c_2\right) + \left(-c_2 + c_3\right) + \left(-c_3 + c_4\right) + \dots + \left(-c_{99} + c_{100}\right) + \left(-c_{100} + c_1\right) = 0.$$

Отв.0.

Вопрос: Даны квадратные трёхчлены $f_1(x);\ f_2(x);\ f_3(x);\dots f_{2025}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2, с одинаковыми коэффициентами при x, но разными свободными членами. У каждого многочлена есть по два корня. У каждого многочлена $f_i(x)$ выбрали по одному корню и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать сумма

$f_2(x_1)+f_3(x_2)+f_4(x_3)+\dots+f_{2025}(x_{2024})+f_1(x_{2025})$?

Пример 61. Олимпиада МГУ для школьников по математике «Покори Воробьёвы горы» 2016г .

Найдите наименьшее значение функции $f(x)=x^2+(x-2)^2+(x-4)^2+(x-6)^2+\dots+(x-100)^2$.

Краткое решение.

$$f(x)=51x^2-2x(2+4+\dots+100)+2^2+4^2+\dots+100^2=51x^2-102\cdot 50x+100\cdot 101\cdot 17;$$
$$x_B=50;\ y_B=y(50)=44200.$$

Ответ:44200.

Подсказка: методом математической индукции докажите формулу

$1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Вопрос:

1)Чему равняется точка минимума и минимум функции

$f(x)=x^2+(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2+\dots+(x+2025)^2$?

2)Чему равняется точка минимума и минимум функции

$f(x)=x^2+(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2+\dots+(x+n)^2$?

При решении задач **функционально-аналитическим способом** часто применяется **теорема:**

Если функция $F(x)$ монотонно возрастает на R, то уравнения $F(F(x))=x$ и $F(x)=x$ равносильны.

Пример 62. Олимпиада МГУ для школьников по математике «Покори Воробьёвы горы» 2016г .

Найдите значение параметра a, при котором минимальна сумма всех действительных корней уравнения $\dfrac{f(a)\cdot x^2+1}{x^2+g(a)}=\sqrt{\dfrac{x\cdot g(a)-1}{f(a)-x}}$, где $f(a)=a^2-\sqrt{21}\cdot a+26;\quad g(a)=1{,}5\cdot a^2-\sqrt{21}\cdot a+27$.

Решение.

1)Найдём множество значений функции $f(a)=a^2-\sqrt{21}\cdot a+26;$

$a_B=\dfrac{\sqrt{21}}{2};\ f_B(a)=20{,}75\Rightarrow E(f)=[20{,}75;+\infty).$

2)Найдём множество значений функции $g(a)=1{,}5\cdot a^2-\sqrt{21}\cdot a+27$

$a_B=\dfrac{\sqrt{21}}{3};\ g_B(a)=23{,}5\Rightarrow E(f)=[23{,}5;+\infty).$

3)Заметим, что $g(a)-f(a)=0{,}5a^2+1>0\Rightarrow g(a)>f(a).$

4)Найдём область определения функции в правой части уравнения $D\left(\sqrt{\dfrac{x\cdot g(a)-1}{f(a)-x}}\right).$

$$\frac{x\cdot g(a)-1}{f(a)-x}\ge 0\Leftrightarrow \frac{x-\dfrac{1}{g(a)}}{f(a)-x}\ge 0\Leftrightarrow \frac{x-\dfrac{1}{g(a)}}{x-f(a)}\le 0\Leftrightarrow x\in\left[\frac{1}{g(a)};\ f(a)\right].$$

Таким образом, $D\left(\sqrt{\dfrac{x\cdot g(a)-1}{f(a)-x}}\right)=\left[\dfrac{1}{g(a)};\ f(a)\right].$

5) Найдём область значений функции $F(x)=\dfrac{f(a)\cdot x^2+1}{x^2+g(a)}$ в левой части уравнения

$E\left(\dfrac{f(a)\cdot x^2+1}{x^2+g(a)}\right).$

Замечаем, что функция чётная, в нуле равна $\dfrac{1}{g(a)}$, на бесконечности стремится к $f(a)$. Кроме того, функция монотонно возрастает на $[0;+\infty)$, действительно, вычислим производную, предварительно упростив функцию $F(x)=\dfrac{f(a)\cdot x^2+1}{x^2+g(a)}=\dfrac{f(a)\cdot(x^2+g(a)-g(a))+1}{x^2+g(a)}=f(a)+\dfrac{1-f(a)\cdot g(a)}{x^2+g(a)}\Rightarrow$

$F'(x)=\dfrac{(f(a)\cdot g(a)-1)\cdot 2x}{(x^2+g(a))^2}>0\Rightarrow F(x)\uparrow$. Итак, область значений функции $F(x)=\dfrac{f(a)\cdot x^2+1}{x^2+g(a)}$ равно $\left[\dfrac{1}{g(a)};\ f(a)\right]$, что совпадает с областью определения $D\left(\sqrt{\dfrac{x\cdot g(a)-1}{f(a)-x}}\right)=\left[\dfrac{1}{g(a)};\ f(a)\right]$ функции в правой части уравнения.

6)Что-то подсказывает нам, что в левой и правой частях уравнения $\dfrac{f(a)\cdot x^2+1}{x^2+g(a)}=\sqrt{\dfrac{x\cdot g(a)-1}{f(a)-x}}$

стоят взаимно-обратные функции. Действительно, если $F(x)=\dfrac{f(a)\cdot x^2+1}{x^2+g(a)}$, то

$$F\cdot\left(x^2+g(a)\right)=f(a)\cdot x^2+1\Leftrightarrow x^2\left(F-f(a)\right)=1-g(a)\cdot F\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{1-g(a)\cdot F}{\left(F-f(a)\right)}}=\sqrt{\frac{g(a)\cdot F-1}{\left(f(a)-F\right)}};$$

стандатно заменяем $x\to F;\quad F\to x$, получаем , что в левой и правой частях уравнения стоят взаимно-обратные функции. Наша гипотеза нашла своё подтверждение!

7)По теореме данное уравнение можно переписать в равносильном виде:
$F(x)=F^{-1}(x)\Leftrightarrow F(F(x))=(x)\Leftrightarrow F(x)=x\Leftrightarrow$

$\dfrac{f(a)\cdot x^2+1}{x^2+g(a)}=x\Leftrightarrow x^3+xg(a)=f(a)\cdot x^2+1\Leftrightarrow x^3-f(a)\cdot x^2+xg(a)-1=0$, причём, по теореме Франсуа Виета, сумма корней равна $f(a)$, наименьшее значение которой 20,75 нам известно. Осталось доказать, что кубическое уравнение $x^3-f(a)\cdot x^2+xg(a)-1=0$ имеет три действительных корня. Для этого используем **теорему Бернардо Больцано**: если непрерывная функция $\varphi(x)=x^3-f(a)\cdot x^2+xg(a)-1$ на концах интеравла $(a;b)$ принимает значения противоположных знаков $\varphi(a)\cdot\varphi(b)<0$, то **есть** хотя бы один корень уравнения $\varphi(x)=0$ на этом интеравле.

Действительно, $\varphi(0)\cdot\varphi(1)=(-1)\cdot(g-f)<0$ верно, значит по теореме Больцано на интервале $(0;1)$ имеется корень кубического уравнения.

Аналогично, $\varphi(1)\cdot\varphi(2)=(g-f)(7-4f+2g)=(g-f)\left(-22-\left(a-\sqrt{21}\right)^2\right)<0$ верно, значит по теореме Больцано на интервале $(1;2)$ имеется корень кубического уравнения.

Так как предел функции $\varphi(x)=x^3-f(a)\cdot x^2+xg(a)-1$ на $+\infty$ равен $+\infty$, то график кубического многочлена пересечет ось абсцисс на луче $x(2;+\infty)$, т.е.на этом интервале содержится третий действительный корень уравнения $\varphi(x)=x^3-f(a)\cdot x^2+xg(a)-1=0$.

8) Сумма корней уравнения равна $f(a)$, наименьшее значение которой 20,75 достигается в точке

$a_B=\dfrac{\sqrt{21}}{2}=\sqrt{5{,}25}=2{,}2912...;\ f_B(a)=20{,}75$. **Ответ:2,29.**

P.S. Был использован алгоритм извлечения квадратного корня https://ya.ru/video/preview/9205309895051903575 .

Пример 63 (ЕГЭ2007).

Найдите все значениея x, которые удовлетворяют неравенству $(2a-1)x^2<(a+1)x+3a$ при любом значении параметра $a\in(1;2)$.

Решение.

Неравенство можно рассматривать как квадратное относительно x с параметром a (при условии $a \neq 0{,}5$), а можно как линейное относительно a с параметром x. Применим вторую точку зрения: решим систему относительно x: $\begin{cases} a(2x^2 - x - 3) - x^2 - x < 0; \\ a \in (1;2). \end{cases}$

Переформулируем задачу: при каких значениях параметра x линейное неравенство $a(2x^2 - x - 3) - x^2 - x < 0$ выполнено на всём интервале $a \in (1;2)$?

Графиком линейной функции $y(a) = a(2x^2 - x - 3) - x^2 - x; \quad a \in (1;2)$ является отрезок прямой , котторый должен находиться в нижней полуплоскости. Только в этом случае неравенство выполняется. Для этого достаточно, чтобы на концах отрезка $a \in [1;2]$ функция принимала отрицательные значения: $\begin{cases} y(1) < 0; \\ y(2) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0; \\ x^2 - x - 2 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1;2)$.

Пример 64. (МГУ, мех-мат 1972).

Даны три уравнения

$$x^2 - (a+b)x + 8 = 0;(1) \qquad x^2 - b(1+b)x + c = 0;(2) \qquad x^4 - b(1+b)x^2 + c = 0;(3)$$

Каждое из них имеет по крайней мере один корень. Известно, что корни первого уравнения больше единицы и являются корнями третьего уравнения. Что хотя бы один корень первого уравнения удовлетворяет второму уравнению. Найдите числа a,b,c если b>3. Ответ:2;4;64.

Решение.

По условию все три уравнения имеют хотя бы один корень, пусть это будет $x_0; \quad x_0 > 1$ по условию.

Рассмотрим уравнения (2) и (3) , у них схожая структура, и если x_0 корень уравнения (2) , то ${x_0}^2$ тоже корень уравнения (2) , потому что оно превращается в уравнение (3). Заметим, что $x_0 \neq {x_0}^2$, т.к. $x_0 \notin \{0;1\}$. Так как x_0 является корнем (3), то в силу чётности функции $f(x) = x^4 - b(1+b)x^2 + c$ число $-x_0$ тоже является корнем (3).

Если x_0 является корнем (3), то $\pm\sqrt{x_0}$ тоже корни (3), т.к. при подстановке их в (3) получаем верное уравнение $x^2 - b(1+b)x + c = 0;(2)$.

Из корней (3) уравнения только $x_0 > 1$ и $\sqrt{x_0} > 1$ могут быть корнями первого уравнения, следовательно, уравнение (1) имеет корни x_0 и $\sqrt{x_0}$.

По теореме Франсуа Виета с учетом b>3 для первого уравнения имеем $\begin{cases} x_0 + \sqrt{x_0} = a + b; \\ x_0 \cdot \sqrt{x_0} = 8; \quad b > 3; \end{cases}$

По теореме Франсуа Виета с учетом b>3 для второго уравнения имеем $\begin{cases} x_0 + x_0{}^2 = b(b+1); \\ x_0 \cdot x_0{}^2 = c; \quad b > 3. \end{cases}$

Из первой системы получаем $\begin{cases} x_0 + \sqrt{x_0} = a + b; \\ x_0 \cdot \sqrt{x_0} = 8; \quad b > 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 4; \\ a + b = 6; \\ b > 3; \end{cases}$ тогда из второй системы

$$\begin{cases} x_0 + x_0{}^2 = b(b+1); \\ x_0 \cdot x_0{}^2 = c; \quad b > 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(b+1) = 20; \\ c = 64; \\ b > 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4; \\ c = 64. \end{cases}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что при a=2;b=4;c=64 все требования задачи выполнены. Ответ: a=2;b=4;c=64.

При решении задач полезными могут оказаться формулы сокращённого умножения, например, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$ (можно доказать путём раскрытия скобок в правой части).

Пример 65. (МФТИ).

Пусть $a \neq 0$. Известно, что уравнения $ax^2 + bx + c = 0; \quad bx^2 + cx + a = 0$ имеют общий корень. Докажите, что и уравнение $cx^2 + ax + b = 0$ имеет тот же корень.

Решение.

1)Замечаем, что все три квадратных трёхчлена в точке x=1 принимают одинаковое значение, равное a+b+c. Очевидно, что x=0 не может быть общим корнем уравнений.

2)То есть через точку $(1; a+b+c)$ проходят графики трёх данных парабол. Закрадывается подозрение, что эта общая точка и есть общий корень трёх уравнений, конечно при условии, что точка $(1; a+b+c)$ совпадает с точкой $(1;0)$, те.надо доказать, что $a+b+c=0$.Пока мы далеки от доказательства этого.

3)По условию, система $\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0; \\ bx^2 + cx + a = 0; a \neq 0; \end{cases}$ имеет решение x_0.Решим двумя способами:

1способ: уравниваем коэффициенты при x^2, домножая на $b \neq 0$ и $a \neq 0$ соответствующие уравнения, затем вычитаем из второго первое : $x_{01} = \dfrac{a^2 - bc}{b^2 - ac}; \quad b^2 - ac \neq 0.$

2 способ: уравниваем свободные члены , домножая на $a \neq 0$ и $c \neq 0$ соответствующие уравнения, затем вычитаем из первого второе : $x_{02} = \dfrac{c^2 - ab}{a^2 - bc}; \quad a^2 - bc \neq 0;$ или $x_{03} = 0.$ Но $x_{03} = 0$ противоречит условию $a \neq 0$, отбрасываем этот случай.

Найденные общие решения первого и второго уравнений есть одно и то же, приравняем их:
$\dfrac{a^2 - bc}{b^2 - ac} = \dfrac{c^2 - ab}{a^2 - bc} \Leftrightarrow a^4 - 3a^2bc + a\left(b^3 + c^3\right) = 0 \Leftrightarrow a\left(a^3 - 3abc + b^3 + c^3\right) = 0 \Leftrightarrow$ т.к. $a \neq 0$

$a^3 - 3abc + b^3 + c^3 = 0 \Leftrightarrow$ по ФСУ $(a + b + c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac\right) = 0 \Leftrightarrow$

$(a + b + c)\dfrac{1}{2}\left((a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2\right) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0$ т.к.вторая скобка в ноль не обращается.

Доказано, что три параболы пересекаются в точке $(1;0)$.QED.

Замечание. Решение возможно провести иначе: найдя общее решение первых двух уравнений $x_{01} = \dfrac{a^2 - bc}{b^2 - ac}; \quad b^2 - ac \neq 0,$ подставим его в третье: $c\left(\dfrac{a^2 - bc}{b^2 - ac}\right)^2 + a \cdot \dfrac{a^2 - bc}{b^2 - ac} + b = 0$ и после преобразований получим $b^2(a + b + c)\dfrac{1}{2}\left((a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2\right) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0$.

Пример 66. (МГУ, мех-мат 1976).

Действительные числа a,b,c таковы, что $a < b < c$. Известно, что если любое из них подставить вместо y в равенство $x^2 + \dfrac{y - 1}{y^2} \cdot x - \dfrac{1}{y} = 0 \quad (*)$, то по меньшей мере одно из оставшихся чисел будет корнем полученного квадратного уравнения. Докажите, что $0 < b < 1$.

Решение.

1)В уравнение x и y входят симметрично, это видно, если переписать уравнение в виде:
$\dfrac{x^2y^2 + xy - (x + y)}{y^2} = 0$ или $\dfrac{f(x, y)}{y^2} = 0,$ где $f(x, y) = x^2y^2 + xy - (x + y)$ симметрична относительно аргументов, поэтому, если $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(y, x) = 0; x \neq 0; y \neq 0.$

2)Пусть y=b, $\begin{cases} y = b; \\ x^2 + \dfrac{b - 1}{b^2} \cdot x - \dfrac{1}{b} = 0 \quad (**) \end{cases}$ или $\begin{cases} y = b; \\ f(x, b) = 0 \end{cases}$

3)По условию, одно из чисел a,c является корнем. Предположим, что a является корнем, а **c-нет**.
$f(x, b) = 0$.Тогда $f(a, b) = 0 \Leftrightarrow f(b, a) = 0; \quad (***) \quad f(c, b) \neq 0$.По теореме Ф.Виета из $(**)$ получаем $a + x_2 = \dfrac{1 - b}{b^2}; \quad a \cdot x_2 = -\dfrac{1}{b}; \Rightarrow a \cdot x_2 \cdot b = -1; \quad x_2 \neq c$. Или $a \cdot c \cdot b \neq -1$.

3)Пусть y=c, тогда по условию, уравнение $f(x,c)=0$ имеет только корень, равный a, т.е. $f(a,c)=0$ или $f(c,a)=0$ $(****)$. При этом $f(c,b)\neq 0;\ a\cdot c\cdot b\neq -1.$

4) Из соотношений $(***)$ и $(****)$следует, что уравнение $f(x,a)=0$ имеет два корня x=a, x=b. Тогда по теореме Ф.Виета для этого уравнения $b+c=\frac{1-a}{a^2};bc=-\frac{1}{a}\Rightarrow abc=-1,$ что противоречит допущению о том, что $f(x,b)=0$ имеет только корень a. Следовательно, оно имеет два корня b и c. Следовательно, $f(a,b)=0$ и $f(c,b)=0$.

5)Так как $a<b<c$ и ветви параболы $f(x,b)$ направлены вверх, то между корнями a и c она принимает отрицательные значения $f(b)<0$, т.е. $f(b,b)<0$

$$b^2+\frac{b-1}{b^2}\cdot b-\frac{1}{b}<0 \quad \Leftrightarrow b\in(0;1). \text{ QED.}$$

Многоуровневая система задач «МНОГОЧЛЕНЫ второй степени, квадратные уравнения, неравенства и системы с параметром, модулем».

1. Дана функция $f(x)=-2x^2+8x+13$. Найдите:1) каноническую форму данной квадратичной функции: $y=k(x-x_0)^2+y_0$ и укажите координаты вершины параболы; ось симметрии параболы; $(V(2;21))$. 2) координаты точек пересечения с осями координат; постройте график функции; 3)промежутки монотонности; 4)промежутки знакопостоянства; 5)множество значений функции; 6)составьте уравнение той касательной к графику функции, которая параллельна прямой $y=-2x+23$; 7)найдите расстояние между параллельными прямыми. $\left(\rho=\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$	Дана функция $f(x)=2x^2+12x-15$. Найдите: 1) каноническую форму данной квадратичной функции: $y=k(x-x_0)^2+y_0$ и укажите координаты вершины параболы; ось симметрии параболы; 2) координаты точек пересечения с осями координат; постройте график функции; 3)промежутки монотонности; 4)промежутки знакопостоянства; 5)множество значений функции; 6)составьте уравнение той касательной к графику функции, которая перпендикулярна прямой $y=8x+21$.	Дана функция $f(x)=-5x^2+7x-2$. Найдите: 1) каноническую форму данной квадратичной функции: $y=k(x-x_0)^2+y_0$ и укажите координаты вершины параболы; ось симметрии параболы;2) координаты точек пересечения с осями координат; постройте график функции; 3)промежутки монотонности; 4)промежутки знакопостоянства; 5)множество значений функции; 6)составьте уравнение той касательной к графику функции, которая параллельна прямой $y=16x+2$; 7)найдите расстояние между параллельными прямыми.	Дана функция $f(x)=-3x^2+7x-4$. Найдите: 1) каноническую форму данной квадратичной функции: $y=k(x-x_0)^2+y_0$ и укажите координаты вершины параболы; ось симметрии параболы; 2) координаты точек пересечения с осями координат; постройте график функции; 3)промежутки монотонности; 4) промежутки знакопостоянства; 5)множество значений функции; 6)составьте уравнение той касательной к графику функции, которая перпендикулярна прямой $y=-8x+1$.
2. Исследовательская работа Постройте график функции	**Исследовательская работа** Постройте график функции	**Исследовательская работа** Постройте график функции	**Исследовательская работа** Постройте график функции $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+1, x\ge 1;\\ x^2+2x-5, x<1\end{cases}$

$f(x)=\begin{cases}(1-x)(x+3), x\le 1;\\(x-1)(x+3), x>1\end{cases}$ 1) По графику определите, сколько корней имеет уравнение $f(x)=b,$ если $b\in\{-1;0;1;3;4;5\}$. 2)Для каждого значения а определите количество корней уравнения $f(x)=a.$ 3)При каких а уравнение $f(x)=a.$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[-1;4]$? Отв. $a\in[0;21]$ 4)При каких а уравнение $f(x)=a.$ имеет все корни на отрезке $[-1;4]$? Отв. $[4;21]$ 5) При каких а уравнение $f(x)=a.$ имеет корни на луче $(-\infty;-1)$? Отв. $a\le 4$. 6) При каких а уравнение $f(x)=a.$ не имеет корней на луче $(-\infty;-1)$? Отв. $a\ge 4$. 7) При каких а уравнение $f(x)=a.$ не имеет корней на луче $(3;+\infty)$? Отв. $a\le 12$. 8)Сколько корней имеют уравнения $f(x)=-x+1;\ f(x)=-x+4.$ Найдите их. Отв. $\{-2;1\}$ и $\frac{\sqrt{37}-3}{2}$. 9)При каких значениях параметра а уравнения $f(x)=-x+a;\ f(x)=x+a$ имеют более двух корней?	$f(x)=\begin{cases}x(6-x), x\le 0;\\x(x-6), x>0\end{cases}$ 1) По графику определите, сколько корней имеет уравнение $f(x)=b,$ если $b\in\{-1;0;1;3;4;5\}$. 2)Для каждого значения а определите количество корней уравнения $f(x)=a.$ 3)При каких а уравнение $f(x)=a.$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[-1;4]$? Отв. 4)При каких а уравнение $f(x)=a.$ имеет все корни на отрезке $[-1;4]$? Отв. 5) При каких а уравнение $f(x)=a.$ имеет корни на луче $(-\infty;-1)$? Отв.. 6) При каких а уравнение $f(x)=a.$ не имеет корней на луче $(-\infty;-1)$? Отв.. 7) При каких а уравнение $f(x)=a.$ не имеет корней на луче $(3;+\infty)$? Отв.. 8)Сколько корней имеют уравнения $f(x)=-x+1;\ f(x)=-x+4.$ Найдите их. Отв. и. 9)При каких значениях параметра а уравнения $f(x)=-x+a;\ f(x)=x+a$ имеют более двух корней? Отв. 1);2). 10)При каждом значении параметра а определите количество корней уравнения $f(x)=ax.$ Отв.1)при;2)при а=0 два корня; 3)при	$f(x)=\begin{cases}x^2-4x-1, x\ge 4;\\-x^2+4x-1, x<4\end{cases}$ 1) По графику определите, сколько корней имеет уравнение $f(x)=b,$ если $b\in\{-1;0;1;3;4;5\}$. 2)Для каждого значения а определите количество корней уравнения $f(x)=a.$ 3)При каких а уравнение $f(x)=a.$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[-1;4]$? Отв. 4)При каких а уравнение $f(x)=a.$ имеет все корни на отрезке $[-1;4]$? Отв. 5) При каких а уравнение $f(x)=a.$ имеет корни на луче $(-\infty;-1)$? Отв.. 6) При каких а уравнение $f(x)=a.$ не имеет корней на луче $(-\infty;-1)$? Отв.. 7) При каких а уравнение $f(x)=a.$ не имеет корней на луче $(3;+\infty)$? Отв.. 8)Сколько корней имеют уравнения $f(x)=-x+1;\ f(x)=-x+$ Найдите их. Отв. и. 9)При каких значениях параметра а уравнения $f(x)=-x+a;\ f(x)=x+a$ имеют более двух корней? Отв. 1);2).	1) По графику определите, сколько корней имеет уравнение $f(x)=b,$ если $b\in\{-1;0;1;3;4;5\}$. 2)Для каждого значения а определите количество корней уравнения $f(x)=a.$ 3)При каких а уравнение $f(x)=a.$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[-1;4]$? Отв. 4)При каких а уравнение $f(x)=a.$ имеет все корни на отрезке $[-1;4]$? Отв. 5) При каких а уравнение $f(x)=a.$ имеет корни на луче $(-\infty;-1)$? Отв.. 6) При каких а уравнение $f(x)=a.$ не имеет корней на луче $(-\infty;-1)$? Отв.. 7) При каких а уравнение $f(x)=a.$ не имеет корней на луче $(3;+\infty)$? Отв.. 8)Сколько корней имеют уравнения $f(x)=-x+1;\ f(x)=-x+4.$ Найдите их. Отв. и. 9)При каких значениях параметра а уравнения $f(x)=-x+a;\ f(x)=x+a$ имеют более двух корней? Отв. 1);2). 10)При каждом значении параметра а определите количество корней уравнения $f(x)=ax.$ Отв.1)при;2)при а=0 два корня; 3)при 11)При каких значениях параметра а прямая $y=a$ имеет с графиком функции

Отв. 1) $a \in \left(1; \frac{13}{4}\right)$; 2) $a \in \left(-1; \frac{21}{4}\right)$. 10)При каждом значении параметра а определите количество корней уравнения $f(x) = ax$. Отв.1)при $a \in (-\infty; 0) - 1.k$; 2)при а=0 два корня; 3)при $a \in (0; +\infty) - 3.k$ 11)При каких значениях параметра а прямая $y = a$ имеет с графиком функции две общие точки? Отв 4;0.	11)При каких значениях параметра а прямая $y = a$ имеет с графиком функции три общие точки? Отв: $-9<a<0$.	10)При каждом значении параметра а определите количество корней уравнения $f(x) = ax$. Отв.1)при;2)при а=0 два корня; 3) при 11)При каких значениях параметра *a* прямая $y = a$ имеет с графиком функции две общие точки? Отв -1;3.	три общие точки? Отв: $-6<a<-2$.
3. Парабола с вершиной в точке(-2;-4) проходит через точку с координатами (1;5). В каких точках парабола пересекает ось абсцисс? Отв. (0;0) и (-4;0).	Парабола с вершиной в точке(1;2) проходит через точку с координатами (-2;-1). В каких точках парабола пересекает ось абсцисс? Отв. $(1+\sqrt{6};0); (1-\sqrt{6};0)$.	Парабола с вершиной в точке(-1;2) проходит через точку с координатами (1;8). В каких точках парабола пересекает ось абсцисс? Отв. точек пересечения нет.	Парабола $g(x) = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $(1;1); (3;-1); (0;-4)$. В каких точках она пересекается с параболой $f(x) = -4x^2 - 7x - 4$ *Подсказка:* решите уравнение $-2x^2 + 7x - 4 = -4x^2 - 7x - 4$. При каких значениях b точка графика $y = bx^2-3x-2b+1$ с абсциссой $x_0=-0,9$ лежит на оси ОХ?
4. Даны три различные точки А, В, С. Существует ли квадратный трёхчлен, график которого проходит через эти точки? Единственный ли такой трёхчлен можно подобрать? Решите задачу в случае: A(-1;0); B(2;0); C(0;-4). **Найдите наибольшее расстояние от хорды**	Даны три различные точки А, В, С. Существует ли квадратный трёхчлен, график которого проходит через эти точки? Единственный ли такой трёхчлен можно подобрать? Решите задачу в случае: A(3;0); B(1;0); C(0;3).	Даны три различные точки А, В, С. Существует ли квадратный трёхчлен, график которого проходит через эти точки? Единственный ли такой трёхчлен можно подобрать? Решите	Парабола $g(x) = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $A(1;1); B(3;-1); C(0;-4)$. В каких точках она пересекается с параболой $f(x) = -4x^2 - 7x - 4$ **Найдите наибольшее расстояние от хорды АС параболы**

параболы ВС до стягиваемой хордой дуги параболы. Отв.($2x^2 - 2x - 4$). *Подсказка:уравнение хорды ВС имеет вид : у=2х-4; касательная* $B_1C_1 \parallel BC$ *имеет вид у=2х-6,* $\rho(B_1C_1; BC) = \frac{2}{\sqrt{5}}$	**Найдите наибольшее расстояние от хорды параболы АС до стягиваемой хордой дуги параболы.**	задачу в случае: А(-5;0); В(-1;0); С (0;-5). Найдите наибольшее расстояние от хорды параболы ВС до стягиваемой хордой дуги параболы.	$g(x) = ax^2 + bx + c$ **до стягиваемой хордой дуги параболы.**
5. Даны две точки А и В. Существует ли квадратный трёхчлен, график которого имеет вершину в точке А и проходит через точку В? Единственный ли такой трёхчлен можно подобрать? Решите задачу в случае: А(0;1), В(1;3). Приведите пример такой параболы. Составьте уравнение касательной к приведённой Вами параболе, параллельной прямой АВ. Отв. например, у=($2x^2$+1); тогда у=2х+0,5.	Даны две точки А и В. Существует ли квадратный трёхчлен, график которого имеет вершину в точке А и проходит через точку В? Единственный ли такой трёхчлен можно подобрать? Решите задачу в случае: А(3;1), В(5;-3). Приведите пример такой параболы. Составьте уравнение касательной к приведённой Вами параболе, параллельной прямой АВ. Отв.-$(x-3)^2$ + 1	Даны две точки А и В. Существует ли квадратный трёхчлен, график которого имеет вершину в точке А и проходит через точку В? Единственный ли такой трёхчлен можно подобрать? Решите задачу в случае: А(2;4), В(0;0). Приведите пример такой параболы. Составьте уравнение касательной к приведённой Вами параболе, параллельной прямой АВ. Отв.-$(x-2)^2$ + 4	Парабола $g(x) = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $(-1;1); (3;-3); (0;3)$. В каких точках она пересекается с параболой $f(x) = -2x^2 + 7x - 2$ *Подсказка:* решите уравнение $-2x^2 + 7x - 2 = -x^2 + x + 3$.
6. Квадратный трёхчлен у = ax^2+bx+c при х = 1 принимает наибольшее значение, равное 3, а при х = -1 обращается в нуль. Какое значение он примет при х = 5? Отв.у= -0.75x^2 + 1.5x + 2,25; у(5)= -9.	Дано: a, b, c, d $\in$ R, $a^2+c^2 \neq 0$. Определите, при каком значении х функция $y=(ax+b)^2+(cx+d)^2$ принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение. Отв. $x_в = -\frac{ab+cd}{a^2+c^2}; y_в = y(x_в)$)	Докажите, что квадратный трёхчлен ax^2+bx+c имеет один и тот же знак при всех $x \in R$ тогда и только тогда, когда b^2-4ac < 0.	Докажите, что квадратный трёхчлен отрицателен при всех действительных значениях аргумента в том и только том случае, когда отрицательны дискриминант и коэффициент при старшей степени неизвестной.
7. Найдите функцию	Найдите функцию $p(x)$,	Найдите функцию	Найдите функцию $p(x)$, если

$p(x)$, если при любом $x \in R$ выполняется равенство $2p(x)+p(6-x)=x^2$. *Подсказка:* замена $x \to 6-x$ приводит к системе $\begin{cases} 2p(x)+p(6-x)=x^2; \\ 2p(6-x)+p(x)=(6-x)^2 \end{cases}$ которую решаем относительно $p(x)=4x+\frac{x^2}{3}$.	если при любом $x \in R$ выполняется равенство $3p(x)+p(7-x)=2x^2$.	$p(x)$, если при любом $x \in R$ выполняется равенство $p(x)+p(7-x)=x+4$ Отв. $p(x)=x-1$.	при любом $x \in R$ выполняется равенство $3p(x)+p(8-x)=x^3+1$.
8. Найдите значение выражения $\frac{P(1)-P(-1)}{10}$,где $P(x)=1+2x+3x^2+\ldots+11x^{10}$. Отв.7,2.	Найдите значение выражения $\frac{P(1)-P(-1)}{12}$,где $P(x)=3+5x+7x^2+\ldots+27x^{12}$. Отв.15	Даны функции $P(x)=16x^2-24x+9$; $Q(x)=x^3-4x^2+6x+6$. Найдите значение выражения $\frac{P^3+Q^3}{P^2-PQ+Q^2}+\frac{P^3-Q^3}{P^2+PQ+Q^2}$ при x=0,75. Отв.0.	Даны функции $P(x)=16x^2+40x+25$; $Q(x)=x^3-3x^2+2x+2$.Найдите значение выражения $\frac{P^3+Q^3}{P^2-PQ+Q^2}+\frac{P^3-Q^3}{P^2+PQ+Q^2}$ при x=0,75. Отв. 0.
9. Найдите значение выражения $P^2(Q(x))-Q^2(P(x)),$ *при* $x=117{,}399$; где $P(x)=5x-1; Q(x)=\frac{x+1}{5}$. Отв.0.	Найдите значение выражения $P^6(Q(x))-Q^6(P(x)),$ *при* $x=117{,}277$; где $P(x)=5x+1; Q(x)=\frac{x-1}{5}$. Отв.	Найдите сумму корней многочлена $P_2(x)=$ $(1+3x+2x^2)+(1+4x+2x^2)+(1+5x+2x^2)+\ldots+(1+17x+2x^2)$. Отв.-5.	Найдите сумму корней многочлена $P_2(x)=$ $(2+3x+x^2)+(2+5x+x^2)+(2+7x+x^2)+\ldots+(2+27x+x^2)$. Отв.-15. *Подсказка:* $P_2(x)=13x^2+155x+26$
10.Найдите произведение корней многочлена $(1+2x+3x^2)+(1+5x+3x^2)+(1+8x+3x^2)+\ldots+(1+38x+3x^2)$. Отв. $p_2(x)=13+260x+39x^2$ $x_1 \cdot x_2=\frac{1}{3}$.	Найдите произведение корней многочлена $(2+x+5x^2)+(2+4x+5x^2)+(2+7x+5x^2)+\ldots+(2+49x+5x^2)$. Отв.	Найдите значение многочлена $P(x)=49x^4-42x^2y^2+9y^4$ если $x=\frac{2t}{\sqrt{7}-\sqrt{7}t^2}; y=\frac{t^2+1}{\sqrt{3}-\sqrt{3}t^2}$ Отв. $(t^2-1)^3; t \neq \pm 1;$. *Подсказка:выделите полный квадрат.*	Найдите значение многочлена $P(x)=25x^4-60x^2y^2+36y^4$ если $x=\frac{2t}{\sqrt{5}-\sqrt{5}t^2}; y=\frac{t^2+1}{\sqrt{6}-\sqrt{6}t^2}$ *Подсказка:выделите полный квадрат.*
11.Найдите значение многочлена $P(x)=x^3+6x^2+12x+19$ если $x=-2-\sqrt[3]{11}$. Отв.Подсказка: найдите уравнение, корнем	Найдите значение многочлена $P(x)=x^3+9x^2+27x+29$ если $x=-3-\sqrt[3]{2}$. Отв.Подсказка: возведите в	Найдите значение выражения $x-12y+7z$, если $3x+2y-5z=3$; $2x-5y+z=4$.	Найдите значение выражения $6x+5y+11z$, если $2x-y-5z=1$; $4x+2y+3z=3$. *Подсказка:* используйте метод неопределённых коэффициентов или

которого является число $x=-2-\sqrt[3]{11}$.	куб двучлен $x+3=-\sqrt[3]{2}$.	*Подсказка:* используйте метод неопределённых коэффициентов $x-12y+7z=a(3x+2y-5z)$ $+b(2x-5y+z)$ или решите систему относительно x,y с параметром z .Отв.5. а=-1; в=2.	решите систему относительно x,y с параметром z . Отв.5. а=-1; в=2.
12. Найдите значение выражения $(2x-3y)y+(2y-3x)x$, если $xy=-5; x+y=-11$. Ответ: $10xy-3(x+y)^2=-413$	Найдите значение выражения $(5x+2y)y+(5y+2x)x$, если $xy=-12; x-y=9$. Ответ: -6.	Найдите значение выражения $(5-3x^2)^2y+(5-3y^2)^2x$, если $xy=-2; x+y=3$. Ответ: $50(x+y)-30xy(x+y)+$ $+9xy(x^3+y^3)=735$	Найдите значение выражения $2x^4+3x^2y^2+y^4+y^2$ если $x^2+y^2=1$. Ответ:2. *Можно воспользоваться группировкой или тригонометрической подстановкой.*
13. Найдите сумму корней многочлена $f(x)=5p^2(x)+4p(x)q(x)-q^2(x)$ где $p(x)=\frac{x^2}{6}+\frac{x}{6}-\frac{29}{6}$; $q(x)=-\frac{x^2}{6}+\frac{5x}{6}+\frac{71}{6}$. Подсказка: $f(x)=(p(x)+q(x))(5p(x)-q(x))=$ $=(x+7)(x^2-36)$; $-7;\pm6$ *корни* Отв.-7. Иначе: по теореме Ф.Виета для многочлена третьей степени $f(x)=(p(x)+q(x))(5p(x)-q(x))=$ $=(x+7)(x^2-36)=x^3+7x^2-36x-36\cdot7$ сумма корней равна второму коэффициенту с обратным знаком=-7.	Найдите сумму корней многочлена $f(x)=8p^2(x)+7p(x)q(x)-q^2(x)$ где $p(x)=\frac{x^2}{9}+\frac{x}{9}-\frac{13}{9}$; $q(x)=-\frac{x^2}{9}+\frac{8x}{9}+\frac{40}{9}$.	Найдите сумму квадратов корней многочлена $f(x)=4p^2(x)+3p(x)q(x)-q^2(x)$ где $p(x)=\frac{x^2}{5}+\frac{x}{5}-\frac{27}{5}$; $q(x)=-\frac{x^2}{5}+\frac{4x}{5}+\frac{17}{5}$. Отв.14. Подсказка: $f(x)=4p^2(x)+3p(x)q(x)-q^2(x)=$ $=(p+q)(5p-q)=(x-2)(x^2-5)$	Найдите сумму квадратов корней многочлена $f(x)=2p^2(x)-p(x)q(x)-q^2(x)$ где $p(x)=\frac{x^2}{3}+\frac{x}{3}-\frac{8}{3}$; $q(x)=\frac{x^2}{5}-\frac{2x}{3}+\frac{13}{3}$. Отв. $\frac{8245}{52}$.
14. Найдите произведение корней многочлена $f(x)=8p^2(x)-7p(x)q(x)-q^2(x)$ где $p(x)=\frac{x^2}{9}+\frac{x}{9}-\frac{17}{9}$; $q(x)=\frac{x^2}{9}-\frac{8x}{9}-\frac{8}{9}$. Подсказка: $f(x)=(p(x)-q(x))(8p(x)+q(x))=$ $=(x-1)(x^2-16)$; $1;\pm4$ *корни* Отв.-16.	Найдите произведение корней многочлена $f(x)=3p^2(x)-2p(x)q(x)-q^2(x)$ где $p(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}-\frac{13}{4}$; $q(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{3x}{4}-\frac{25}{4}$. Подсказка: $f(x)=(p(x)-q(x))(3p(x)+q(x))$ Отв.	Найдите произведение квадратов корней многочлена $f(x)=12p^2(x)-11p(x)q(x)-q^2(x)$ где $p(x)=\frac{x^2}{13}+\frac{x}{13}-\frac{3}{13}$; $q(x)=\frac{x^2}{13}-\frac{12x}{13}-\frac{81}{13}$. Подсказка: $f(x)=(p(x)-q(x))(12p(x)+q(x))$ Отв.	Найдите произведение квадратов корней многочлена $f(x)=10p^2(x)+9p(x)q(x)-q^2(x)$ где $p(x)=\frac{x^2}{11}+\frac{x}{11}-\frac{41}{11}$; $q(x)=-\frac{x^2}{11}+\frac{10x}{11}-\frac{14}{11}$. Отв.

Иначе: по теореме Ф.Виета для многочлена третьей степени $f(x)=(p(x)+q(x))(5p(x)-q(x))=$ $=(x-1)(x^2-16)=x^3-x^2-16x+16$ произведение корней равна свободному члену с обратным знаком=-16.			
15. Найдите все действительные значения χ, при которых функция y = (χ²-1)x²+2(χ-1)x+2 принимает положительные значения при всех действительных значениях x. Отв. $\chi\in(-\infty;-3)\cup[1;+\infty)$	При каких значениях a функция $y=ax^2+5x+4a$ будет принимать только: 1)положительные значения; 2) отрицательные значения? Отв.1)a>1,25.2)a<-1,25.	При каких значениях x функция $y=x^2-(a+1)x+a,\ a<1$, будет принимать: 1) положительные значения; 2) отрицательные значения?	Определите промежутки знакопостоянства функции $P_2(x)=(x^2+2x-3)+$ $+(2x^2+3x-4)+$ $+(3x^2+4x-5)+\ldots+$ $+(20x^2+21x-22)$. Отв. $p_2(x)<0\Leftrightarrow$ $x\in\left(\frac{-23-\sqrt{2629}}{21};\frac{-23+\sqrt{2629}}{21}\right)$
16.При каких значениях параметра а наименьшее значение функции $y=x^2-4x-a$ равно 13? Отв.-17.	При каких значениях параметра а наибольшее значение функции $y=-x^2+6x+a$ равно 17? Отв.8.	При каких значениях параметра а наименьшее значение функции $y=3x^2-7x-a$ равно 13? Отв.	При каких значениях параметра а наибольшее значение функции $y=-2x^2+11x+a$ равно 17? Отв.
17.Постройте график функции $y=x^2$ и для каждого а найдите её наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[-2;a]$ при a>-2. Отв. при $a\in(-2;0]\Rightarrow 4;a^2$. При $a\in(0;2]\Rightarrow 4;0$. При a>2 $\Rightarrow a^2;0$.	Постройте график функции $y=-x^2$ и для каждого а найдите её наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[a;2]$ при a<2. Отв. при a<-2 $\Rightarrow 0;-a^2$. При $a\in[-2;0)\Rightarrow 0;-4$. При $a\in[0;2)\Rightarrow -a^2;-4$.	Постройте график функции $y=x^2$ и для каждого а найдите её наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[-3;a]$ при a>-3. Отв. при. При. При	Постройте график функции $y=-x^2$ и для каждого а найдите её наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[a;3]$ при a<3. Отв. при при. При.
18. Найдите все значения x, при которых функция $f(x)=x^4-8\|x\|^3+16x^2$ Принимает значения, меньшие 9	Найдите все значения x, при которых функция $f(x)=x^4-14\|x\|^3+49x^2$ Принимает значения, большие 36.	Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и принимает положительные значения для всех x, кроме x=3, $f(3)=0$.	Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и принимает положительные значения для всех x, кроме x=7, $f(7)=0$. Решите неравенство $f(\|x^2-5x+6\|-27)>0$ ***Отв.***

Отв. $x \in (-2-\sqrt{7};-3) \cup (-1;1) \cup (3;2+\sqrt{7})$		Решите неравенство $f(\lvert x^2-5\rvert -17) > 0$. ***Отв.*** $(-\infty;-5) \cup (-5;5) \cup (5;+\infty)$	$\left(-\infty;\frac{5-\sqrt{137}}{2}\right) \cup \left(\frac{5-\sqrt{137}}{2};\frac{5+\sqrt{137}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{137}}{2};+\infty\right)$
19. Постройте график функции $y = \lvert x^2-4x\rvert - 5$. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y(x)$ на отрезке $[-1;5]$. Отв.-1; -5.	Постройте график функции $y = \lvert x^2-4\rvert + \lvert x^2-9\rvert$. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y(x)$ на всей числовой прямой. Отв. $y_{\min} = 5, x \in [-3;-2] \cup [2;3]$	Решите уравнение: $\lvert x^2-6x-16\rvert + \lvert 2x+4\rvert = 13$.Отв.-3; $4-\sqrt{23}$.	Решите уравнение: $\lvert x^2-4x+3\rvert + \lvert x^2-4x-5\rvert = 8$ Отв. $x \in [-1;1] \cup [3;5]$.
20. Для каждого значения параметра a определите число решений уравнения $\sqrt{2\lvert x\rvert - x^2} = a$. *Подсказка:постройте график функци* $y = \sqrt{2\lvert x\rvert - x^2};x[-2;2];y \ge 0$ *и примените метод сечений.* *Отв.а>1 0 к;* *а=1 2 к;* *0<а<1 4к;* *а=0 3к;* *а<0 0к .*	Для каждого значения параметра а определите число решений уравнения $\lvert x^2-2x-3\rvert = a$	Для каждого значения параметра а определите число решений уравнения $\lvert x^2-9x-22\rvert = 2a-1$	Для каждого значения параметра а определите число решений уравнения $\lvert x^2-9x-22\rvert = a^2-1$
21. Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и принимает положительные значения для всех х, кроме х=7, $f(7)=0$. Решите неравенство $(x^2-36)f(x) \le 0$. ***Отв.*** $[-6;6] \cup \{7\}$	Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и принимает отрицательные значения для всех х, кроме х=9, $f(9)=0$. Решите неравенство $(x^2-49)f(x) \le 0$. ***Отв.***	Функция $f(x)$ периодическая с периодом, равным 9. Решите неравенство $f(x) \ge 18$, если $f(x) = 9x - x^2, x \in [0;9]$. Отв. $3n+3 \le x \le 9n+6, n \in Z$.	Функция $f(x)$ периодическая с периодом, равным 11. Решите неравенство $f(x) \le 18$, если $f(x) = 11x - x^2, x \in [0;11]$. Отв.
22. Функция $f(x)$ определена и монотонно убывает на всей числовой прямой.Решите неравенство $f(\lvert x-1\rvert -1) < f(\lvert 5x+2\rvert)$. *Подсказка:*	Функция $f(x)$ определена и монотонно возрастает на всей числовой прямой. Решите неравенство $f(\lvert x^2-1\rvert -1) < f(\lvert 5x+2\rvert)$.	Функция $f(x)$ определена и монотонно убывает на всей числовой прямой.Решите неравенство $f(\lvert x-4\rvert -4) < f(\lvert 3x+5\rvert)$.	Функция $f(x)$ определена и монотонно возрастает на всей числовой прямой. Решите неравенство $f(\lvert x^2-4\rvert -4) < f(\lvert 3x+5\rvert)$.

$f(\lvert x-1\rvert-1)< f(\lvert 5x+2\rvert)\Leftrightarrow$ $\lvert x-1\rvert-1>\lvert 5x+2\rvert$ Отв. $\left[-0,4;-\frac{1}{3}\right)$			
23. Найдите все значения, которые может принимать многочлен $p(x,y)=9x^2-12xy+4y^2-12x+8y-4$ при произвольных значениях x,y. Подсказка: $p(x,y)=(3x-2y)^2-4(3x-2y)-4;$ $E\left((t-2)^2-8\right)=[-8;+\infty)$	Найдите все значения, которые может принимать многочлен $p(x,y)=4x^2+12xy+9y^2-12x-18y-3$ при произвольныхзначениях x,y. Подсказка: $p(x,y)=(2x+3y)^2-6(2x+3y)-3;$ $E\left((t-3)^2-12\right)=[-12;+\infty)$	Найдите все значения, которые может принимать многочлен $p(x,y)=x^2-2xy+9y^2+10x+y-2$ при произвольныхзначениях x,y. Подсказка: $p(x,y)=$ $(x+5-y)^2+\left(\sqrt{8}y+\frac{11}{2\sqrt{8}}\right)^2-\frac{985}{32};$ $E(p(x,y))=\left[-\frac{985}{32};+\infty\right)$	Найдите все значения, которые может принимать многочлен $p(x,y)=x^2-4xy+6y^2-12x+2y-3$ при произвольных значениях x,y.
24. Найдите все значения, которые может принимать многочлен $p(x,y)=2x^2-4xy+18y^2+20x+2y-4$ при произвольных значениях x,y.	Найдите все значения, которые может принимать многочлен $p(x,y)=2x^2-8xy+12y^2-24x+4y-6$ при произвольных значениях x,y.	Найдите все значения, которые может принимать многочлен $p(x,y)=x^2+y^2$ при условии $x-y=1$. Отв. $E(p)=[0,5;+\infty)$.	Найдите все значения, которые может принимать многочлен $p(x,y)=x^2+y^2$ при условии $x+y=2$. Отв. $E(p)=[2;+\infty)$.
25.График функции $f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$ пересекает ось абсцисс в точках (0,4;0) и (-1;0), а ось ординат в точке (0;-2). Найдите квадрат разности коэффициентов a и b. Чему равно расстояние от вершины параболы до начала координат? Отв. 4; $\sqrt{6,0925}$.	График функции $f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$ пересекает ось абсцисс в точках (-3;0)и (1;0), а ось ординат в точке (0;-9). Найдите квадрат суммы коэффициентов a и b. Чему равно расстояние от вершины параболы до начала координат? Отв. 81.	График функции $f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$ пересекает ось абсцисс в точках (0,4;0) и (-1;0), а ось ординат в точке (0;-2). Найдите расстояние между корнями функции и уравнение оси симметрии параболы. Чему равно расстояние от вершины параболы до начала координат?	График функции $f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$ пересекает ось абсцисс в точках (-3;0)и (1;0), а ось ординат в точке (0;-9). Найдите расстояние между корнями функции и уравнение оси симметрии параболы. Чему равно расстояние от вершины параболы до начала координат?
26. Найдите уравнения прямых (или прямой, если	Найдите уравнения прямых (или прямой, если она	Найдите уравнения прямых (или прямой,	Найдите уравнения прямых (или прямой, если она

она единственна), проходящих через точку $M_0\left(-2;\frac{1}{2}\right)$ и имеющих единственную общую точку с графиком функции $y=1-x^2$. Дайте геометрическую интерпретацию. Чему равен тангенс угла между касательными? *Подсказка:* $y-\frac{1}{2}=k(x+2);\quad k=4\pm\sqrt{14}$	единственна), проходящих через точку $M_0(2;1)$ и имеющих единственную общую точку с графиком функции $y=1-x^2$. Дайте геометрическую интерпретацию. Чему равен тангенс угла между касательными?	если она единственна), проходящих через точку $M_0(2;1)$ и имеющих единственную общую точку с графиком уравнения $y^2=1-x^2$. Дайте геометрическую интерпретацию. Чему равен тангенс угла между касательными?	единственна), проходящих через точку $M_0(-3;-4)$ и имеющих единственную общую точку с графиком уравнения $y^2+x^2+2x+4y=0$. Дайте геометрическую интерпретацию. Чему равен тангенс угла между касательными?
27. В плоскости XOY изобразите множество точек (x; y), координаты которых удовлетворяют уравнению $\lvert y-1\rvert=x^2+2x+3$. Аналогичный вопрос для уравнения $\lvert y-1\rvert=x^2+2x-3$.	В плоскости XOY изобразите множество точек (x; y), координаты которых удовлетворяют уравнению $\lvert y+1\rvert=x^2-5x+6$.	Найдите функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию при всех допустимых значениях аргумента x (решите функциональное уравнение): $f\left(\frac{x+1}{x}\right)-3\cdot f\left(\frac{x}{x+1}\right)=\lvert x+2\rvert$. *Подсказка: подстановки* $\frac{x+1}{x}=t; t=\frac{1}{z};$ $f(x)=-\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\cdot\left\lvert\frac{2x-1}{x-1}\right\rvert; x\neq1$	Найдите функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию при всех допустимых значениях аргумента x (решите функциональное уравнение): $f\left(\frac{x+3}{2x}\right)-3\cdot f\left(\frac{2x}{x+3}\right)=\lvert x-2\rvert$. Постройте график найденной функции.
28. Постройте графики функций $y=\left\lvert\left\lvert x^2-1\right\rvert-2\right\rvert-3$; $y=\lvert x^2-16\rvert+\lvert x^2-25\rvert$; При каждом значении параметра а определите количество точек пересечения каждого графика построенной	Постройте графики функций; $y=\left\lvert\left\lvert\left\lvert x^2-1\right\rvert-2\right\rvert-3\right\rvert$; $y=\lvert x^2-4\rvert+\lvert x^2-9\rvert$; При каждом значении параметра а определите количество точек	Постройте графики следующих функций. $y=\frac{tgx}{\lvert tgx\rvert}\cdot x$; $y=\frac{\sin x}{\lvert\sin x\rvert}\cdot x^2$;	Постройте графики следующих функций. $y=\frac{tgx}{\lvert tgx\rvert}\cdot x$; $y=\frac{\sin x}{\lvert\sin x\rvert}\cdot x^2$; $y=\frac{x-2}{\lvert x-2\rvert}\cdot\frac{x+2}{\lvert x+2\rvert}\cdot x^3$ При каждом значении

функции и прямой $y=a$.	пересечения каждого графика построенной функции и прямой $y=ax$.	$y=\frac{x-2}{\lvert x-2\rvert}\cdot\frac{x+2}{\lvert x+2\rvert}\cdot x^3$ При каждом значении параметра а определите количество точек пересечения каждого графика построенной функции и прямой $y=a$.	параметра а определите количество точек пересечения каждого графика построенной функции и прямой $y=ax$.
29. Постройте график функции $y=f(x)$, если $f(x)=\lvert x+6\rvert+\lvert x+7\rvert$. При каких значениях параметра а график построенной функции **не** пересекается с графиком функции $y=a(x-1)$? Отв. $a\in(-0{,}125;+\infty)$	Постройте график функции $y=f(x)$, если $f(x)=\lvert x^2-4x+1\rvert$; $f(x)=\lvert x-x^2\rvert+1$ При каких а график построенных функций **не** пересекается с графиком функции $y=a(x+1)$?	Постройте график функции $y=f(x)$, если $f(x)=-\lvert 4x^2-x-5\rvert$; $f(x)=2-\lvert 4-x^2\rvert$ При каких а график построенных функций **не** пересекается с графиком функции $y=a(x+3)$?	Постройте график функции $y=f(x)$, если $f(x)=6-\lvert x\rvert-x^2$. При каких а график построенной функции **не** пересекается с графиком функции $y=\lvert x-a\rvert$? Отв. $a>6; a<-6$. *Подсказка: постройте графики функций и воспользуйтесь условием касания кривых.*
30. Постройте график функции $y=f(x)$, если $f(x)=-\lvert x+6\rvert+\lvert x+7\rvert$ При каких а график построенной функции **не** пересекается с графиком функции $y=a(x-1)^2$? отв a<0.	Постройте график функции $y=f(x)$, если $f(x)=\lvert x+6\rvert+\lvert x+7\rvert$. При каких значениях параметра а график построенной функции **не** имеет общих точек с графиком $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$?	Постройте график функции $y=f(x)$, если $f(x)=-\lvert x+6\rvert+\lvert x+7\rvert$ При каких а график построенной функции **не** имеет общих точек с графиком $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$?	Постройте график функции $y=f(x)$, если $f(x)=-\lvert x+6\rvert+\lvert x+7\rvert$ При каких а график построенной функции **не** имеет общих точек с графиком $(x+a)^2+(y-a)^2=a^2$?
31. Освободитесь от знака модуля в выражении $x\lvert x-11\rvert+\lvert x-12\rvert$ и постройте график функции $y=x\lvert x-11\rvert+\lvert x-12\rvert$. При каких а график построенной функции **не**	Освободитесь от знака модуля в выражении $\lvert x^2-5x+6\rvert+\lvert x^2-9x+20\rvert$ и постройте график функции	Докажите формулу	Докажите формулу $\min(a,b)=\frac{a+b-\lvert a-b\rvert}{2}$

пересекается с графиком уравнения $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert=a$? Отв. $a\in[0;1)$	$y=\lvert x^2-5x+6\rvert+\lvert x^2-9x+20\rvert$. При каких а график построенной функций **не** пересекается с графиком функции $y+10=\lvert x-a\rvert$?		
32.Найдите все значения х, при которых расстояния между соответствующими точками графиков функций $y=x$ и $y=\lvert x^2-9\rvert$ равно 3. Отв.-3;2;3;4.	Найдите все значения х, при которых расстояния между соответствующими точками графиков функций $y=\lvert x^2-2x\rvert$ и $y=\lvert x^2+2x\rvert$ равно 8. Отв.-2;2.	Найдите все значения х, при которых расстояния между соответствующими точками графиков функций $y=\lvert x\rvert$ и $y=\lvert x^2-2x\rvert$ равно 4. Отв.-2;2.	Найдите все значения х, при которых расстояния между соответствующими точками графиков функций $y=x$ и $y=\lvert x^2-3x+2\rvert$ равно 8. Отв.0;2;4. *Подсказка:* ММЗ: $\lvert\lvert x^2-3x+2\rvert-x\rvert=2$.
33. Решите уравнение: $\left\lvert 8x+\frac{14}{x}-\frac{7}{x^3}\right\rvert=\left\lvert 8x-\frac{18}{x}-\frac{5}{x^3}\right\rvert$ Отв.-1;1;-0,25;0,25.	Решите уравнение: $\left\lvert\frac{x^3}{3}-2x-\sqrt{3}\right\rvert=\frac{x^3}{3}+\sqrt{3}$. Отв.0; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$	Решите уравнение: $\frac{(x)^2-5\lvert x\rvert+6}{\lvert x\rvert-2}=2x$. Отв.-1.	Решите уравнение: $\frac{(2\lvert x\rvert-3)^2-\lvert x\rvert-6}{4x+1}=0$. Отв.-3;3;0,25.
34. Докажите свойства модуля: $\lvert a\rvert\ge a$; $\lvert a\rvert\ge -a$; $\lvert x\rvert=\lvert -x\rvert$; $\lvert x\rvert^2=x^2$	Докажите свойства модуля: $\lvert a\rvert\ge a$; $\lvert a\rvert\ge -a$; $\lvert x\rvert=\lvert -x\rvert$; $\lvert x\rvert^2=x^2$	Докажите свойства модуля: $\lvert a+b\rvert\le\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$, $\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\le\lvert a-b\rvert$,	Докажите свойства модуля $\lvert a\rvert=-a\Leftrightarrow a\le 0$. $\lvert a\rvert=a\Leftrightarrow a\ge 0$
35. Найдите все общие точки графика функции $y=f(x)$ и оси абсцисс, где $f(x)=\lvert x^2-5x+4\rvert-9x^2-5x+4+10x\lvert x\rvert$ Отв. $x\in\{-1\}\cup[1;4]$ Подсказка: решите уравнение на 4-х промежутках.	Найдите все общие точки графика функции $y=f(x)$ и оси абсцисс, где $f(x)=\lvert x^2+5x+4\rvert-9x^2+5x+4-10x\lvert x\rvert$;	Найдите все общие точки графика функции $y=f(x)$ и оси абсцисс, где $f(x)=\lvert x^2-7x+6\rvert+x^2+5x+6-12\lvert x\rvert$	Найдите все общие точки графика функции $y=f(x)$ и оси абсцисс, где $f(x)=\lvert x^2+7x+6\rvert+x^2-5x+6-12\lvert x\rvert$
36.При каких значениях а функция	При каких значениях а функция $y=-3x^2-ax+7$	При каких значениях а функция	При каких значениях а функция $y=2x^2-ax+5$

$y=-3x^2-ax+7$ убывает на промежутке $(-\infty;7]$. Отв.нет.	возрастает на промежутке $(-\infty;7]$. Отв. $a\geq -42$.	$y=2x^2-ax+5$ убывает на промежутке $(3;+\infty)$. Отв. нет.	возрастает на промежутке $(3;+\infty)$. Отв.a>12.
37. При каких значениях k графики функций $y=2x^2;\quad y=4x+k$ 1)не имеют общих точек; 2)имеют одну общую точку; 3)имеют две общие точки; 4)имеют более двух общих точек? 5)как найти минимальное расстояние от параболы $y=2x^2$ до прямой $y=4x-5$? В какой точке параболы оно достигается? Отв.1)k<-2; 2)k=-2; 3)k>-2;4) $\varnothing$;5)как расстояние между прямой $y=4x-5$ и параллельной ей касательной к параболе, равно $\frac{3}{\sqrt{17}}$.	При каких значениях k графики функций $y=x^2;\quad y=2x+k$ 1)не имеют общих точек; 2)имеют одну общую точку; 3)имеют две общие точки; 4)имеют более двух общих точек? 5)как найти минимальное расстояние от параболы $y=x^2$ до прямой $y=2x-3$? В какой точке параболы оно достигается? Отв.1)k<-1; 2)k=-1; 3)k>-1; 4)нет.	При каких значениях k графики функций $y=-x^2;\quad y=4x+k$ 1)не имеют общих точек; 2)имеют одну общую точку; 3)имеют две общие точки; 4)имеют более двух общих точек? 5)как найти минимальное расстояние от параболы $y=-x^2$ до прямой $y=4x+3$? В какой точке параболы оно достигается? Отв.1)k>4; 2)k=4; 3)k<4;4)нет.	При каких значениях параметра а графики функций $y=1-x^2$ и $y=\lvert x-a\rvert$ касаются? При каких значениях параметра а график параболы $y=1-x^2$ расположен выше графика функций $y=\lvert x-a\rvert$?
38. При каком значении параметра а парабола $f(x)=2x^2+3x+a$ касается оси абсцисс? Найдите координаты точки касания. Отв. $\frac{9}{8}$	При каком значении параметра а парабола $f(x)=2x^2-4x+a$ касается оси абсцисс? Найдите координаты точки касания. Отв.2	При каком значении параметра а парабола $f(x)=-5x^2+4x+a$ касается оси абсцисс? Найдите координаты точки касания. Отв.-0,8; (0,4;0)	При каком значении параметра а парабола $f(x)=4x^2+ax+9$ касается оси абсцисс? Найдите координаты точки касания. Отв. $a=\pm 12$
39.Найдите все значения параметра а, при которых отрезок прямой x=a, концы которого лежат на линиях $y=2x^2;\quad y=-(x+1)^2$, имеет наименьшую длину. Отв. $-\frac{1}{3}$.	Найдите все значения параметра а, при которых отрезок прямой x=a, концы которого лежат на линиях $y=x^2;\quad y=-(x-2)^2$, имеет наименьшую длину. Отв.1	Найдите все значения параметра а, при которых отрезок прямой x=a, концы которого лежат на линиях $y=-x^2;\quad y=(x-1)^2$, имеет наименьшую длину. Отв.0,5.	Парабола $g(x)=ax^2+bx+c$ проходит через точки $A(1;1); B(3;-1); C(0;-4)$. Найдите наибольшее расстояние от хорды параболы АВ до стягиваемой хордой дуги параболы. *Подсказка:*

			$g(x)=-2x^2+7x-4;$ *Найдите* $AB: y=-x+2;$ *расстояние между хордой АВ и параллельной ей касательной к параболе.* *Отв.* $\sqrt{2}$
40. При каком значении параметра а парабола $f(x)=2x^2+3x+a$ касается прямой $y=2x+1$? Найдите координаты точки касания и уравнение касательной . Отв. а=1,125; (-0,25;2). *Подсказка: можно использовать равенство нулю дискриминанта или условие касания .*	При каком значении параметра а парабола $f(x)=2x^2-4x+a$ касается прямой $y=3x+2$? Найдите координаты точки касания. Отв.	При каком значении параметра а парабола $f(x)=-5x^2+4x+a$ касается прямой $y=4x+3$ и оси абсцисс? Найдите координаты точки касания. Отв.	При каком значении параметра а парабола $f(x)=4x^2+ax+9$ касается прямой $y=-2x+3$ и оси абсцисс? Найдите координаты точки касания. Отв.
41. Найдите площадь фигуры, ограниченной линией $y=x^2-4x+5$ и касательными к ней: в точке (1;2) y=-2x+4 и в точке (4;5) y=4x-11. Изобразите фигуру. Отв. 2,25.	Найдите площадь фигуры, ограниченной линией $y=x^2-2x+2$ и касательными к ней: в точке (0;2) y=-2x+2 и в точке (3;5) y=4x-7. Изобразите фигуру. Отв. 2,25.	Найдите площадь фигуры, ограниченной линией $y=0{,}5x^2-2x+2$ и касательными к ней: в точке (1;0,5) y=-x+1,5 и в точке (4;2) y=2x-6. Изобразите фигуру. Отв. 1,125.	Найдите площадь фигуры, ограниченной линией $y=0{,}5x^2-3x+4{,}5$ и касательными к ней: в точке (1;2) y=-2x+4 и в точке (4;0,5) y=x-3,5. Изобразите фигуру. Отв. 1,125.
42. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=4x+\frac{9\pi^2}{x}+\sin x$ на промежутке 0 < x < +8. Отв. $12\pi-1$. *Подсказка: используйте неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.*	Найдите наибольшее значение функции $f(x)=\frac{10}{x^2+4\pi x+41}+\cos x$ на промежутке -8 < x < +8. отв. $\frac{10}{41-4\pi^2}+1$.	Найдите наименьшее значение функции $f(x)=2x+\frac{18\pi^2}{x}+\cos x$ на промежутке 0 < x < +8. Отв. $12\pi-1$	Найдите наибольшее значение функции $f(x)=\frac{4}{x^2+3\pi x+23}+\sin x$ на промежутке -8 < x < +8. отв. $\frac{16}{92-9\pi^2}+1$.
43. На координатной плоскости XOY укажите все точки, через которые не проходит ни одна из парабол вида $y=x^2-4ax+2a^2-3$.Подсказка: $x_B=2a; y_B=-2a^2-3;$ исключая параметр из уравнений, получаем траекторию движения	Известно, что $5p-q=25$. Докажите, что все параболы вида $y=x^2+px+q$ проходят через одну точку. Отв. (-5;0).	На координатной плоскости XOY укажите все точки, через которые не проходит ни одна из парабол вида $y=x^2-4ax+7a^2-3$	Известно, что значения квадратного трёхчлена $f(x)=ax^2+2bx+c$ отрицательны при всех значениях x. Докажите, что значения трёхчлена $\varphi(x)=a^2x^2+2b^2x+c^2$ при всех значениях x положительны. *Краткий конспект решения:* из условия

вершин парабол: $y=-\frac{x^2}{2}-3$.Очевидно, что граница области, куда параболы не могут попадать, лежит ниже этой траектории. Чтобы её найти(это будет огибающая семейства парабол). Рассмотрим квадратное уравнение $2a^2-4ax-3+x^2-y=0$ относительно **а** с параметрами х,у, которое по условию не должно иметь решений. Значит, $D_1(x,y)=4x^2-2(x^2-y-3)<0$ или $y<-x^2-3$.		Отв. $y<\frac{3}{7}x^2-3$	$\Rightarrow D<0; a<0; c<0.$ Для $\varphi(x)$ ***имеем:*** $a^2>0; D_{1\varphi}=b^4-a^2c^2=$ $=(b^2-ac)(b^2+ac)<0.$
44. Найдите все значения параметра а при каждом из которых наименьшее значение квадратного трёхчлена $4x^2-4ax+(a^2-2a+2)$ на отрезке [0; 2] равно 3. отв. $a\in\{1-\sqrt{2};5+\sqrt{10}\}$.	Найдите все значения параметра а при каждом из которых наибольшее значение квадратного трёхчлена $-x^2+2ax-(a^2-2a+3)$ на отрезке [0; 1] равно (-2). отв. $a\in\{0{,}5;\quad 2+\sqrt{2}\}$.	Найдите все значения параметра а при каждом из которых наименьшее значение квадратного трёхчлена $4x^2-4ax+(a^2-2a-1)$ на отрезке [-2; 0] равно 2. отв. $a\in\{-1{,}5;\quad 3\}$.	Найдите все значения параметра а при каждом из которых наибольшее значение квадратного трёхчлена $-x^2+2ax-(a^2-2a-3)$ на отрезке [-1; 0] равно 2. отв. $a\in\{-0{,}5;\quad 1+\sqrt{2}\}$.
45. Найдите все значения параметра *а* из промежутка [1; + ∞), при каждом из которых бо́льший из корней уравнения $x^2-6x+2ax+a-13=0$ принимает наибольшее значение. Отв. а=1. *Подсказка: покажите , что производная функции* $x_2(a)=3-a+\sqrt{a^2-7a+22}$ *отрицательна, следовательно,* $x_{2\max}(1)=3-1+\sqrt{16}=6.$	Найдите все значения параметра а из промежутка (-∞ ; 4], при каждом из которых меньший из корней уравнения $x^2+ax-3x-2a-2=0$ принимает наименьшее значение.	Найдите все положительные значения параметра а, при каждом из которых $\int_0^a(2-4x+3x^2)dx\le a$ отв.1.	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых $\int_0^1(a+(4-a)x+4a^2x^3)dx\le 8{,}5a-14$ отв.4.
46. При каких значениях параметра а наименьшее значение функции $y=x^2-4x+3+\|x-a\|$ меньше чем 2? Отв. $a\in(a_{1кас};a_{2кас})\leftrightarrow a\in\left(-\frac{5}{4};\frac{21}{4}\right)$	Найдите наименьшее значение функции $y=(x^2+x)^2+2(x^2+x)+2$ на $D(y)$. *Подсказка:*	Найдите наименьшее значение функции $y=(x+2)(x-7)(x-4)(x-1)$ на $D(y)$. *Подсказка:* $t=x^2-5x$	Найдите наименьшее значение функции $y=(x+3)(x)(x-3)(x-6)$ на $D(y)$.

	$E(x^2+x)=[-0,25;+\infty)\Rightarrow$ $E((t+1)^2+1)=\left[\frac{25}{16};+\infty\right)$		
47. Функция $f(x)=x^2+px+q$ принимает только неотрицательные значения.Найдите наименьшее значение выражения $(p+q)$. ***Подсказка: исп. метод линейного программирования в плоскости POQ.*** ***Отв.-1.***	Функция $f(x)=x^2+px+q$ принимает только неположительные значения. Найдите наибольшее значение выражения $(p+q)$. Отв.1.	Функция $f(x)=x^2+px+q$, где $p,q\in Z$ принимает только положительные значения при целых x. Обращается ли $f(x)=x^2+px+q$ в ноль? *Краткий конспект решения:* корни многочлена, если они есть, могут быть только между двумя соседними целыми числами. Не ограничивая общности, будем считать что эти корни $\alpha,\beta\in(0;1)$, но тогда коэффициенты многочлена $p=\alpha+\beta;q=\alpha\cdot\beta$ не могут одновременно быть целыми. Противоречие. Отв.нет.	
48. Рассматриваются все параболы вида $y=x^2+px+q;q>0$, которые пересекают оси координат в трёх точках. Для каждой параболы через три указанные точки проводят окружность. Докажите, что все эти окружности имеют общую точку. *Подсказка:* обозначим точки пересечения $A(x_1;0);B(x_2;0);C(0;q)$ с осями, D(0;y) –четвёртая точка пересечения с OY, тогда по теореме о касательной и секущей к окружности, имеем: $OA\cdot OB=OD\cdot OC$ или $1=OD$ ***,т.е.*** $D(0;1)$ ***искомая точка, она не зависит от p,q.***	Рассматриваются все параболы вида $y=x^2+px+q;q<0$, которые пересекают оси координат в трёх точках. Для каждой параболы через три указанные точки проводят окружность. Докажите, что все эти окружности имеют общую точку.	Функция $f(x)=x^2+bx+c$ имеет два нуля, один из которых принадлежит интервалу $(0;1)$, а другой нет.Докажите, что $f(c)\le 0$. *Подсказка:* по условию $f(c)=f(0)f(1)\le 0$. Далее рассмоотрите два случая, когда левый или правый корни принадлежат интервалу $(0;1)$.	Докажите, что при всех $a,b,c\in[0;1]$ выполняется неравенство: $a^2+b^2+c^2\le a^2b+b^2c+c^2a$. *Подсказка:* докажите, что квадратный трёхчлен $f(x)=x^2(1-b)-c^2x+$ $+b^2+c^2-b^2c-1\le 0$ $f_{наиб}(0)=\ldots\le 0$ или $f_{наиб}(1)=\ldots\le 0$ ***,покажите, что оба значения неположительны.***
49. При каких значениях коэффициента b квадратный трёхчлен x^2-2x+b можно **разложить** в произведение	При каких значениях коэффициента b квадратный трёхчлен x^2-bx+4 можно разложить в произведение	При каких значениях коэффициента b квадратный трёхчлен x^2-6x+b можно	Квадратный трёхчлен $2x^2-5xy-3y^2+7y-2=0$ **разложите** в произведение линейных множителей.

линейных множителей? Запишите это разложение. Отв. $b \le 1$	линейных множителей? Запишите это **разложение**. Отв. $\lvert b\rvert \ge 4$.	**разложить** в произведение линейных множителей? Запишите это разложение. Отв. $b \le 9$	*Подсказка*: найдите корни квадратного трёхчлена $3y^2 - y(-5x+7) - 2x^2 + 2 = 0$ $y_1 = \frac{-x-1}{3}$; $y_2 = 2x-2$.
50. При каких значениях коэффициента b в **разложении** квадратных трёхчленов $4x^2 - 3x - 1$ и $x^2 + 2x - b$ может быть один и тот же линейный множитель? Отв. $\left\{3; -\frac{7}{16}\right\}$	При каких значениях коэффициента b в **разложении** квадратных трёхчленов $2x^2 - x - 1$ и $x^2 + 4x - b$ может быть один и тот же линейный множитель? Отв. $b \in \left\{5; -\frac{7}{4}\right\}$	При каких значениях коэффициента b в **разложении** квадратных трёхчленов $3x^2 - 2x - 1$ и $x^2 - 4x - b$ может быть один и тот же линейный множитель? Отв. $b \in \left\{-3; \frac{13}{9}\right\}$	**Решите уравнение**: $x^3 - (a+1)x^2 - 2a^2x - 2a(a-1) = 0$ *Подсказка*: покажите, что квадратный многочлен $a^2(-2x-2) + a(2-x^2) + x^3 - x^2 = 0$ имеет корни $a_1 = \frac{x^2}{2(x+1)}$; $a_2 = 1 - x$ при $x \ne -1$ и **разложите** многочлен на множители. Случай x=-1 рассматривается отдельно.
51. Постройте график функции $f(x) = \lvert x^2 - 4x\rvert$. При каких значениях параметра a прямая y=a имеет с графиком функции 1)**четыре** общие точки; 2)три общие точки; 3)две общие точки? Отв1. 0<a<4. Отв2. a=4 Отв3. $a \in \{0\} \cup (4; +\infty)$	Постройте график функции $f(x) = \lvert x^2 - 9x\rvert$. При каких значениях параметра a прямая y=a имеет с графиком функции 1)**четыре** общие точки; 2)три общие точки; 3)две общие точки? Отв1. 0<a<20,25 Отв2. 20,25 Отв3. $a \in \{0\} \cup (20{,}25; +\infty)$	Постройте график функции $f(x) = x^2 - 8\lvert x\rvert$. Сколько общих точек с графиком функции может иметь прямая y=a при различных значениях параметра a? Отв1. a=-16 2т; Отв2. -16<a<0 4т; Отв3.a=0 3т; a>0 2 т.	Постройте график функции $f(x) = x^2 - 16\lvert x\rvert$. Сколько общих точек с графиком функции может иметь прямая y=a при различных значениях параметра a? Отв1. Отв2. Отв3.
52. Графиком квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c, a \ne 0$ является парабола с **вершиной** в точке (3;-7). Определите знаки коэффициентов a,b,c, если функция имеет нули разных знаков. Отв.a>0,b<0,c<0.	Графиком квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c, a \ne 0$ является парабола с **вершиной** в точке (2;8). Определите знаки коэффициентов a,b,c, если a-b+c>0. Отв.a>0,b<0,c>0; или a<0,b>0,c>0.	Графиком квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c, a \ne 0$ является парабола с **вершиной** в точке (-5;9). Определите знаки коэффициентов a,b,c, если a+b+c>0. Отв.a>0,b>0,c>0; или a<0,b<0,c>0.	Параметр $a \in R$, докажите, что **вершины** парабол $p_2(x) = -x^2 + 2ax - a^2 + a + 1$ образуют прямую. Отв. $y = x + 1$. *Подсказка:* запишите уравнение парабол в каноническом виде; координаты $(x_{верш}; y_{верш})$ выражены через параметр a; исключите параметр a.
53. Прямая x=1 является	Прямая x=2 является осью	Прямая x=-1 является	Параметр $a \in R$, докажите,

осью симметрии параболы $f(x)=ax^2+(a^2-8)x+2$, ветви которой направлены вверх. Найдите координаты **вершины параболы**. Отв.а=2; (1;0).	симметрии параболы $f(x)=ax^2+(a^2+4)x+2$, ветви которой направлены вниз. Найдите координаты **вершины параболы**. Отв.а=-2; (2;10).	осью симметрии параболы $f(x)=ax^2+(a^2-8)x$ - , ветви которой направлены вниз. Найдите координаты **вершины параболы**. Отв.а=-2; (-1;4). $f(x)=-2x^2-4x+2$	что вершины парабол $p_2(x)=-x^2+4ax-4a^2+a+1$ образуют прямую. Отв. $y=\frac{x}{2}+1$. *Подсказка:* запишите уравнение парабол в каноническом виде; координаты $(x_{верш};y_{верш})$ выражены через параметр а; исключите параметр а.
54. Найдите и изобразите множество точек V, являющихся вершинами графиков квадратичных функций $y=f(x,a)$, где а-параметр. На том же рисунке изобразите графики функции $y=f(x,a)$при всех $a\in A$, если $f(x,a)=2x^2-4ax+2{,}125a^2-0{,}75a-0{,}875$, $A=\{-3;-1;3;7;9\}$. Отв. $y=\frac{1}{8}(x-7)(x+1)$.	Найдите и изобразите множество точек V, являющихся вершинами графиков квадратичных функций $y=f(x,a)$, где а- параметр. На том же рисунке изобразите графики функции $y=f(x,a)$при всех $a\in A$, если $f(x,a)=ax^2-2ax+a^3+2a-1$, $A=\{-2;-1;0;1;2\}$.	Найдите и изобразите множество точек V, являющихся вершинами графиков квадратичных функций $y=f(x,a)$, где а- параметр. На том же рисунке изобразите графики функции $y=f(x,a)$ при всех $a\in A$, если $f(x,a)=ax^2+x^2-2a^2x-4ax-2x+a^3+3a^2+5a+2$, $A=\{-3;-2;-1;0;1\}$.	Найдите и изобразите множество точек V, являющихся вершинами графиков квадратичных функций $y=f(x,a)$, где а-параметр. На том же рисунке изобразите графики функции $y=f(x,a)$при всех $a\in A$, если $f(x,a)=3x^2-6ax-6x+3a^2+7a+4$, $A=\{-3;-2;-1;0;1\}$.
55. Найдите все значения параметра а, при которых график функции $f(x)=ax^2-8x+a$ расположен ниже оси абсцисс. Отв.а<-4.	Найдите все значения параметра а, при которых график функции $f(x)=ax^2-6x+a$ расположен выше оси абсцисс. Отв.а>3.	Найдите все значения параметра а, при которых график функции $f(x)=ax^2-8x+a$ расположен выше оси абсцисс. Отв.	Найдите все значения параметра а, при которых график функции $f(x)=ax^2-6x+a$ расположен ниже оси абсцисс. Отв.
56. Найдите уравнение кривой , проходящей через точку А(1;-5), если угловой коэффициент её касательной в точке с абсциссой x вычисляется по формуле $k(x)=1-x$.Запишите уравнение касательной, проходящей через точку А(1;-5). Отв. $f(x)=x-\frac{x^2}{2}-5{,}5$.	Найдите уравнение кривой , проходящей через точку А(2;1), если угловой коэффициент её касательной в точке с абсциссой x вычисляется по формуле $k(x)=x$.Запишите уравнение касательной, проходящей через точку А(2;1). Отв. $f(x)=\frac{x^2}{2}-1$.	Найдите уравнение кривой , проходящей через точку А(1;-1), если угловой коэффициент её касательной в точке с абсциссой x вычисляется по формуле $k(x)=2-\frac{1}{3}x$ Запишите уравнение касательной, проходящей через точку А(1;-1).	

		Отв. $f(x)=2x-\frac{x^2}{6}+\frac{7}{6}$.	
57.Составьте уравнение **общей касательной** к графикам функций $y=x^2+3x+5;$ $y=-x^2-x+1.$. Сделайте чертёж. Отв. $y=-x+1;$ $y=3x+5.$	Составьте уравнение **общей касательной** к графикам функций $y=x^2-x-1;$ $y=(x-2)(3-x).$. Сделайте чертёж. Отв. $y=x-2;$ $y=3x-5.$	Составьте уравнение **общей касательной** к графикам функций $y=x^2+5x+1;$ $y=-x^2-x-4.$. Сделайте чертёж. Отв. $y=x-3;$ $y=3x.$	Составьте уравнение **общей касательной** к графикам функций $y=-x^2+3x-1;$ $y=x(x+1).$. Сделайте чертёж. Отв. $y=x;$ $y=3x-1.$
58. Составьте уравнение **общей касательной** к графикам функций $y=2x^2+x-1;$ $y=x^2+3x+6.$. Сделайте чертёж. Отв. $y=13x-19;$ $y=-3x-3.$	Составьте уравнение **общей касательной** к графикам функций $y=2x^2-x-2;$ $y=x^2+x-1.$. Сделайте чертёж. Отв. $y=7x-10;$ $y=-x-2.$		
59.На прямой $x=-\frac{15}{4}y$ найдите точку, через которую проходят две **перпендикулярные друг другу касательные** к параболе $y=2x^2$. Отв. $\left(\frac{15}{32};-\frac{1}{8}\right)$	На прямой $y=-\frac{2}{3}x$ найдите точку, через которую проходят две **перпендикулярные друг другу касательные** к параболе $y=x^2$. Отв. $\left(\frac{3}{8};-\frac{1}{4}\right)$	На прямой $y=\frac{2}{3}x$ найдите точку, через которую проходят две **перпендикулярные друг другу касательные** к параболе $y=-x^2$. Отв. $\left(\frac{3}{8};\frac{1}{4}\right)$	На прямой $x=\frac{15}{4}y$ найдите точку, через которую проходят две **перпендикулярные друг другу касательные** к параболе $y=2x^2$. Отв. $\left(-\frac{15}{32};-\frac{1}{8}\right)$
60. Касательная к графику функции $f(x)=ax^2+4x$ в точке с абсциссой -1 параллельна прямой y=10x+5 при **a** равном… Отв.-3.	Касательная к графику функции $f(x)=ax^2-4x$ в точке с абсциссой 1 параллельна прямой y=4x-1 при **a** равном… Отв.4.	Касательная к графику функции $f(x)=ax^2+6x$ в точке с абсциссой -2 параллельна прямой y=12x+3 при **a** равном…Отв.	Касательная к графику функции $f(x)=ax^2-8x$ в точке с абсциссой 2 параллельна прямой y=17x+1 при **a** равном… Отв..
61. Найдите те значения	Найдите те значения	Найдите те значения	Найдите те значения

параметра а, при которых расстояние от параболы $y=x^2-4$ до прямой $y=-x+a$ равно 1. *Подсказка:расстояние между данной прямой и касательной к параболе вычисляется по формуле* $\rho(l_1;l_2)=\frac{\lvert b_1-b_2\rvert}{\sqrt{1+k^2}}$. *Отв*. $-4-\sqrt{2}$.	параметра а, при которых расстояние от параболы $y=x^2-2x$ до прямой $y=2x+a$ равно 2.	параметра а, при которых расстояние от параболы $y=4x^2+2x-a$ до прямой $y+3x+a=0$ равно 3.	параметра а, при которых расстояние от параболы $y=3x^2-4x+a$ до прямой $-2y+3x+a=0$ равно 4
62. Точка А принадлежит параболе $\pi: y=x^2-4x+7$, а точка В принадлежит кривой $\omega: x^2+y^2-4x-15y+60=0$. Какое наименьшее значение может иметь длина отрезка АВ? Ответ: $\min\limits_x \rho(\omega;\pi)=\min\limits_x \rho(O;\pi)-R=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$.	Точка А принадлежит параболе $\pi: y=0{,}25x^2+2x$, а точка В принадлежит кривой $\omega: x^2+y^2+8x-4y+16=0$. Какое наименьшее значение может иметь длина отрезка АВ? Ответ: $2\sqrt{5}-2$.	Точка А принадлежит параболе $\pi: y=-0{,}5x^2+2x$, а точка В принадлежит кривой $\omega: x^2+y^2-2x+y+1=0$. Какое наименьшее значение может иметь длина отрезка АВ? Ответ: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.	Точка А принадлежит параболе $\pi: y=0{,}25x^2+x$, а точка В принадлежит кривой $\omega: x^2+y^2-8y+15=0$. Какое наименьшее значение может иметь длина отрезка АВ? Ответ: $\sqrt{5}-1$.
63.Под какими углами пересекаются параболы $y=3x^2-8x-2; y=x^2-4$? *Подсказка:угол между кривыми равен углу между их касательными в точке их пересечения. Отв.* $arctg\frac{4\sqrt{3}}{32\sqrt{3}+53}; arctg\frac{4\sqrt{3}}{53-32\sqrt{3}}$	Под какими углами пересекаются параболы $y=2x^2-6x-1; y=x^2-2x$?	Под какими углами пересекаются параболы $y=-2x^2+7x-4;$ $y=-4x^2-7x-4$?	Под какими углами пересекаются параболы $y=-2x^2+7x-2;$ $y=-x^2+x+3$?
64. (МФТИ).При каких значениях параметра а вершина параболы $y=x^2-\left(2\sqrt{5}\cos a-3\right)x-\frac{25}{4}\cos 4a$ лежит на прямой $y=3x$, причём парабола пересекает ось OY в точке с	(МФТИ).Найдите все значениях параметра а, при которых вершина параболы $y(x)=x^2-8ctga\cdot x+5\cos 2a$ касается прямой $y=-7$, причём абсцисса точки	(МФТИ).При каких значениях параметра а вершина параболы $y=x^2+\left(2\sin a-\sqrt{3}\right)x+\cos 4a$ лежит на прямой $y=-\sqrt{3}x$, причём парабола пересекает ось OY в точке с	(МФТИ).Найдите все значениях параметра а, при которых вершина параболы $y(x)=\frac{1}{3}x^2-6tga\cdot x-10\cos 2a$ касается прямой $y=-11$, причём абсцисса точки касания положительна.

отрицательной ординатой? Подсказка: $\cos 2a = -0{,}8$	касания отрицательна. Подсказка: $16ctg^2 a - 5\cos a - 7 = 0;$ $a = -arctg\,2 + \pi n$	положительной ординатой? Подсказка: $\sin^2 a - 4\cos 4a - 0{,}75 = 0;$ $a = \pm 0{,}5\arccos(-0{,}75) + \pi n$	Подсказка: $27tg^2 a + 10\cos 2a - 11 = 0;$ $a = arctg\frac{1}{3} + \pi n$

65.При каких значениях параметра а наименьшее значение на отрезке $[a;b]$ функции y=f(x) равно m?
a. f(x)= x^2-3x+a, $[0;2]$; m= $-\frac{1}{4}$;
b. f(x)= x^2+ax+1, $[0;1]$; m= 1,75;
c. f(x)= ax^2+2x+1, $[-1;0]$; m= 0,5;
Отв.а)2; б)$\varnothing$;
c) $f_{\min}(-0{,}5) = 0{,}5$
 	
Подсказка: если ветви параболы направлены вверх, то возможны три случая (сделайте рисунок):
1)$\begin{cases} x_B \le a; \\ f_{\min}(a) = .. \end{cases}$;2)$\begin{cases} x_B \in (a;b); \\ f_{\min}(x_b) = .. \end{cases}$
3)$\begin{cases} x_B \ge b; \\ f_{\min}(b) = .. \end{cases}$;
	При каких значениях параметра а наименьшее значение на отрезке $[a;b]$ функции y=f(x) равно m?
	a. f(x)= x^2-2x+a, $[0;2]$; m= $-\frac{1}{8}$;
	b. f(x)= x^2+ax+2, $[-1;0]$; m= $\frac{3}{2}$;
	c. f(x)= ax^2+3x+1, $[-1;0]$; m=$\frac{1}{3}$;
	отв. а) $a = \frac{7}{8}$; б) $\sqrt{2}$;
	в)$\left\{\frac{7}{3}; \frac{27}{8};\right\}$
	
	Подсказка: если ветви параболы направлены вниз, то возможны три случая (сделайте рисунок):
	1)$\begin{cases} x_B \le a; \\ f_{\min}(b) = .. \end{cases}$;2)$\begin{cases} x_B \in (a;b); \\ \left[\begin{array}{l} f_{\min}(a) = .. \\ f_{\min}(b) = .. \end{array}\right. \end{cases}$
	3)$\begin{cases} x_B \ge b; \\ f_{\min}(a) = .. \end{cases}$;
		При каких значениях параметра а наибольшее значение на отрезке [α;β] функции y=f(x) равно M ?
		a. f(x)= x^2-3x+a, [0;2] ; M= $-\frac{1}{4}$;
		b. f(x)= x^2+ax+1, [0;1] ; M= 1,75;
		c. f(x)= ax^2+2x+1, [-1;0] ; M= 0,5;
			При каких значениях параметра а наибольшее значение на отрезке [α;β] функции y=f(x) равно M ?
			a. f(x)= x^2-2x+a, [0;2] ; M= -1/8;
			b. f(x)= x^2+ax+2, [-1;0] ; M= 1,5;
			c. f(x)= ax^2+3x+1, [-1;0] ; M= 1/3;

66. (МГУ). Для некоторой квадратичной функции f(x) = ax^2 + bx + c выполнены неравенства. f(-3)<-5; f(-1)>0; f(1)<4. Определите знак старшего коэффициента *a*. ответ: $a < 0$.	(МГУ). Известно, что для некоторой квадратичной функции f(x) = ax^2 + bx + c выполнены неравенства: f(-1)<1; f(1)>-1; f(3)<-4. Определите знак старшего коэффициента *a*. *Подсказка*: из условия следует: $a - b + c < 1; a + b + c > -1;$ $9a + 3b + c < -4$, умножим второе неравенство на -2; складывая неравенства одного	(МГУ). Для некоторой квадратичной функции f(x) = ax^2 + bx + c выполнены неравенства. f(-1)<-4; f(1)<0; f(3)>5. Определите знак старшего коэффициента *a*.	(МГУ). Для некоторой квадратичной функции f(x) = ax^2 + bx + c выполнены неравенства. f(-3)>3; f(-1)<1; f(1)>0. Определите знак старшего коэффициента *a*. ответ: $a > 0$.

	смысла , получим ответ: $a<0$.	ответ: $a>0$.	
67. Пусть a,b,c – три различных числа. Рассмотрим уравнение: $\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=1$ Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=c$ являются корнями «квадратного» уравнения. Как вы объясните этот «парадокс»?	Упростите выражение $f(x)=\frac{(x+2a)(x+2b)}{(a+c)(b+c)}+\frac{(x-2c)(x+2b)}{(a-b)(a+c)}+\frac{(x-2c)(x+2a)}{(b-a)(b+c)}$ **1способ**:привести дроби к общему знаменателю $f(x)=\frac{0x^2+0x+4(a+c)(b+c)(a-b)}{(a+c)(b+c)(a-b)}=4$ 2 способ: вычислим $f(-2a)=4;\ f(-2b)=4;$ $f(2c)=4;$ $f(x)$-это многочлен степени не выше второй, если он в трёх разных точках принимает равные значения, то по теореме он является константой=4. Геометрический смысл ясен: парабола не может пройти через три точки, лежащие на одной горизонтальной прямой, а прямая может.	Упростите выражение $f(x)=\frac{(x-5a)(x+5b)}{(c-a)(b+c)}+\frac{(x-5c)(x+5b)}{(a+b)(a-c)}+\frac{(x-5c)(x-5a)}{(b+a)(b+c)}$ Отв.25.	Упростите выражение $\frac{1}{x^2+7\cdot xy+6y^2}-\frac{1}{6x^2+37\cdot xy+6y^2}+\frac{1}{y^2+7xy+6x^2}$ Отв.0.
68. Докажите, что уравнение $(x^2-2x+3)(x^2-6x+10)=2$ не имеет корней. *Подсказка: оцените множество значений каждого квадратного трёхчлена.*	Докажите, что уравнение $(x^2-2x+2)(x^2-4x+5)=1$ не имеет корней.	Докажите, что уравнение $(x^2-2x+7)(x^2+6x+11)=$ не имеет корней.	Докажите, что если a,b,c – длины сторон треугольника, то уравнение $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ не имеет действительных корней.
69. Докажите, что число 1 является единственным корнем уравнения $(2x^2-4x+3)\cdot(x^2-2x+2)=1$.	Докажите, что число 2 является единственным корнем уравнения $(x^2-4x+5)\cdot(2x^2-8x+9)=1$.		
70. При каких значениях параметра a уравнение $(x^2-2x+2+a)\cdot(x^2-6x+9+a)=2$ не имеет корней? Отв.a<-2;a>1. *Подсказка: оцените множество значений каждого квадратного трёхчлена.*	При каких значениях параметра a уравнение $(x^2-2x+1+a)\cdot(x^2-4x+4+a)=1$ не имеет корней? Отв.a<-1;a>1.	При каких значениях параметра a уравнение $(x^2-2x+a+6)\cdot(x^2+6x+a+10)=11$ не имеет корней?	Докажите, что если a,b,c – длины сторон треугольника, то уравнение $a^2x^2+(a^2+c^2-b^2)x+c^2=0$ не имеет действительных корней.
71. Найдите корень уравнения	Найдите корень уравнения $3x^4+16x^3+18x^2+27=0$	Найдите корень уравнения $243x^4-108x^3+1=0$	Найдите корень уравнения $48x^4+32x^3+1=0$

$3x^4-8x^3-18x^2+135=0$ и докажите, что он единственный. Отв.3. *Подсказка: используйте теорему о рациональных корнях многочлена или функционально-аналитический способ решения.*	и докажите, что он единственный. Отв.-3.	и докажите, что он единственный. Отв. $\frac{1}{3}$. Подсказка: сделайте замену и примените правило нулевой суммы коэффициентов уравнения.	и докажите, что он единственный. Отв. $\frac{-1}{2}$. Подсказка: сделайте замену и примените правило нулевой знакочередующейся суммы коэффициентов уравнения.
72. .Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых x,y удовлетворяют уравнению $2x^2+5xy-3y^2-2x+y=0$ *Подсказка:* докажите, что квадратное уравнение относительно x имеет корни $x_1=-3y+1; x_2=\frac{y}{2}$. Строим две пересекающиеся прямые.	Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых x,y удовлетворяют уравнению $4x^2-4xy+y^2+2x-y-2=0$ *Подсказка:* докажите, что квадратное уравнение относительно x имеет корни $x_1=\frac{y-2}{2}; x_2=\frac{y+1}{2}$. Строим две пересекающиеся прямые.	Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых x,y удовлетворяют уравнению $x^2+y^2+4x-6y-3=0$ *Подсказка:* т.к.корень из дискриминанта не извлекается, как в предыдущих случаях, то выделяем полные квадраты по переменным x,y. Строим окружность с C(-2;3), R=4.	Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых x,y удовлетворяют уравнению $5x^2+2xy+2y^2-2x-2y+2=0$. *Подсказка:* докажите, что квадратное уравнение относительно x имеет отрицательный дискриминант. Отв. $\varnothing$
73. Дана функция $f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+kx+m$ где коэффициенты a,b,c,d,k,m могут принимать значения 0;1.Найдите значения a,b,c,d,k,m, для которых $f(2)=40$. *Подсказка* $40=32+8\Rightarrow a=1; c=1;$ остальные 0.Единственность следует из единственности представления натурального числа в двоичной системе счисления.	Дана функция $f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+kx+m$ где коэффициенты a,b,c,d,k,m могут принимать значения 0;1.Найдите значения a,b,c,d,k,m, для которых $f(2)=42$. Отв. a=c=k=1, ост.0.	Дана функция $f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+k$ где коэффициенты a,b,c,d,k,m могут принимать значения 0;1;2.Найдите значения a,b,c,d,k,m, для которых $f(3)=325$. Отв. a=b=m=1, ост.0.	Дана функция $f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+kx+m$ где коэффициенты a,b,c,d,k,m могут принимать значения 0;1;2.Найдите значения a,b,c,d,k,m, для которых $f(3)=776$. Отв. b=c=m=1, ост.0.
74. Может ли значение функции $f(x)=\frac{x^3}{x-2}+\frac{x^2}{x-3}-\frac{8}{x-2}-\frac{9}{x-3}$, заданной на луче $(-\infty;-2]$, быть равным 2? *Подсказка:* на данном луче $f(x)=x^2+3x+7\geq 5$, наименьшее значение достигается на	Может ли значение функции $f(x)=\frac{x^3}{x-3}+\frac{x^2}{x-1}-\frac{27}{x-3}-\frac{1}{x-1}$, заданной на луче $(-\infty;-3]$, быть равным 5? *Подсказка:* на данном луче $f(x)=x^2+4x+10\geq 7$, наименьшее значение достигается	Может ли значение функции $f(x)=\frac{x^2+10x+61}{x+5}$, быть равным 5? Найдите все значения, которые может принимать функция.	Может ли значение функции $f(x)=\frac{x^2-4x+29}{x-2}$, быть равным -7? Найдите все значения, которые может принимать функция.

границе.	на границе.	*Подсказка:1способ:введение параметра; 2способ:исследование на экстремумы с помощью производной.* *Отв.* $E(f)=(-\infty;-12]\cup[12;+\infty)$	
75. Может ли значение функции $f(x)=\frac{(x+2)^3}{x}+\frac{(x-1)^2}{x-2}-\frac{8}{x}-\frac{1}{x-2}$, заданной на луче $[3;+\infty)$, быть равным 22? Найдите все значения, которые может принимать функция.	Может ли значение функции $f(x)=\frac{(x+3)^3}{x}-\frac{(x+1)^2}{x+2}-\frac{27}{x}+\frac{1}{x-2}$, заданной на луче $[5;+\infty)$, быть равным 48? Найдите все значения, которые может принимать функция.	Функция $f(x)$ на отрезке $[-2;0]$ задана формулой $f(x)=1-x^2$. Функция $g(x)$ на отрезке $[8;10]$ задана формулой $g(x)=x-8{,}25$. Обе функции являются периодическими с периодом 2. Найдите количество нулей функции $g(x)+f(x)$ на отрезке $[-6;3]$. Отв.5.	Дано уравнение $f(g(x))=4x-x^2$. Найдите его наименьший корень, если известно, что функция $f(x)$ является периодической с периодом 3 и на отрезке $[-1;2]$ задаётся выражением $3+2x-x^2$, а $g(x)=\frac{3x^2+5}{x^2+1}$. Отв.1.
76. Найдите значение производной функции $f(x)=(3x^2-x+1)(x+3)$ в нуле данной функции. **Чему равен угол наклона** касательной к положительному направлению оси ОХ в нуле функции? **Отв.** $arctg31$	Найдите значение производной функции $f(x)=(2x^2-4x+3)(x+2)$ в точке пересечения графика данной функции с осью абсцисс. **Чему равен угол наклона** касательной к положительному направлению оси ОХ в нуле функции?	Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)=\frac{(x+3)}{(3x^2-x+1)}$ в нуле данной функции. **Чему равен угол наклона** касательной к положительному направлению оси ОХ в нуле функции?	Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)=\frac{(x+2)}{(2x^2-4x+3)}$ в точке пересечения графика данной функции **с осью ординат**. **Чему равен угол наклона** касательной к положительному направлению оси ОХ в точке пересечения графика данной функции с осью ординат ?
77. Запишите уравнение той касательной к графику функции $f(x)=5x^2+3x-8$, которая параллельна прямой $y=-17x$. Чему равно расстояние между прямыми?	Запишите уравнение той касательной к графику функции $f(x)=4x^2+5x-1$, которая параллельна прямой $y=21x$. Чему равно расстояние между прямыми?	Запишите уравнение той касательной к графику функции $f(x)=4x^2+5x-1$, которая проходит через точку А(10;-10). Сколько таких касательных?	Запишите уравнение той касательной к графику функции $f(x)=5x^2+3x-8$, которая проходит через точку А(20;-20). Сколько таких касательных?

Отв. $y-6=-17(x+2)$			
78. Напишите уравнения всех касательных к графику функции $f(x)=5x^2+20$, проходящих через начало координат. Отв. $y-40=-20(x+2)$; $y-40=20(x-2)$	Напишите уравнения всех касательных к графику функции $f(x)=2x^2+32$, проходящих через начало координат.	Напишите уравнения всех касательных к окружности $x^2+y^2=1$, проходящих через точку А(3;4).	Напишите уравнения всех касательных к окружности $x^2+y^2=1$, проходящих через точку А(-4;-3).
79. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=3t^2+4t+2$, $x(t)$-это координата точки в момент времени t. Найдите путь, пройденный точкой к моменту, когда её скорость стала равной 16. Отв.20.	Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=4t^2+7t+1$, $x(t)$-это координата точки в момент времени t. Найдите путь, пройденный точкой к моменту, когда её скорость стала равной 15. Отв.11.	Найдите площадь фигуры, ограниченной осью ординат, графиком функции $f(x)=(x-1{,}5)^2+1{,}75$ и прямой, касающейся этого графика в его точке с абсциссой 2. Отв. $\frac{20}{3}$	Найдите площадь фигуры, ограниченной осью ординат, графиком функции $f(x)=(x-2{,}5)^2+2{,}75$ и прямой, касающейся этого графика в его точке с абсциссой 3. Отв. 9
80. Напишите уравнение касательных к графику функции $f(x)=25x^2-15x+9$ в тех точках графика, отношение расстояния от каждой из которых до оси абсцисс к расстоянию до оси ординат равно 15. Краткий конспект решения: $25x^2-15x+9=15x; x_{кас}=0{,}6$ $y-9=15(x-0{,}6)$. $25x^2-15x+9=-15x;\Leftrightarrow\varnothing$.	Напишите уравнение касательных к графику функции $f(x)=49x^2-14x+4$ в тех точках графика, отношение расстояния от каждой из которых до оси абсцисс к расстоянию до оси ординат равно 14.	Найдите площади равнобедренных треугольников, каждый из которых ограничен осями координат и одной из касательных к графику функции $f(x)=x^2-9x+2$. Отв.y=x-23; $S_\Delta=\frac{529}{2}$. Y=-x-14; $S_\Delta=\frac{196}{2}=98$.	Найдите площади равнобедренных треугольников, каждый из которых ограничен осями координат и одной из касательных к графику функции $f(x)=x^2+5x-1$. Отв.
81. Касательная к графику функции $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+4x-3$ образует с положительным	Касательная к графику функции $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+11x+1$ образует с положительным	Напишите уравнение той касательной к графику функции $f(x)=-x^3-6x^2+3$, которая имеет	Напишите уравнение той касательной к графику функции $f(x)=-x^3+3x^2-5$, которая имеет наибольший

направлением оси абсцисс наименьший из возможных углов. Напишите уравнение касательной. Краткий конспект решения: $k_{\min}(-1)= f'_{\min}(-1)=3$ $y-\frac{19}{3}=3(x+1)$.	направлением оси абсцисс наименьший из возможных углов. Напишите уравнение касательной. Краткий конспект решения: $k_{\min}(3)= f'_{\min}(3)=2$	наибольший угловой коэффициент.	угловой коэффициент.
82. На прямой x=a, параллельной оси ординат, взяты точки A, B, лежащие на прямых $y=x+3; y=x-1$. Найдите координаты этих точек, если известно, что сумма квадратов расстояний от этих точек до точки $M(-2;-3)$ является наименьшей из возможных. Отв. $MA^2+MB^2=4a^2+24a+48$ $a_{\min}=-3; A(-3;0); B(-3;-4)$	На прямой , параллельной оси ординат, взяты точки, лежащие на прямых $y=x+3; y=x-1$. Найдите координаты этих точек, если известно, что сумма квадратов расстояний от этих точек до точки $M(-1;-2)$ является наименьшей из возможных.	На прямой , параллельной оси ординат, взяты точки, лежащие на прямых $y=x-3; y=x+1$. Найдите координаты этих точек, если известно, что сумма квадратов расстояний от этих точек до точки $M(-1;-2)$ является наименьшей из возможных.	На прямой , параллельной оси ординат, взяты точки, лежащие на прямых $y=x-4; y=x+3$. Найдите координаты этих точек, если известно, что сумма квадратов расстояний от этих точек до точки $M(-9;-12)$ является наименьшей из возможных.
83. Наименьшее значение на отрезке $[-4;2]$ непрерывной функции $y=f(x)$ равно 6. Наименьшее значение этой же функции на отрезке $[-5;7]$ равно 3 и достигается в точке x_0. Определите знак выражения $(x_0+4)(x_0-2)$. Отв. «+». *Подсказка: рассмотрите знаки множителей в случаях:* $x_0\in[-5;-4); x_0\in(2;7]$.	Наибольшее значение на отрезке $[-2;4]$ непрерывной функции $y=f(x)$ равно 8 и достигается в точке x_0. Наибольшее значение этой же функции на отрезке $[-1;3]$ равно 6. Определите знак выражения $(x_0+1)(x_0-3)$. Отв.	Точки B, C лежат на оси абсцисс, BC=4. На графике функции $f(x)=x^4-4x+55$ найдите такую точку A, что треугольник ABC имеет наименьшую площадь. Чему равна эта площадь? Отв. $S_{\Delta\min}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 52=104.$	Точки B, C лежат на оси абсцисс, BC=6. На графике функции $f(x)=x^4+32x+49$ найдите такую точку A, что треугольник ABC имеет наименьшую площадь. Чему равна эта площадь? Отв.
84. Покажите, что множеством значений функции $y(x)=\frac{x^2+2x+a}{x^2+4x+3a}$	Докажите, что если число c принимает любое значение из промежутка [0,5;1] , то уравнение	Докажите, что функция $f(t)=\frac{2t^2+4t+2a}{t^2+4t+3a}$ принимает любые	Докажите, что множество значений функции $\varphi(z)=\frac{z^2+2z+a}{2z^2+8z+6a}$ совпадает со множеством всех

является R , если а є [0,01;0,1].	$\frac{x^2+2x+c}{x^2+4x+3c}=a$ имеет решение относительно *x* при любых $a \in R$.	действительные значения, если а є (0;0,75].	действительных чисел, если $a \in [0.7;\ 0{,}9]$.
85. Найдите множество значений функции $\varphi(t)=\frac{12t^2-4t+1}{9t^2-3t+1}$. Отв. $\left[\frac{8}{9};\frac{12}{9}\right)$	Найдите множество значений функции $y=\frac{8x^2-4x+3}{4x^2-2x+1}$ Отв. $\left(2;\frac{10}{3}\right]$	Найдите множество значений Е(у) функции $y=\frac{3x^2-4x+8}{9x^2-12x+16}$ Отв. $\left(\frac{1}{3};\frac{5}{9}\right]$	
86. Найдите все значения параметра *а*, при которых уравнение $\frac{8x^2-20x+16}{4x^2-10x+7}=a$ относительно *х* имеет решение. Отв. $a\in\left(2;\frac{14}{3}\right]$.	Найдите все значения параметра *а*, при которых уравнение относительно *х* $\frac{6x^2-2x+1}{9x^2-3x+1}=a$ имеет решение. Отв. $a\in\left(\frac{2}{3};\frac{10}{9}\right]$.	При каких значениях параметра а разрешимо уравнение относительно х: $\frac{8x^2-4x+3}{4x^2-2x+1}=a$. Отв. $a\in\left(2;\frac{10}{3}\right]$.	При каких значениях параметра а имеет решение уравнение $\frac{3x^2-4x+8}{9x^2-12x+16}=a$ Отв. $a\in\left(\frac{1}{3};\frac{5}{9}\right]$.
87. Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, является чётной и периодической с периодом, равным 4. На отрезке $[0;2]$эта функция задана формулой $f(x)=-8x^2+8x+1$.Найдите количество нулей этой функции на отрезке $[-4;5]$. Отв.4.	Функция $f(x)$определена на всей числовой прямой, является чётной и периодической с периодом, равным 4. На отрезке $[-2;0]$эта функция задана формулой $f(x)=-3x^2-3x+1{,}25$.Найдите количество нулей этой функции на отрезке $[-5;4]$. Отв.4.	Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, является периодической с периодом, равным 2. На полуинтервале $[0;2)$эта функция задана формулой $f(x)=8x-4x^2$. Функция $g(x)$ на полуинтервале $[0;4)$ задана формулой $g(x)=4x-x^2-1$ и является периодической с периодом 4. Найдите количество корней уравнения $g(x)=f(x)$ на отрезке $[3;10]$. Отв.3.	Функция $f(x)$на отрезке $[0;3]$ задана формулой $f(x)=2-x^2$. Функция $g(x)$ на отрезке $[9;12]$ задана формулой $g(x)=2(x-9)$.Обе функции являются периодическими с периодом 3. Найдите количество нулей функции $g(x)+f(x)$на отрезке $[-5;4]$. Отв.3.
88. Найдите все значения х, при которых расстояния между соответствующими	Найдите все значения х, при которых расстояния между соответствующими	Найдите все значения х, при которых расстояния между соответствующими	Найдите все значения х, при которых расстояния между соответствующими точками

точками графиков функций $y = x$ и $y = \left\|x^2 - 9\right\|$ равно 3. Отв.-3;2;3;4.	точками графиков функций $y = \left\|x^2 - 2x\right\|$ и $y = \left\|x^2 + 2x\right\|$ равно 8. Отв.-2;2.	точками графиков функций $y = \left\|x\right\|$ и $y = \left\|x^2 - 2x\right\|$ равно 4. Отв.-2;2.	графиков функций $y = x$ и $y = \left\|x^2 - 3x + 2\right\|$ равно 8. Отв.0;2;4. *Подсказка:* ММЗ: $\left\|\left\|x^2 - 3x + 2\right\| - x\right\| = 2$.
89. Дано уравнение $f(g(x)) = 4x - x^2$. Найдите его наименьший корень, если известно, что функция $f(x)$ является периодической с периодом 4 и на отрезке $[0;4]$ задаётся выражением $4x - x^2$, а $g(x) = \frac{4x^2+6}{x^2+1}$. Отв.1.	Дано уравнение $f(g(x)) = 4x - x^2$. Найдите его наименьший корень, если известно, что функция $f(x)$ является периодической с периодом 3 и на отрезке $[-1;2]$ задаётся выражением $3 + 2x - x^2$, а $g(x) = \frac{3x^2+5}{x^2+1}$. Отв.1.		
86. **(Исследовательское задание на квадратный трёхчлен).** 1) Изобразите две различных параболы $y = ax^2 + bx + c$, удовлетворяющих следующим свойствам:а)ветви параболы направлены вниз, б)вершина параболы $V_0(x_0; y_0) \in IV$ *четверти*. 2)Определите знаки коэффициентов a,b,c параболы $y = ax^2 + bx + c$. Определяются ли они однозначно? 3)Найдите все значения параметра к, при каждом из которых знаки коэффициентов a,b,c будут такими, как это определено в п.2, если	**(Исследовательское задание на квадратный трёхчлен).** 1) Изобразите две различных параболы $y = ax^2 + bx + c$, удовлетворяющих следующим свойствам:а)ветви параболы направлены вверх, б)вершина параболы $V_0(x_0; y_0) \in III$ *четверти* (не на границе). 2)Определите знаки коэффициентов a,b,c параболы $y = ax^2 + bx + c$. Определяются ли они однозначно? 3)Найдите все значения параметра к, при каждом из которых знаки коэффициентов a,b,c будут такими, как это определено в п.2, если	**(Исследовательское задание на квадратный трёхчлен).** 1) Изобразите две различных параболы $y = ax^2 + bx + c$, удовлетворяющих следующим свойствам:а)ветви параболы направлены вниз, б)вершина параболы $V_0(x_0; y_0) \in I$ *четверти* (не на границе). 2)Определите знаки коэффициентов a,b,c параболы $y = ax^2 + bx + c$. Определяются ли они однозначно? 3)Найдите все значения параметра к, при каждом из которых знаки коэффициентов a,b,c будут такими, как это	**(Исследовательское задание на квадратный трёхчлен).** 1) Изобразите две различных параболы $y = ax^2 + bx + c$, удовлетворяющих следующим свойствам:а)ветви параболы направлены вверх, б)вершина параболы $V_0(x_0; y_0) \in II$ *четверти* (не на границе). 2)Определите знаки коэффициентов a,b,c параболы $y = ax^2 + bx + c$. Определяются ли они однозначно? 3)Найдите все значения параметра к, при каждом из которых знаки коэффициентов a,b,c будут такими, как это определено в п.2, если

$a(k)=3-2k-k^2;$ $b(k)=k^2+3k-4;$ $c(k)=\|k-2\|-10.$ 4)Пусть параметр k принадлежит множеству, определённому в п.3. Может ли соответствующая парабола пересечь ось ОХ? **Ответ:** 2)знаки коэффициентов $\begin{cases} a(k)=3-2k-k^2<0; \\ b(k)=k^2+3k-4>0; \\ c(k)=\|k-2\|-10<0. \end{cases}$ $при \quad k\in(-8;-4)\cup(1;12).$ 4)при указанных знаках коэффициентов соответствующая парабола пересекает ось абсцисс при $k\in(k_0;12), k_0\in(4;5);$ $k\in(-8;\bar{k}), \bar{k}\in(-6;-5)$; например, при $k\in\{-7;5;6;7;8;9;10;11\}.$	$a(k)=\|k-3\|;$ $b(k)=8k-k^2;$ $c(k)=k^2-25.$ 4)Пусть параметр k принадлежит множеству, определённому в п.3. Может ли соответствующая парабола пересечь ось ОХ? **Ответ:** 2)знаки коэффициентов $a(k)>0; b(k)>0; c(k)<0$ $при \quad k\in(0;3)\cup(3;5).$ 4)при $a(k)>0; b(k)>0; c(k)<0$ $при \quad k\in(0;3)\cup(3;5).$ соответствующая парабола пересекает ось абсцисс .	определено в п.2, если $a(k)=k^2-64;$ $b(k)=\|k-6\|-3;$ $c(k)=k^2+12k+35.$ 4)Пусть параметр k принадлежит множеству, определённому в п.3. Может ли соответствующая парабола пересечь ось ОХ? **Ответ:** 2)знаки коэффициентов $a(k)<0; b(k)>0; c(k)<0$ $при \quad k\in(-7;-5).$ 4)Для того, чтобы парабола не пересекала ось абсцисс необходимо и достаточно разрешимость системы $\begin{cases} k\in(-7;-5); \\ D(k)<0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} k\in(-7;-5); \\ 4k^4+48k^3-117k^2-3066k-8957>0 \end{cases}$ (Geogebra)	$a(k)=k^2+k-2;$ $b(k)=\|k\|-3;$ $c(k)=25-k^2.$ 4)Пусть параметр k принадлежит множеству, определённому в п.3. Может ли соответствующая парабола пересечь ось ОХ? **Ответ:** 2)знаки коэффициентов $a(k)>0; b(k)>0; c(k)>0$ $при \quad k\in(-5;-3)\cup(3;5).$ 4)Для того, чтобы парабола пересекала ось абсцисс необходимо и достаточно разрешимость системы $\begin{cases} k\in(-5;-3)\cup(3;5); \\ D(k)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$ (Geogebra)
87. **(Исследовательское задание на квадратный трёхчлен).** 1) Изобразите две различных параболы $y=ax^2+bx+c$, удовлетворяющих следующим свойствам:а)ветви параболы направлены вверх, б)вершина параболы $V_0(x_0;y_0)\in III\ четверти$ (не на границе). 2)Определите знаки коэффициентов a,b,c параболы $y=ax^2+bx+c$.	**(Исследовательское задание на квадратный трёхчлен).** 1) Изобразите две различных параболы $y=ax^2+bx+c$, удовлетворяющих следующим свойствам:а)ветви параболы направлены вниз, б)вершина параболы $V_0(x_0;y_0)\in I\ четверти$ (не на границе). 2)Определите знаки коэффициентов a,b,c	**(Исследовательское задание на квадратный трёхчлен).** 1) Изобразите две различных параболы $y=ax^2+bx+c$, удовлетворяющих следующим свойствам:а)ветви параболы направлены вниз, б)вершина параболы $V_0(x_0;y_0)\in II\ четверти$ (не на границе). 2)Определите знаки	**(Исследовательское задание на квадратный трёхчлен).** 1) Изобразите две различных параболы $y=ax^2+bx+c$, удовлетворяющих следующим свойствам:а)ветви параболы направлены вниз, б)вершина параболы $V_0(x_0;y_0)\in III\ четверти$ (не на границе). 2)Определите знаки коэффициентов a,b,c

Определяются ли они однозначно? 3)Найдите все значения параметра к, при каждом из которых знаки коэффициентов a,b,c будут такими, как это определено в п.2, если $a(k)=\|k-2\|-5;$ $b(k)=6-5k-k^2;$ $c(k)=k^2-1.$ 4)Пусть параметр k принадлежит множеству, определённому в п.3. Может ли соответствующая парабола не пересекать ось OX? **Ответ:** 2)знаки коэффициентов $a(k)>0; b(k)>0; c(k)>0$ $при \quad k\in(-6;-3).$ 4)при разрешимости системы $\begin{cases} k\in(-6;-3); \\ D(k)<0. \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} k\in(-6;-3); \\ k^3+15k^2+40k-24>0. \end{cases}$ соответствующая парабола не пересекает ось абсцисс . (Geogebra)	параболы $y=ax^2+bx+c$. Определяются ли они однозначно? 3)Найдите все значения параметра к, при каждом из которых знаки коэффициентов a,b,c будут такими, как это определено в п.2, если $a(k)=k\|k+1\|;$ $b(k)=k^2+k-2;$ $c(k)=36-k^2.$ 4)Пусть параметр k принадлежит множеству, определённому в п.3. Может ли соответствующая парабола не пересекать ось OX? **Ответ:** 2)знаки коэффициентов $a(k)<0; b(k)>0; c(k)>0$ $при \quad k\in(-\infty;-6)\cup(-6;-2).$ 4)при разрешимости системы $\begin{cases} k\in(-\infty;-6)\cup(-6;-2); \\ D(k)>0. \end{cases} \Leftrightarrow$ $k\in(-\infty;-6)\cup(-6;-2)$ соответствующая парабола пересекает ось абсцисс .	коэффициентов a,b,c параболы $y=ax^2+bx+c$. Определяются ли они однозначно? 3)Найдите все значения параметра к, при каждом из которых знаки коэффициентов a,b,c будут такими, как это определено в п.2, если $a(k)=k^2-6k;$ $b(k)=\|k-1\|-3;$ $c(k)=k^2-k-2.$ 4)Пусть параметр k принадлежит множеству, определённому в п.3. Может ли соответствующая парабола не пересекать ось OX? **Ответ:** 2) 1 случай: знаки коэффициентов $a(k)<0; b(k)<0; c(k)>0$ $при \quad k\in(2;4).$ 2 случай: знаки коэффициентов $a(k)<0; b(k)<0; c(k)<0$ $при \quad k\in(0;2).$	параболы $y=ax^2+bx+c$. Определяются ли они однозначно? 3)Найдите все значения параметра к, при каждом из которых знаки коэффициентов a,b,c будут такими, как это определено в п.2, если $a(k)=\|k-1\|-8;$ $b(k)=3k-k^2;$ $c(k)=k^2-12k+20.$ 4)Пусть параметр k принадлежит множеству, определённому в п.3. Может ли соответствующая парабола пересечь ось OX? **Ответ:** 2)знаки коэффициентов $a(k)<0; b(k)<0; c(k)<0$ $при \quad k\in(3;9).$ 4)при разрешимости системы $\begin{cases} k\in(3;9); \\ D(k)>0. \end{cases}$ соответствующая парабола пересекает ось абсцисс . (Geogebra)
88. **(Исследовательское задание на квадратный трёхчлен).** Каноническим уравнением параболы называется уравнение вида $y=k(x-x_0)^2+y_0$, где точка $V_0(x_0;y_0)$ является вершиной параболы. 1)Приведите данное уравнение $y=2x^2-4ax+2{,}125a^2-0{,}75a-0{,}875$	**(Исследовательское задание на квадратный трёхчлен).** Каноническим уравнением параболы называется уравнение вида $y=k(x-x_0)^2+y_0$, где точка $V_0(x_0;y_0)$ является вершиной параболы. 1)Приведите данное уравнение $y=x^2-2ax+0{,}875a^2+a-1$	**(Исследовательское задание на квадратный трёхчлен).** Каноническим уравнением параболы называется уравнение вида $y=k(x-x_0)^2+y_0$, где точка $V_0(x_0;y_0)$ является вершиной параболы. 1)Приведите данное	**(Исследовательское задание на квадратный трёхчлен).** Каноническим уравнением параболы называется уравнение вида $y=k(x-x_0)^2+y_0$, где точка $V_0(x_0;y_0)$ является вершиной параболы. 1)Приведите данное уравнение

к каноническому виду, определите координаты $x_0(a); y_0(a)$ вершины параболы. 2)Исключив параметр **а** из равенств для координат $x_0(a); y_0(a)$, найдите уравнение линии, на которой лежат вершины всех заданных парабол, зависящих от параметра (уравнение линии вершин). 3) На одной системе координат XOY изобразите линию вершин и различные параболы $y = 2x^2 - 4ax + 2{,}125a^2 - 0{,}75a - 0{,}875$ при $a \in \{-3;-1;3;7;9\}$. Отв. канонический вид: $y = 2(x-a)^2 + \frac{1}{8}(a-7)(a+1)$ линия вершин $V: \quad y = \frac{1}{8}(x-7)(x+1)$.	к каноническому виду, определите координаты $x_0(a); y_0(a)$ вершины параболы. 2)Исключив параметр **а** из равенств для координат $x_0(a); y_0(a)$, найдите уравнение линии, на которой лежат вершины всех заданных парабол, зависящих от параметра (уравнение линии вершин). 3) На одной системе координат XOY изобразите линию вершин и различные параболы $y = x^2 - 2ax + 0{,}875a^2 + a - 1$ при $a \in \{-2;0;4;8;10\}$. Отв. канонический вид: $y = (x-a)^2 + \frac{1}{8}\left((a+4)^2 - 24\right)$ линия вершин $V: \quad y = \frac{1}{8}\left((x+4)^2 - 24\right)$.	уравнение $y = ax^2 - 2ax + a^3 + 2a - 1$ к каноническому виду, определите координаты $x_0(a); y_0(a)$ вершины параболы. 2)Исключив параметр **а** из равенств для координат $x_0(a); y_0(a)$, найдите уравнение линии, на которой лежат вершины всех заданных парабол, зависящих от параметра (уравнение линии вершин). 3) На одной системе координат XOY изобразите линию вершин и различные параболы $y = ax^2 - 2ax + a^3 + 2a - 1$ при $a \in \{-2;-1;0;1;2\}$. Отв. канонический вид: $y = a(x-1)^2 + a^3 + a - 1$ линия вершин $V: \quad x = 1, y \in R$. К.з.п.а=0.	$y = ax^2 + x^2 - 2a^2x - 4ax - 2x + a^3 + 3a^2 + 5a + 2$ к каноническому виду, определите координаты $x_0(a); y_0(a)$ вершины параболы. 2)Исключив параметр **а** из равенств для координат $x_0(a); y_0(a)$, найдите уравнение линии, на которой лежат вершины всех заданных парабол, зависящих от параметра (уравнение линии вершин). 3) На одной системе координат XOY изобразите линию вершин и различные параболы $y = ax^2 + x^2 - 2a^2x - 4ax - 2x + a^3 + 3a^2 + 5a + 2$ при $a \in \{-3;-2;-1;0;1\}$. Отв. канонический вид: $y = (a+1)(x-a-1)^2 + 2a + 1$ линия вершин $V: \quad y = 2x + 1$. К.з.п.а=-1.
90. При всех значениях параметра а определите количество корней уравнения $\|2t-a\| - \|t+2a\| = t^2$. *Подсказка:используйте КПП.* Ответ:	При всех значениях параметра а определите количество корней уравнения $\|3t-a\| - \|t+3a\| = t^2$. *Подсказка:используйте КПП.* Ответ:	При всех значениях параметра а определите количество корней уравнения $\|2t-a\| - \|t+2a\| = 2t^2$. *Подсказка:используйте КПП.* Ответ:	При всех значениях параметра а определите количество корней уравнения $\|3t-a\| - \|t+3a\| = 2t^2$. *Подсказка:используйте КПП.* Ответ:

$a<-\frac{9}{4}\to 0$ *корней*; $a=-\frac{9}{4}\to 1$ *корень*; $-\frac{9}{4}<a<-\frac{1}{12}\to 2$ *корня*; $a=-\frac{1}{12}\to 3$ *корня*; $-\frac{1}{12}<a<0\to 4$ *корня*; $a=0\to 3$ *корня*; $0<a<\frac{1}{12}\to 4$ *корня*; $a=\frac{1}{12}\to 3$ *корня*; $\frac{1}{12}<a<\frac{9}{4}\to 2$ *корня*; $a=\frac{9}{4}\to 1$ *корень*; $a>\frac{9}{4}\to 0$ *корней*.	$a<-2\to 0$ *корней*; $a=-2\to 1$ *корень*; $-2<a<-\frac{1}{4}\to 2$ *корня*; $a=-\frac{1}{4}\to 3$ *корня*; $-\frac{1}{4}<a<0\to 4$ *корня*; $a=0\to 3$ *корня*; $0<a<\frac{1}{4}\to 4$ *корня*; $a=\frac{1}{4}\to 3$ *корня*; $\frac{1}{4}<a<2\to 2$ *корня*; $a=2\to 1$ *корень*; $a>2\to 0$ *корней*.		

90. **(Исследовательское задание на квадратный трёхчлен).** Каноническим уравнением параболы называется уравнение вида $y=k(x-x_0)^2+y_0$, где точка $V_0(x_0;y_0)$ является вершиной параболы. 1)Приведите данное уравнение $y=ax^2-x^2-2a^2x+4ax-2x+$ $+a^3-3a^2+5a-4$ к каноническому виду, определите координаты $x_0(a); y_0(a)$ вершины параболы. 2)Исключив параметр **а** из равенств для координат $x_0(a); y_0(a)$, найдите уравнение линии, на которой лежат вершины всех заданных парабол, зависящих от параметра (уравнение линии вершин). 3) На одной системе координат XOY изобразите линию вершин и различные параболы $y=ax^2-x^2-2a^2x+4ax-2x+$ $+a^3-3a^2+5a-4$	**(Исследовательское задание на квадратный трёхчлен).** Каноническим уравнением параболы называется уравнение вида $y=k(x-x_0)^2+y_0$, где точка $V_0(x_0;y_0)$ является вершиной параболы. 1)Приведите данное уравнение $y=2ax^2-8a^2x+8a^3+4a-1$ к каноническому виду, определите координаты $x_0(a); y_0(a)$ вершины параболы. 2)Исключив параметр **а** из равенств для координат $x_0(a); y_0(a)$, найдите уравнение линии, на которой лежат вершины всех заданных парабол, зависящих от параметра (уравнение линии вершин). 3) На одной системе координат XOY изобразите линию вершин и различные параболы $y=2ax^2-8a^2x+8a^3+4a-1$ при $a\in\{-1;-0{,}5;0;0{,}5;1\}$.	**(Исследовательское задание на квадратный трёхчлен).** Каноническим уравнением параболы называется уравнение вида $y=k(x-x_0)^2+y_0$, где точка $V_0(x_0;y_0)$ является вершиной параболы. 1)Приведите данное уравнение $y=2x^2-4ax-8x+$ $+2{,}125a^2+7{,}75a+6{,}125$ к каноническому виду, определите координаты $x_0(a); y_0(a)$ вершины параболы. 2)Исключив параметр **а** из равенств для координат $x_0(a); y_0(a)$, найдите уравнение линии, на которой лежат вершины всех заданных парабол, зависящих от параметра	**(Исследовательское задание на квадратный трёхчлен).** Каноническим уравнением параболы называется уравнение вида $y=k(x-x_0)^2+y_0$, где точка $V_0(x_0;y_0)$ является вершиной параболы. 1)Приведите данное уравнение $y=3x^2-6ax+12x+3a^2-11a+10$ к каноническому виду, определите координаты $x_0(a); y_0(a)$ вершины параболы. 2)Исключив параметр **а** из равенств для координат $x_0(a); y_0(a)$, найдите уравнение линии, на которой лежат вершины всех заданных парабол, зависящих от параметра (уравнение линии вершин). 3) На одной системе координат XOY изобразите линию вершин и различные параболы $y=3x^2-6ax+12x+3a^2-11a+10$ при $a\in\{0;1;2;3;4\}$. Отв. канонический вид:

при $a \in \{-1;0;1;2;3\}$. Отв. канонический вид: $y=(a-1)(x-a+1)^2+2a-3$ линия вершин $V: \quad y=2x-1$ К.з.п.а=1.	Отв. канонический вид: $y=2a(x-2a)^2+4a-1$ линия вершин $V: \quad y=2x-1$ К.з.п.а=0.	(уравнение линии вершин). 3) На одной системе координат XOY изобразите линию вершин и различные параболы $y=2x^2-4ax-8x+$ $+2{,}125a^2+7{,}75a+6{,}125$ при $a \in \{-5;-3;1;5;7\}$. Отв. канонический вид: $y=2(x-a-2)^2+$ $+\frac{1}{8}(a-5)(a+3)$ линия вершин $V: \quad y=\frac{1}{8}(x-7)(x+1)$	$y=3(x-a+2)^2+a-2$, линия вершин $V: \quad y=x$.

БАЗОВАЯ ЗАДАЧА №2 Задача исследования разрешимости уравнения $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$; определение числа корней, задача нахождения корней этого уравнения.

ЗЗ. Исследование разрешимости уравнений вида $x^2+bx+p=0, x^2+px+a=0$, в которых наличие и число корней определяются дискриминантом $(D(p)\geq 0; D(p)<0)$.

МЗ. Исследование разрешимости уравнений вида $(p-p_0)x^2+b(p)x+a(p)=0$, в которых наличие и число корней определяются не только дискриминантом $(D(p)\geq 0; D(p)<0)$, но и *контрольным значением параметра* p_0.

НЗ. Исследование разрешимости уравнений с кусочно-заданными функциями (возможно, с применением производной); решение дробно-рациональных уравнений и уравнений высоких степеней, сводящихся к квадратным уравнениям; уравнения в целых числах, целые значения параметра.

91. При каждом значении параметра а решите уравнение $x^2-(4a+1)x+4a=0$ Отв. 1и 4а. При каких значениях параметра а корни совпадают?	При каждом значении параметра а решите уравнение $x^2-(2a+1)x+2a=0$. Отв. 1 и 2а. При каких значениях параметра а корни совпадают?	При каждом значении параметра а решите уравнение $x^2-(3a-1)x+3a=0$. Отв. -1 и 3а. При каких значениях параметра а корни совпадают?	При каждом знаелых числах, чении параметра а решите уравнение $x^2+ax-6a^2+5a-1=0$ Отв. 2а-1 и -3а+1. При каких значениях параметра а корни совпадают?
92. Для каждого значения параметра а определите количество корней	Для каждого значения параметра а определите количество корней уравнения	Найдите все такие х, при которых неравенство $(4-2a)x^2+(13a-27)x+(33-13a)>0$ выполняется для всех	Найдите все значения х, удовлетворяющие неравенству $(2-a)x^3+(1-2a)x^2-6x+(5+4a-a^2)<0$

уравнения $2(4x-1)a^2-(14x-11)a+$ $+5(x-1)=0$ Отв.при нет решений.	$9(3x-1)a^2-(21x-19)a+$ $+2(x-1)=0$ Отв.при $a\in\left\{\frac{1}{9};\frac{35}{54}\right\}\Rightarrow\varnothing$; $a\notin\left\{\frac{1}{9};\frac{35}{54}\right\}\Rightarrow x=\frac{9a^2-19a+2}{27a^2-21a+2}$ нет решений.	значений а из интервала (0;3). Отв. $x\in\left[3-\sqrt{6};2\right]\cup\left[5;3+\sqrt{6}\right]$	хотя бы при одном значении а, принадлежащем отрезку $[-1;2]$. Отв. $x\in(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$
93. При каких значениях параметра а площадь фигуры, заданной системой неравенств $\begin{cases} y^2+x^2-2ax\le 36-a^2, \\ (x+2)^2\le 36, \end{cases}$ равна 18π? Отв:-8;4.	При каких значениях параметра а площадь фигуры, заданной системой неравенств $\begin{cases} y^2+x^2-2ax\le 4-a^2, \\ (x+1)^2\le 25, \end{cases}$ равна 2π ? Отв		
94. Имеет ли квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ действительные корни, если: *c(a + b + c) ≤ 0* ? *Подсказка:если для непрерывной функции выполнено неравенство* $f(0)f(1)\le 0$ *, то по теореме Б.Больцано уравнение имеет корень на отрезке* $[0;1]$.	Имеет ли квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ действительные корни, если: *c(4a + 2b + c) ≤ 0*? *Подсказка:если для непрерывной функции выполнено неравенство* $f(0)f(2)\le 0$ *, то по теореме Б.Больцано уравнение имеет корень на отрезке* $[0;2]$.	Имеет ли квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ действительные корни, если: *(a+ b+c)(9a+3b+c)≤0.* *Подсказка:если для непрерывной функции выполнено неравенство* $f(1)f(3)\le 0$ *, то по теореме Б.Больцано уравнение имеет корень на отрезке* $[0;3]$.	Имеет ли квадратное уравнение $ax^2 + bx + c =0$ действительные корни, если: *(a - b +c)(a + b + c)≤0. Подсказка:если для непрерывной функции выполнено неравенство* $f(-1)f(1)\le 0$ *, то по теореме Б.Больцано уравнение имеет корень на отрезке* $[-1;1]$.
95. Имеет ли квадртатное уравнение относительно х действительные корни при любых значениях параметров a, b, c, если: $2x^2 + 2(a + b)x + bc+ac–0,5c^2= 0$ *Подсказка: покажите, что дискриминант преобразуется к виду:* $(b-c)^2+(a-c)^2+(b+$.	Имеет ли квадртатное уравнение относительно х действительные корни при любых значениях параметров a, b, c, если: $(x - a)(x - b) = c^2$ *Подсказка: 1 сп.: анализ графика параболы.* *2 сп.: Покажите, что дискриминант преобразуется к виду:* $(b-a)^2+4c^2$.	Имеет ли квадртатное уравнение относительно х действительные корни при любых значениях параметров a, b, c, если: $(x - a)(x - b) = c^2(2x - a)$ *Проверьте гипотезу: при* $a\le 0$ *уравнение имеет корни.*	Имеет ли квадртатное уравнение относительно х действительные корни при любых значениях параметров a, b, c, если: $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ *Приведите уравнение к каноноческому виду, тогда дискриминант* $D=4(a+b+c)^2-$ $-12(ab+bc+ac)=$ $=2\left((a-b)^2+(c-b)^2+(a-c)^2\right)$ *При a=b=c x=a.*

96. Имеет ли квадртатное уравнение относительно x действительные корни при любых значениях параметров a, b, c, если: *a(x - b)(x - c) + b(x - a)(x - c) + c(x - a)(x - b) = 0* *Приведите уравнение к каноноческому виду, тогда дискриминант* $D_1=(ac+bc+ab)^2-$ $-3abc(a+b+c)=$ $=((ac-bc)^2+(bc-ab)^2+(ab-ac$ *При* $a=b=c\neq 0\to x_{1,2}=a$.	Имеет ли квадратное уравнение $(a^2+b^2+c^2)x^2+2(a+b+c)x+3=0$ действительные корни, если $a\neq b\neq c$? *Подсказка: покажите:* $D=(a+b+c)^2-$ $-(a^2+b^2+c^2)=$ $=-((a-b)^2+(c-b)^2+(a-c)^2)$	Имеет ли квадратное уравнение $a^2x^2+(a^2+c^2-b^2)x+c^2=0$ действительные корни, если a, b, c - длины сторон треугольника? Отв. нет.	Докажите, что корни уравнения $x^2+px+q=0$, где p и q – нечетные числа, иррациональны. Можно обобщить на кубическое уравнение!
97. Имеет ли хотя бы одно из уравнений $x^2+bx+c=0$ и $x^2+px+q=0$ действительные корни, если $bp=2(c+q)$? *Подсказка:* если предположить, что оба дискриминанта отрицательны, то получим $(b+p)^2<0$ - противоречие!	Докажите, что если уравнение $x^2+2x+c+1=0$ имеет действительные и различные корни, то уравнение $(2-c)x^2+2(c+2)x+c^2+c+2=0$ действительных корней не имеет. *Краткий конспект решения:* из условия следуетc<0, дискриминант второго уравнения $D(c)=c(c^2+4)<0$	Докажите, что если уравнение $(2-a)x^2+2(a+2)x+a^2+a+2=0$ имеет действительные и различные корни, то уравнение $x^2+2x+a+1=0$ действительных корней не имеет. *Краткий конспект решения:* из условия следует a>0, дискриминант второго уравнения $D(a)<0$	Докажите, что корни уравнения $x^2+(2a+1)x+(2b+1)=0$, $a\in Z$, $b\in Z$, иррациональны.
98. При каких значениях параметра a корни уравнения $4x^2+(3a^2-5\|a\|+2)x-3=0$ равны по модулю? *Подсказка:* $(3a^2-5\|a\|+2)=0$ $\Leftrightarrow a\in\left\{\pm1;\pm\frac{2}{3}\right\}$	При каких значениях параметра a сумма корней уравнения $x^2+a(x-2)-5=0$ равна квадрату разности его корней? Отв.-5;-4.	Найдите наибольшее целое значение параметра a, при котором уравнение $x^2-2(a-12)x+2+a^2=0$ имеет два различных действительных корня. Отв. $a=5$.	При каком значении параметра a корни уравнения $3x^2+5(a-2)x-1=0$ равны по модулю? Когда корни равны? Отв.a=2.
99. Найдите все значения параметра a, при которых количество корней уравнения	Найдите все значения параметра a, при которых количество корней уравнения		

$(a-6)x^3-4x^2+x=0$ (1) равно количеству общих точек линий $x^2+y^2=a^2$ и $y=8-\lvert x-2\rvert$ (2). Ответ: при $a\in\{\pm\sqrt{68};\pm5\sqrt{2};6;10\}$.	$(4-a)x^3-x^2+4x=0$ (1) равно количеству общих точек линий $x^2+y^2=a^2$ и $y=6-\lvert x+1\rvert$ (2). Ответ: при $a\in\left\{\pm\frac{5\sqrt{2}}{2};\frac{63}{16};4;\frac{7\sqrt{2}}{2};\sqrt{37}\right\}$.		
100. Найдите все значения параметра а, при которых количество кор ней уравнения $\lvert x^2+10x\rvert=ax$ (1) равно количеству общих точек линий $x^2+y^2=a^2$ и $y=8-\lvert x-5\rvert$ (2). Ответ: при $a\in\{\pm1{,}5\sqrt{2}\}\cup(-\infty;-10]\cup[10;+\infty)$ уравнение и система имеют по одному или по два решения. Подсказка: постройте развёртки по параметру для каждого из уравнений.	Найдите все значения параметра а, при которых количество корней уравнения $\lvert x^2-6x\rvert=ax$ (1) равно количеству общих точек линий $x^2+y^2=a^2$ и $y=\lvert x-2\rvert-4$ (2). Ответ: $a\in(-\infty;-6)\cup\{-\sqrt{2};3\sqrt{2};2\sqrt{5}\}\cup(6;+\infty)$. Подсказка: постройте развёртки по параметру для каждого из уравнений.	Найдите все значения параметра а, при которых количество корней уравнения $\lvert x^2+4x\rvert=ax$ (1) равно количеству общих точек линий $x^2+y^2=a^2$ и $y=5-\lvert x-1\rvert$ (2). Ответ: $a\in(-\infty;-\sqrt{26})\cup(-3\sqrt{2};-4)$. Подсказка: постройте развёртки по параметру для каждого из уравнений.	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $a^2-2ax-8x^2-4a+4x+12\lvert x\rvert=0$ имеет ровно 4 различных корня. Ответ: при $a\in\left(0;\frac{4}{3}\right)\cup\left(\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)\cup\left(\frac{8}{3};4\right)$ уравнение имеет 4 различных корня.
101. При каких значениях параметра *a* уравнение относительно *x* $(a^2-7a+12)x^2+(a^2+a-12)x+(a^2-8a+15)=0$ имеет более двух корней? *Подсказка:* по теореме все коэффициенты должны быть нули. *Отв.*3.	При каком значении параметра *a* корни уравнения относительно *x* $x^2+(a^2-a-6)x+2a=0$ равны по модулю? Когда корни равны? Отв.-2.	При каком значении параметра *a* корни уравнения относительно *x* $x^2+(a^2-a-6)x+2a+4=0$ равны по модулю? Когда корни равны? Отв.-2.	При каком значении параметра *a* корни уравнения $x^2+(a^2-4a-5)x+a+1=0$ равны по модулю? Отв.-1.
102. При каких значениях k, p корнями уравнения $kx^2+px+3=0$	При каких значениях k, p корнями уравнения $kx^2+px+10=0$ являются числа -2 и 5?	Один из корней уравнения $3x^2+px+4=0$ равен 1, а второй совпадает с	Один из корней уравнения $5x^2+3x+c=0$ равен -1, а второй совпадает с корнем уравнения $5x+4=m$. Найдите

являются числа 1 и -3? (Отв.-1;-2)	(Отв.-1;3)	корнем уравнения $2x-3=m$. Найдите m. (Отв. $-\frac{1}{3}$)	m. (Отв.6)
103. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых корни уравнения $(x-6a)^2+(x-2a)^2=1$ симметричны относительно точки x=12. Отв. а=3. Исп. т. Виета: $4a=\frac{x_1+x_2}{2}=12$ Сделайте проверку.	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых корни уравнения $(x-2a)^2+(x-4a)^2=24$ симметричны относительно точки x=-3.	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых отношение дискриминанта уравнения $ax^2-3x+1=0, a\neq 0$ к квадрату разности его корней равно $8a-7$. Отв.а=-1. 6-п.к.	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых отношение дискриминанта уравнения $ax^2+3x+5=0, a\neq 0$ к квадрату разности его корней равно $5a+6$. Отв.
104. Даны уравнения $x^2=2a-3; \quad x^2=4-5a$. При каких значениях параметра а: 1)**оба уравнения** имеют корни; 2)первое уравнение имеет корни, а второе уравнение не имеет корней; 3)оба уравнения не имеют корней? Отв.1)$\varnothing$;2) $a\geq 1{,}5$; 3)(0,8;1,5)	Даны уравнения $x^2=a+7; \quad x^2=3-2a$. При каких значениях параметра а: 1)**оба уравнения** имеют корни; 2)первое уравнение имеет корни, а второе уравнение не имеет корней; 3)оба уравнения не имеют корней? Отв.1)$[-7;1{,}5]$;2) $(1{,}5;+\infty)$; 3)$\varnothing$	Даны уравнения $x^2=a-5; \quad x^2=4-3a$ При каких значениях параметра а: 1)**оба уравнения** имеют корни; 2)первое уравнение имеет корни, а второе уравнение не имеет корней; 3)оба уравнения не имеют корней? Отв.1)$\varnothing$;2)$[5;+\infty)$; 3) $\left(\frac{4}{3};5\right)$	Определите количество корней уравнения в $x^4+2ax^2-x+a^2+a=0$ зависимости от значений параметра а. *Подсказка:* рассмотрите квадратное уравнение относительно а; найдите его корни;уравнение распадётся на два; **анализ количества корней двух уравнений** удобно проводить с помощью развёртки по параметру.
105. Решите уравнение при всех значениях параметра а $x^2+a^2+2x-2a+2=0$ Отв. (-1;1).	Решите уравнение при всех значениях параметра а $x^2+a^2-4x+2a+5=0$ Отв. (2;-1).	Решите уравнение при всех значениях параметра а $2x^2+2a^2+12x+8a+26=0$	Решите уравнение при всех значениях параметра а $2x^2+2a^2-2x+6a+5=0$ Отв. (0.5;-1.5).
106. Постройте график	Постройте график функции $y=\lvert x^2-4x\rvert+5x+1$.	Постройте график функции	Найдите все значения параметра а, при которых множество решений неравенства $x(x-4)\leq(4a+1)(\lvert x-2\rvert-2)$

функции $y=\frac{(x^2-4x-5)\cdot\lvert x+3\rvert}{x+1}$. При каждом значении параметра а определите количество корней уравнения $y(x)=a$. *Подсказка: из графика функции* $y=(x-5)\lvert x+3\rvert$ *выкалываем точку (-1;-12), далее метод сечений.*	Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y(x)$ на отрезке $[-0.5;4{,}5]$.	$y=\frac{\lvert x^2-4x-5\rvert\cdot(x+3)}{x+1}$. При каждом значении параметра *a* определите количество корней уравнения $y(x)=a$.	содержит число, равное сумме четвёртых степеней корней уравнения $x^2-5x+1=0$. Ответ: $a\geq 131\frac{1}{2}$.
107. Н айдите все значения параметра а, при которых каждое из уравнений $a^2+4a+5-3x+\frac{\sqrt{a+2}}{x^2}=0\ (1)$ и $x+\frac{2}{x}+\frac{x+3a+9}{a+2}=0\ (2)$ имеет хотя бы один корень, и при этом произведение количества корней одного на количество корней другого равно $\frac{2}{3}\log_2(7-a)$. Решите первое уравнение при всех найденных значениях а. Отв.а=-1;x=1.	Найдите все значения параметра а, при которых каждое из уравнений $a^2+a+5-4x+\frac{\sqrt{a+79}}{x^2}=0\ (1)$ и $x+\frac{1}{x}+\frac{x+2a+7}{a+1}=0\ (2)$ имеет хотя бы один корень, и при этом произведение количества корней одного на количество корней другого равно $2\cdot\log_3(5-a)$. Решите первое уравнение при всех найденных значениях а. Отв.а=2;x=3.	Найдите все значения параметра а, при которых количество корней уравнения $a^2+6a+11=\frac{6a+25-(3a+7)}{x-2}0\ (1)$ равно количеству корней уравнения $1-(a-1)x-(3a+5)x^2=0\ (2)$. Решите первое уравнение при всех найденных значениях а. **Отв**.по одному корню при а=-7;x=4,75. $a_2=-\frac{5}{3}\Rightarrow\exists!$ $a_2=-\frac{5}{3}\Rightarrow\exists!x_2=-\frac{3}{8};$ $x_1=\frac{203}{52}$.	Найдите все значения параметра а, при которых количество корней уравнения $a^2+2a=\frac{3a+5-(2a-5)}{x-1}0\ (1)$ равно количеству корней уравнения $-9+3ax+(3a+5)x^2=0\ (2)$, либо оба эти уравнения не имеют корней. Отв.а=-5; а=-2.
108. При каких значениях параметра а уравнение	При каких значениях параметра а уравнение $3x^2+ax+a-3=0$		*При каких значениях параметра а уравнение* $x^2+(a^2-1)x+2a^2-a-1=0$ *имеет два различных корня?*

$2x^2+ax+a-2=0$ имеет два различных корня? Отв. $a\neq 4$	имеет два различных корня? Отв. $a\neq 6$		*Отв.*
109. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $(1-a^2)x^4+(a-3)x^2+a+2-\sqrt{a^2+4a+4}=0$ имеет единственное решение. Найдите это решение. Отв. при $a\in[-2;-1)\cup(1;3]\Rightarrow\exists!\quad x=0.$ *Подсказка: найдите необходимое условие и сведите задачу к исследованию квадратного уравнения.*	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $(8a^3+1)x^4+(a^2-a-2)x^2+a-3+\sqrt{a^2-6a+9}=0$ имеет единственное решение. Найдите это решение. Отв. при $a\in[-1;-0{,}5)\cup[2;3]\Rightarrow\exists!\quad x=0.$ *Подсказка: найдите необходимое условие и сведите задачу к исследованию квадратного уравнения.*	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\frac{a-1}{a+2}x^4+(a^2-2a-3)x^2+2-a-\sqrt{4-4a+a^2}=0$ имеет единственное решение. Найдите это решение. Отв. при $a\in[-2;-1)\cup(1;2]\Rightarrow\exists!\quad x=0.$ *Подсказка: найдите необходимое условие и сведите задачу к исследованию квадратного уравнения.*	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $(a^2-2a)x^4+\left(a-\frac{1}{a}\right)x^2+a+1-\sqrt{a^2+2a+1}=0$ имеет единственное решение. Найдите это решение. Отв. при $a\in[-2;-1)\cup(1;3]\Rightarrow\exists!\quad x=0.$ *Подсказка: найдите необходимое условие и сведите задачу к исследованию квадратного уравнения.*
110. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\left(a-\sqrt{2a+3}\right)x^4+\left(1-\frac{4}{a}\right)x^2+5-a-\sqrt{a^2-5a+25}=0$ имеет единственное решение. Найдите это решение. Отв. при $a\in(0;3)\cup[4;5]\Rightarrow\exists!\quad x=0.$ *Подсказка: сведите задачу к исследованию квадратного уравнения.*	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\left(\sqrt{a+6}+a\right)x^4+\left(a^3-\frac{1}{a}\right)x^2+a-2+\sqrt{a^2-4a+4}=0$ имеет единственное решение. Найдите это решение. Отв. при $a\in[-6;-2)\cup(-1;0)\cup(1;2]\Rightarrow\exists!\quad x=0.$ *Подсказка: сведите задачу к исследованию квадратного уравнения.*	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\left(a^2+\frac{8}{a}\right)x^4+\left(a-\sqrt{a+6}\right)x^2+a-5+\sqrt{a^2-10a+25}=0$ имеет единственное решение. Найдите это решение. Отв. при $a\in[-6;-2)\cup(3;5]\Rightarrow\exists!\quad x=0.$ *Подсказка: сведите задачу к исследованию квадратного уравнения.*	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнения $x^3-3x^2+3x-1=0$ и $3x^5-ax^4+(a+5)(x^3-x^2)+a-3=0$ равносильны. Отв. а=2. *Подсказка: первое уравнение имеет единственный корень.*
111. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $(a^3+8)x^4+(a^2-1)x^2+a+\sqrt{a^2}=0$ имеет ровно три различных корня. Найдите эти корни. Отв.	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $(4-a^2)x^4+(a^2+3a+2)x^2-a-\sqrt{a^2}=0$ имеет ровно три различных корня. Найдите эти корни. Отв.	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $(a^2-9)x^4+(a^3-8)x^2+a+\sqrt{a^2+2a+1}+1=0$ имеет ровно три различных корня. Найдите эти корни. Отв.	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $(a-\frac{1}{a})x^4+\frac{a+1}{a-3}x^2+a+\sqrt{a^2-4a+4}-2=0$ имеет ровно три различных корня. Найдите эти корни. Отв.

$a\in(-\infty;-2)\cup(-1;0]\Rightarrow$ $\exists 3$ *различных корня.* *Подсказка: сведите задачу к исследованию квадратного уравнения.*	$a\in(-\infty;-1)\Rightarrow$ $\exists 3$ *различных корня.* *Подсказка: сведите задачу к исследованию квадратного уравнения.*	$a\in(-\infty;-3)\Rightarrow$ $\exists 3$ *различных корня.* *Подсказка: сведите задачу к исследованию квадратного уравнения.*	$a\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(1;2]\Rightarrow$ $\exists 3$ *различных корня.* *Подсказка: сведите задачу к исследованию квадратного уравнения.*
112. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $(a^2+\frac{1}{a})x^4+\frac{a-1}{a+5}x^2-a-2+\sqrt{a^2+4a+4}=0$ имеет ровно три различных корня. Найдите эти корни. Отв. $a\in[-2;-1)\cup(0;1)\Rightarrow$ $\exists 3$ *различных корня.* *Подсказка: сведите задачу к исследованию квадратного уравнения.*	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $(\frac{1}{a}-a)x^4+(a-\sqrt{a+2})x^2+a-3+\sqrt{a^2-6a+9}=0$ имеет ровно три различных корня. Найдите эти корни. Отв. $a\in(-1;0)\cup(0;1)\cup(2;3]\Rightarrow$ $\exists 3$ *различных корня.* *Подсказка: сведите задачу к исследованию квадратного уравнения.*	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $(a+\sqrt{a+2})x^4+\left(1-\frac{1}{a}\right)x^2+2a-1+\sqrt{4a^2-4a+1}=0$ имеет ровно три различных корня. Найдите эти корни. Отв. $a\in[-2;-1)\cup(0;0{,}5]\Rightarrow$ $\exists 3$ *различных корня.* *Подсказка: сведите задачу к исследованию квадратного уравнения.*	
113. При каких значениях а уравнения $2x+7=3;$ $x^2-(2a-1)x-2=0$ имеют общий корень? Отв.1,5.	При каких значениях а уравнения $3x-7=2;$ $ax^2+3x-1=0$ имеют общий корень? Отв. $\frac{8}{9}$	При каких значениях а уравнения $(1-a)x^2-6ax-1=0;$ и $ax^2-x+1=0$ имеют общий корень? Отв. $a\in\left\{0;-\frac{3}{4};\frac{2}{9}\right\}.$	При каких значениях параметра *a* уравнения *22x⁴ + 33x³ - 16ax² - 3x + 2 = 0* и *11x⁴ + 33x³ + 21x² - 2ax - 2 = 0* имеют общие корни? Найдите эти корни. Ответ: $a=\frac{3}{16}\Rightarrow x=-\frac{1}{2};$ $a=\frac{297}{128}\Rightarrow x=-\frac{1}{4};$ $a=\frac{3}{2}\Rightarrow x_1=-2;x_{2,3}=\pm\frac{1}{\sqrt{11}};$ *Подсказка:с помощью алгебраических преобразований приведите систему уравнений к уравнению* $(8x^2+6x+1)(3-2a)=0$
114. При каких значениях а уравнения	При каких значениях а уравнения $x^2+3x+a=0;$ $2x^2+x+a-7=0$	При каких значениях а уравнения $x^2-x-2=0;$ $ax^2+2x-1=0$	При каких значениях а уравнения $x^2+2x+a=0;$ $3x^2+x+a-1=0$ имеют общий корень?

$x^2+2x-3=0;$ $ax^2-x-1=0$ имеют общий корень? Отв. $\frac{-2}{9};2$.	имеют общий корень? Отв. $\frac{-14}{9};4$.	имеют общий корень? Отв. $\frac{-3}{4};3$.	Отв. $\frac{3}{4};-3$.
115. В уравнении $x^2+px-30=0$ один из корней равен 6. Чему равен другой корень и коэффициент р? Отв.-5;-1.	В уравнении $x^2+px-18=0$ один из корней равен 9. Чему равен другой корень и коэффициент р? Отв.2;7.	Найдите все целые значения n, при которых уравнение $\frac{4x}{x^2+1}=n$ имеет единственное решение. Отв.0;-2; 2.	Найдите все целые значения n, при которых уравнение $\frac{8x}{x^2+4}=n$ имеет единственное решение.
116. При каких значениях параметра а ровно один из корней уравнения $x^2+(a+3)x+\|a\|-3=$ равен нулю. Отв.3.	При каких значениях параметра а ровно один из корней уравнения $x^2+(a-5)x+\|a\|-5=0$ равен нулю. Отв.-5.	При каких значениях параметра а корни уравнения $5x^2+(a^2+4a)x+a+1=0$ равны по модулю, но противоположны по знаку? Отв.-4.	При каких значениях параметра а корни уравнения $4x^2+(2\|a\|-1)x+a^2-a=0$ равны по модулю, но противоположны по знаку? Отв.0,5.
117. При каких значениях параметра а оба корня уравнения равны нулю? $x^2+(16-a^4)x+a^3+8=0$ Отв.-2.	При каких значениях параметра а оба корня уравнения равны нулю? $x^2+(a^2-1)x+2a^2-a-1=0$ Отв.1.	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $a^2-2ax-8x^2-4a+4x+12\|x\|=0$ имеет ровно 4 различных корня. Ответ: при $a\in\left(0;\frac{4}{3}\right)\cup\left(\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)\cup\left(\frac{8}{3};4\right)$ уравнение имеет 4 различных корня.	
118. Для каждого значения параметра а определите количество корней уравнения $(ax^2+3x-2)(3x-1)=0$. Отв. При $a\in\left(-\infty;-\frac{9}{8}\right)$ 1 к.	Для каждого значения параметра а определите количество корней уравнения $(2x+1)(ax^2+2x-3)=0$. Отв. При $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$ 1 к.	Определите количество корней уравнения в $x^4+2ax^2-x+a^2+a=0$ зависимости от значений параметра а. Отв.при а<-0,75 -4к; При а=-0,75 -3к; При -0,75<а<0,25- 2 к;	Определите количество корней уравнения в $x^4-2x^3-4x^2+10x-5-2ax+6a-a^2=0$ зависимости от значений параметра а. Отв.при $a\in\{0;1;4;5\}$ -3к; При $a\in(0;1)\cup(1;4)\cup(4;5)$-4к; При а<0,а>5 – 2к.

При $a \in \left\{-\frac{9}{8};0;9\right\}$ 2 к. При $a \in \left(-\frac{9}{8};0\right) \cup (0;9)(9;+\infty)$ 3корня.	При $a \in \left\{\frac{-1}{3};0;16\right\}$ 2 к. При $a \in \left(-\frac{1}{3};0\right) \cup (0;16) \cup (16;+\infty)$ 3корня.	При а=0,25 – 1к; При а>0,25-нет корней.	
119. При каких значениях параметров а, в и с уравнение $2x^2 + 2(a + b)x + bc + ac - 0{,}5c^2 = 0$ имеет решение? Отв. $\left(a+b-c\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\left(a+b-c\left(1-\sqrt{2}\right)\right) \geq 0$	При каких значениях параметров а, в и с уравнение $(x - a)(x - b) = c^2$ имеет решение? Тот же вопрос для уравнения $(x - a)(x - b) = -c^2$ отв. 1) $a,b,c \in R;$ 2) $a,b \in R; -c^2 \in \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right);0\right];$ $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{a-b}{2} \cdot \frac{b-a}{2}$	При каких значениях параметров а, в и с уравнение $(x - a)(x - b) = c^2(2x - a)$ имеет решение? Отв. $a,b,c \in R;$ *Подсказка: рассмотрите разные взаимные расположения парабол и прямых.*	При каких значениях параметров а, в и с уравнение $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ ***имеет решение?*** Отв. $a,b,c \in R;$ Подсказка: покажите, что $D_1 = \frac{1}{2}\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2\right)$
120. Имеет ли квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ действительные корни, если: $c(a + b + c) \leq 0$?	Имеет ли квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ действительные корни, если: $c(4a + 2b + c) \leq 0$?	Имеет ли квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ действительные корни, если: $(a + b + c)(9a + 3b + c) \leq 0$?	Имеет ли квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ действительные корни, если: $(a - b + c)(a + b + c) \leq 0$
121. При каком значении параметра *а* корни уравнения $3x^2 + 5(a - 2)x - 1 = 0$ равны по модулю? Когда корни равны?	При каком значении параметра *а* корни уравнения $x^2 + (a^2 - 4a - 5)x + a = 0$ равны по модулю?	При каком значении параметра *а* корни уравнения $x^2 + (a^2 - 4a - 5)x + a + 1 = 0$ равны по модулю?	При каком значении параметра *а* корни уравнения относительно *х* $x^2 + (a^2 - a - 6)x + 2a = 0$ равны по модулю? Когда корни равны?
122. При каких значениях параметра а уравнение относительно х $(a^2 - 7a + 12)x^2 + (a^2 + a - 12)x + (a^2 - 8a + 15) = 0$ имеет более двух корней?	При каких значениях параметра а уравнение относительно х $(a^2 - 6a + 8)x^2 + (a^2 - 4)x + (10 - a^2 - 3a) = 0$ имеет более двух корней? Отв.2.	При каких значениях параметра а уравнение относительно х $(a^2 - a - 2)x^2 + (a^2 - 1)x + (5 + 4a - a^2) = 0$ имеет более двух корней? Отв.-1.	При каких значениях параметра а уравнение относительно х $(a^2-1)x^2 + (a^3-1)x + (a^4-1) = 0$ имеет более двух корней? Отв.1.
123. При каких значениях а уравнение $4x^2 + 2x - a = 0$	При каких значениях а уравнение $3x^2 - 4x + a = 0$ имеет единственный корень?	При каких значениях а уравнение $x^3 + 6x^2 + ax = 0$ имеет два корня? Найдите эти	При каких значениях а уравнение $4x^3 + 4x^2 + ax = 0$ имеет два корня? Найдите эти

имеет единственный корень? (Отв.-0,25)	(Отв. $\frac{4}{3}$)	корни. (Отв.а=9; 0 и -3)	корни. (Отв.а=1; 0и -0,5)
124. При каких значениях а уравнение $(a-3)x^2+(a-4)x+(a-5)=0$ имеет единственный корень? Отв. $a \in \left\{3; 4 \pm \frac{\sqrt{12}}{3}\right\}$	При каких значениях а уравнение $(a-2)x^2+(a-3)x+(a-4)=0$ имеет единственный корень? (Отв.)	При каких значениях а уравнение $ax^2-2x+\frac{1}{3}=0$ имеет единственный корень? (Отв.0;3)	При каких значениях а уравнение $(a-1)x^2+x+5=0$ имеет единственный корень? (Отв.1; $\frac{21}{20}$)
125. При каких значениях а уравнение $ax^2+2x+1=0$ имеет единственный корень? (Отв.0;1)	При каких значениях а уравнение $(2-a)x^2-x-4=0$ имеет единственный корень? (Отв.2; $\frac{33}{16}$)	При каких значениях а уравнение $2x-5-ax^2=0$ имеет единственный корень? (Отв.0; $\frac{1}{5}$)	При каких значениях а уравнение $6-2x-(2-3a)x^2=0$ имеет единственный корень? (Отв. $\frac{2}{3}$; $\frac{13}{18}$)
126. Решите уравнение $y^2-xy-2x^2-13=0$ в целых числах. *Подсказка: можно получить разложение уравнения* $(y+x)(y-2x)=13$ и далее рассмотреть все разложения 13 в произведение двух целых чисел.	Решите уравнение $y^2-x^2+3=0$ в целых числах. *Подсказка: можно получить разложение уравнения* $(y-x)(y+x)=-3$ и далее рассмотреть все разложения -3 в произведение двух целых чисел.	Решите уравнение $x^2+xy-5=0$ в целых числах. *Подсказка:как можно получить разложение уравнения :* $x(y+x)=5$ и далее рассмотреть все разложения 5 в произведение двух целых чисел.	Решите уравнение $x^2-2xy-3y^2+11=0$ в целых числах. *Подсказка:как можно получить разложение уравнения* $(y+x)(x-3y)=-11$ и далее рассмотреть все разложения 11 в произведение двух целых чисел.
127. Решите уравнение $x^2-3xy+2y^2-4=0$ в целых числах. *Подсказка:как можно получить разложение уравнения* $(x-2y)(x-y)=4$ и далее рассмотреть все разложения 4 в произведение двух целых чисел.	Решите уравнение $4y^2-x^2+5=0$ в целых числах. *Подсказка:как можно получить разложение уравнения* $(2y-x)(2y+x)=-5$ и далее рассмотреть все разложения -5 в произведение двух целых чисел.	Решите уравнение $x^2+2x-y^2-2=0$ в целых числах. *Подсказка:как можно получить разложение уравнения* $(x+1-y)(x+1+y)=3$ и далее рассмотреть все разложения 3 в произведение двух целых чисел.	Решите уравнение $y^2-4x^2-2y+4=0$ в целых числах. *Подсказка:как можно получить разложение уравнения* $(y-1-2x)(y-1+2x)=-3$ и далее рассмотреть все разложения -3 в произведение двух целых чисел.
128. Решите уравнение $x^2+2x-y^2-2y+3=$ в целых числах. *Подсказка:как можно получить разложение уравнения* $(x+1-y-1)(x+1+y+1)=$ и далее рассмотрите все разложения -3 в произведение двух целых чисел	Решите уравнение $x^2+2x+2(x+1)y-3y^2+4$ в целых числах. *Подсказка:выделите разность квадратов в уравнении* $(x+1+y)^2-(4y)^2=-4$ и далее рассмотреть все разложения -4 в произведение двух целых чисел	Решите уравнение $x^2-yx-y-4=0$ в целых числах. *Подсказка:как можно получить разложение уравнения* $(x+1)(x-1-y)=5$ и далее рассмотрите все разложения 5 в произведение двух целых чисел	Решите уравнение $x^2-yx+2x+2=0$ в целых числах. *Подсказка:из уравнения выражаем* $y=x+2+\frac{2}{x}, x \in \{\pm 1; \pm 2\}$
129. Решите уравнение $y^2-yx+x+1=0$ в целых числах.	Решите уравнение $-2x^2+yx+5x-2y-3=0$ в целых числах. *Подсказка:из уравнения*	Решите уравнение $-x^2+3yx+3x-6y-3=0$ в целых числах. *Подсказка:*	Решите уравнение $-2x^2-3yx+4x-3y=0$ в целых числах. *Подсказка:* .

Подсказка: можно получить разложение уравнения $(y-1)(y+1-x)=-2$ и далее рассмотрите все разложения -2 в произведение двух целых чисел	*выражаем* $y=2x-1+\frac{1}{x-2},(x-2)\in\{-1;1\}$.	$(x-2)(3y-x+1)=1$. 2-ой способ: через дискриминант.	Дискриминант кв. ур. Равен $9y^2+16$, он является полным квадратом только при $y\in\{0;\pm1\}$.
130. Решите уравнение $x^2+yx-5x+2y+5=0$ в целых числах. *Подсказка:из уравнения выражаем* $y=-x+7-\frac{19}{x+2},(x+2)\in\{\pm1;\pm19\}$.	Решите уравнение $2y^2+2yx-2x-3y=0$ в целых числах. *Подсказка:* . Дискриминант кв. ур. Равен $(2x+1)^2+8$, он является полным квадратом только при $x\in\{0;-1\}$. 2-й способ:выразить х через у.	Решите уравнение $x^2+yx-x-y-7=0$ в целых числах. *Подсказка:из уравнения выражаем* $y=-x+\frac{7}{x-1},(x-1)\in\{\pm1;\pm7\}$.	Решите уравнение $-2y^2+yx+x-2y-5=0$ в целых числах. *Подсказка: можно получить разложение уравнения* $(x-2y)(y+1)=5$ и далее рассмотрите все разложения 5 в произведение двух целых чисел
131. Решите в целых числах уравнение $p^2+pq+q^2=7$ Подсказка: D<0, поэтому выделяем полные квадраты по переменным, но сначала удобно умножить уравнение на 4. 28 можно представить в виде суммы квадрата и утроенного квадрата тремя способами: $1^2+3\cdot3^3=5^2+3\cdot1^3==4^2+3\cdot2^3$, всего получим 12 решений.	Решите в целых числах уравнение $21p^2+pq-2q^2=19$ *Подсказка*: найдите корни кв.ур.относительно р $21p^2+pq-2q^2=0$ и разложите левую часть уравнения на множители: $(3p+q)(7p-q)=19$ (можно группировкой получить этот результат).	Решите в целых числах уравнение $5p^2-2pq+2q^2-2p-2q-3=0$ *Подсказка*: квадратное уравнение относительно р имеет дискриминант, который положителен только при целых $q\in\{0;1;2\}$.Отв.(1;0); (1;2).	Решите в целых числах уравнение $4p^2+q^2-12p+2q+5=0$. Подсказка: D<0, поэтому выделяем полные квадраты по переменным $(2p-3)^2+(q+1)^2=5$ Число 5 можно двумя способами представить в виде суммы двух квадратов: $1^2+2^2=2^2+1^2$. Перебор дюжины случаев приведёт к ответу: 2 1 2 1 P 1 1 -3 -3 q
132. (МФТИ 1998) Найдите все целые значения х,у, при которых справедливо уравнение $x^3-6x^2-xy+13x+3y+7=0$. Ответ: $(2;17);(4;27);(-16;307);(22;423)$. *Подсказка: выразите у через х и рассмотрите случаи, когда остаток в алгебраической дроби*	(МФТИ 1998) Найдите все целые значения х,у, при которых справедливо уравнение $x^3-xy-7x+2y+23=0$. Ответ: $(1;-17);(3;29);(-15;191);(19;397)$. *Подсказка: выразите у через х и рассмотрите случаи, когда остаток в алгебраической дроби принимает целые значения.*	(МФТИ 1998) Найдите все целые значения х,у, при которых справедливо уравнение $x^3-x^2-xy-17x-3y+8=0$ Ответ: $(-20;30);(-4;4);(-26;774);(20;316)$. *Подсказка: выразите у через х и рассмотрите случаи, когда остаток в алгебраической дроби принимает целые значения.*	(МФТИ 1998) Найдите все целые значения х,у, при которых справедливо уравнение $x^3-3x^2-xy-8x-2y+27=0$ Ответ: $(-1;31);(-3;3);(-25;75);(21;339)$. *Подсказка: выразите у через х и рассмотрите случаи, когда остаток в алгебраической дроби принимает целые значения.*

принимает целые значения.			
133. (МФТИ).Найдите все пары целых чисел, при которых является верным равенство $3xy+16x+13y+61=0$ Отв. $(-6;-7);(-4;3);(4;-5)$ *Краткий конспект решения.*Попытка разложить левую часть в виде $(3x+a)(by+c)=$ и $3bxy+3cx+aby+ac$ приравнять соответствующие коэффициенты, приводит к дробным значениям $c=\frac{16}{3}$.Это подсказка, что надо умножить уравнение на 3, тогда гипотеза $(3x+b)(3y+d)=$ $=9xy+3dx+3by+bd$ находит своё подтверждение при $d=16;b=13.$ Уравнение примет вид $(3x+13)(3y+16)=25$.Далее раскладываем 25 в произведение двух целых чисел и решеаем дюжину систем…Можно оптимизировать вычисления, рассматривая в уравнении $(3x+13)=\frac{25}{(3y+16)}$ целые делители 25: $(3y+16)\in\{\pm1;\pm5;\pm25\}$ Получаем 6 систем: 1) $\begin{cases}3y+16=-1;\\3x+13=-25;\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing.$ 2) $\begin{cases}3y+16=1;\\3x+13=25;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4;\\y=-5.\end{cases}$ 4) $\begin{cases}3y+16=-5;\\3x+13=-5;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-6;\\y=-7.\end{cases}$ 5) $\begin{cases}3y+16=25;\\3x+13=1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4;\\y=3.\end{cases}$	(МФТИ).Найдите все пары целых чисел, при которых является верным равенство $-3xy-10x+13y+35=0$ Отв. $(6;-5);(4;5);(-4;-3)$ *Подсказка.Умножим на -1* $3xy+10x-13y-35=0$ Попытка разложить левую часть в виде $(3x+a)(y+b)=$ и $3xy+3bx+ay+ab$ приравнять соответствующие коэффициенты, приводит к дробным значениям $b=\frac{10}{3}$.Аналогично, с $(x+a)(3y+b)=$ $3xy+bx+3ay+ab$ получаем дробный коэффициент $a=-\frac{13}{3}$. Это подсказка, что надо умножить уравнение на 3, тогда гипотеза $(3x+a)(3y+b)=$ $=9xy+3bx+3ay+ba$ находит своё подтверждение при $a=-13;b=10.$ Уравнение примет вид $(3x-13)(3y+10)=-25$. И далее, как в предыдущем примере.	(МФТИ).Найдите все пары целых чисел, при которых является верным равенство $3xy+19x+10y+55=0$ Отв. $(-5;-8);(-3;2);(5;-6)$	(МФТИ).Найдите все пары целых чисел, при которых является верным равенство $-3xy+10x-16y+45=0$ Отв. $(-7;5);(-5;5);(3;3)$
134. (МГУ 1989) Найдите все целые значения x,y, при которых справедливо уравнение	(МГУ 1989) Найдите все целые значения x,y, при которых справедливо уравнение		(МГУ 1989) Найдите все целые значения x,y, при которых справедливо

$9x^2y^2+6xy^2-9x^2y+$ $+2x^2+y^2-18xy+7x-5y+6=0$. Отв. $(0;2);(-2;0);(2;1);(0;3)$. *Подсказка: рассмотрите уравнение как квадратное относительно y с параметром x.*	$9x^2y^2+9xy^2+6x^2y+$ $+x^2+2y^2+18xy+5x+7y+6=0$. Отв. $(-3;0);(-2;0);$ $(0;-2);(-1;2)$. *Подсказка: рассмотрите уравнение как квадратное относительно x с параметром y.*		уравнение $15x^2y^2+28xy^2-8x^2y+$ $+x^2+5y^2-38xy+8x-24y+16=0$. Отв. $(0;4);(-4;0)$. *Подсказка: рассмотрите уравнение как квадратное относительно x с параметром y.*
135. При каких значениях параметра **a** уравнение $(a-2)x^2+x+1=0$ имеет: а) 2 различных корня? Найдите эти корни. Б) 1 корень? Укажите его. В) не имеет корней. Г) не имеет неотрицательных корней. Отв. ед.р.2; 2,25	При каких значениях параметра **a** уравнение $(2a-5)x^2-2(a-1)x+3=0$ имеет: а) 2 различных корня? Найдите эти корни. Б) 1 корень? Укажите его. В) не имеет корней. Г) не имеет неотрицательных корней. Отв. два разл.р. $a\neq 2{,}5; a\neq 4$	При каких значениях параметра **a** уравнение $(a-3)x^2+x+2=0$ имеет: а) 2 различных корня? Найдите эти корни. Б) 1 корень? Укажите его. В) не имеет корней. Г) не имеет неотрицательных корней. В) не имеет корней.	При каких значениях параметра **a** уравнение $(3a-1)x^2-2(a+1)x-1=0$ имеет: а) 2 различных корня? Найдите эти корни. Б) 1 корень? Укажите его. В) не имеет корней. Г) не имеет неотрицательных корней.
136. Дана функция $f(x)=(a+3)x^2-a^2x-5$ Решите уравнение $f(x)=f(1)$, если известно, что $f(2)=9$. Отв.а=1;х=1,х=-0,75	Дана функция $f(x)=(a-2)x^2-a^2x+6$ Решите уравнение $f(x)=f(1)$, если известно, что $f(-2)=-4$ Отв.а=1;х=1,х=-0,75		
137. При каких значениях а уравнение $x^2-18x+100=a$ имеет корни? Приведите пример целого положительного а, при котором выполнено это условие. **При каких а корней нет?** Отв. $a\in E(f)=[19;+\infty)$	При каких значениях а уравнение $-x^2+12x-21=a$ имеет корни? Приведите пример целого отрицательного а, при котором выполнено это условие. **При каких а корней нет?** (Отв. $a\in E(f)=(-\infty;15]$	При каких значениях а уравнение $x^2+ax+2=0$ имеет корни? Приведите пример целого положительного а, при котором выполнено это условие. **При каких а корней нет?**	При каких значениях а уравнение $3x^2+ax+1=0$ имеет корни? Приведите пример целого отрицательного а, при котором выполнено это условие. **При каких а корней нет?**

138. Найдите все значения параметра **а**, при которых уравнение $ax^2+2(a+1)x+2a=0$ имеет: а) 2 различных корня? Найдите эти корни. Б) 1 корень? Укажите его. В) не имеет отрицательных корней. Г) имеет только положительные корни. Д) не имеет корней.	Найдите все значения параметра **а**, при которых уравнение $(1-a)x^2+2(a+2)x+2a+1=0$ имеет: а) 2 различных корня? Найдите эти корни. Б) 1 корень? Укажите его. В) не имеет отрицательных корней. Г) имеет только положительные корни. Д) не имеет корней. *Подсказка:см. Примеры.*	Найдите все значения параметра **а**, при которых уравнение $(a-2)x^2+2(a-1)x+2a-1=0$ имеет: а) 2 различных корня? Найдите эти корни. Б) 1 корень? Укажите его. В) не имеет отрицательных корней. Г) имеет только положительные корни. Д) не имеет корней. *Подсказка:см. Примеры.*	Найдите все значения параметра **а**, при которых уравнение $ax^2+2(a-3)x-1+2a=0$ имеет: а) 2 различных корня? Найдите эти корни. Б) 1 корень? Укажите его. В) не имеет отрицательных корней. Г) имеет только положительные корни. Д) не имеет корней. *Подсказка:см. Примеры.*
139. Найдите все значения параметра **а**, при которых уравнение $x^4+ax^2+a^2-1=0$ имеет единственное решение. Отв.1, проверьте необходимость и достаточность!!!	Найдите все значения параметра **а**, при которых уравнение $x^4+ax^2+a^2-9=0$ имеет единственное решение. Отв.3, проверьте необходимость и достаточность!!!	Найдите все значения параметра **а**, при которых уравнение $x^4+ax^2+a^2-16=0$ имеет единственное решение. Отв.4, проверьте необходимость и достаточность!!!	Найдите все значения параметра **а**, при которых уравнение $x^4+ax^2+a^2-25=0$ имеет единственное решение. Отв.5, проверьте необходимость и достаточность!!!
140. Найдите все значения параметра *а*, при которых уравнение $x^3-2ax^2-(2a-3)x=0$ имеет три различных корня. Отв. $(-\infty;-3)\cup(1;1.5)\cup(1,5;+\infty)$	Найдите все значения параметра *а*, при которых уравнение $x^3-2ax^2-(2a-4)x=0$ имеет три различных корня. Отв.	Найдите все значения параметра *а*, при которых уравнение $(ax^2+3x-2)(3x-1)=0$ имеет три различных корня. Отв. При $a\in\left(-\frac{9}{8};0\right)\cup(0;9)(9;+\infty)$ 3корня.	Найдите все значения параметра *а*, при которых уравнение $(2x+1)(ax^2+2x-3)=0$ имеет три различных корня. Отв. При $a\in\left(-\frac{1}{3};0\right)\cup(0;16)\cup(16;+\infty)$ 3корня.
141. Найдите все значения параметра *а*, при которых уравнение $\left(x^2-(3a+1)x+2a^2+a\right)\cdot\left(x^2+(2a-1)x-3a^2+a\right)=$ имеет три различных корня. Отв. а любое, кроме: $a\neq-1;0;0,25.$	Найдите все значения параметра *а*, при которых уравнение $\left(x^2-(3a-1)x+2a^2-a\right)\cdot\left(x^2-(4a+1)x+3a^2+a\right)=0$ имеет три различных корня. Отв. а любое, кроме: $a\neq-2;-0,5;1.$	При каких значениях а уравнение $x^3+6x^2+ax=0$ имеет три различных корня? Найдите эти корни. (Отв.)	При каких значениях а уравнение $4x^3+4x^2+ax=0$ имеет три различных корня? Найдите эти корни.

142. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $(x-a)(x^2-5x+4)=0$ имеет три различных корня, образующие в некотором порядке: 1)арифметическую прогрессию; 2)геометрическую прогрессию. Отв. корни различны при $a \neq 1;4$ .1)-2;2,5;7. 2)0,25;2;16.	Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $(x-a)(x^2-10x+9)=0$ имеет три различных корня, образующие в некотором порядке: 1)арифметическую прогрессию; 2)геометрическую прогрессию. Отв. корни различны при $a \neq 1;9$ .1)-7;5;17. 2) $\frac{1}{9}$; 3; 81.	Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $(x-a)(x^2-17x+16)=0$ имеет три различных корня, образующие в некотором порядке: 1)арифметическую прогрессию; 2)геометрическую прогрессию. Выпишите все эти геометрические прогрессии. Отв. корни различны при $a \neq 1;16$.	Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $(x-a)\cdot\left(x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}\right)=0$ имеет три различных корня, образующие в некотором порядке: 1)арифметическую прогрессию; 2)геометрическую прогрессию. Выпишите все эти арифметические прогрессии. Отв. корни различны при $a \neq$.
143. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $x^2+\frac{6x}{\sqrt{\sin a}}+\frac{9\sqrt{3}}{\cos a}+36=0$ имеет единственное решение. Отв. $\frac{\pi}{18}+2\pi n; \frac{13\pi}{18}+2\pi k.$	Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $x^2+\frac{2x}{\sqrt{\sin a}}+\frac{1}{\cos a}+2\sqrt{2}=0$ имеет единственное решение. Отв. $\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{12}+2\pi k.$	Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $x^2+\frac{6x}{\sqrt{\sin a}}+\frac{3\sqrt{3}}{\cos a}+12\sqrt{3}=0$ имеет единственное решение. Отв. $\frac{\pi}{9}+2\pi n; \frac{7\pi}{9}+2\pi k;$ $\frac{2\pi}{3}+2\pi m.$	Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $x^2-\frac{2x}{\sqrt{\sin a}}-\frac{1}{\cos a}-2\sqrt{2}=0$ имеет единственное решение. Отв. $\frac{7\pi}{12}+2\pi k.$
144. Найдите все значения n, при которых уравнение $\frac{4x}{x^2+1}=n$ имеет два решения. *Подсказка: используйте производную для построения графика*	Найдите все значения n, при которых уравнение $\frac{8x}{x^2+4}=n$ имеет два решения.	Уравнение $x^3-a=3x^2$ имеет три различных корня, если **a** принадлежит промежутку… Отв. $(-4;0)$	Уравнение $x^3+a=3x^2$ имеет три различных корня, если **a** принадлежит промежутку… Отв. $(0;4)$
145. Решите уравнение	Решите уравнение	Решите уравнение $(x^2+4x+3)^2+$ $+(x^2-2x-15)^2=$ $=36(x+3)^2$ Отв.	Решите уравнение $(x^2+x-20)^2+$ $+(x^2+8x+15)^2=$ $=25(x+5)^2$

$\frac{\left(x^2+18x+45\right)^2}{5}+$ $+\frac{5\left(2x^2+\frac{14}{5}x-\frac{48}{5}\right)^2}{5}=$ $\frac{\left(x^2+20x+51\right)^2}{5}$ *Подсказка:* первую дробь переносим вправо и раскладываем как разность квадратов. Отв. $x_{1,2}=-3; x_3=0; x_4=3{,}36.$	$\frac{\left(x^2+25x+24\right)^2}{3}+$ $+\frac{3\left(2x^2-\frac{14}{3}x-\frac{20}{3}\right)^2}{5}=$ $\frac{\left(x^2+27x+26\right)^2}{3}$ Отв. $x_{1,2}=-1; x_3=0; x_4=\frac{64}{9}.$	$x_{1,2}=-3; x_3=-1; x_4=5.$ Подсказка: разложите на множители, затем вынесите общий множитель.	Отв. $x_{1,2}=-5; x_3=0; x_4=1.$
146. Решите уравнение $\left(x^2+3x-4\right)^2+$ $+\left(x^2+2x-3\right)^2=$ $=\left(x^2+x-2\right)^2+\left(x^2-1\right)^2.$ Подсказка: разложите на множители, затем вынесите общий множитель $\left(x-1\right)^2$.	Решите уравнение $\left(x^2+4x+3\right)^2+$ $+\left(x^2+3x+2\right)^2=$ $=\left(x^2-x-2\right)^2+\left(x^2-1\right)^2.$ Подсказка: разложите на множители, затем вынесите общий множитель $\left(x+1\right)^2$.	Решите уравнение $\frac{x^4-10x^3+25x^2-81}{2x-5+\sqrt{61}}=0.$ Отв: $x=\frac{5+\sqrt{61}}{2}$. *Подсказка*:выделите в числителе полный квадрат, используйте формулу разности квадратов.	Решите уравнение $\frac{x^4-6x^3+9x^2-64}{2x-3+\sqrt{41}}=0.$ Отв:
147. Решите уравнение $\left(\frac{x-1}{x+5}\right)^2+14\cdot\frac{x^2-1}{x^2-25}-15\cdot\left(\frac{x-1}{x+5}\right)^2=0.$ Подсказка:это однородное уравнение второй степени вида $a^2+14ab-15b^2=0$, оно решается делением на $b^2\neq 0$. $-5\notin ОДЗ$ Отв: $\{-4;-1{,}25;0\}$	Решите уравнение $\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2+13\cdot\frac{x^2-9}{x^2-1}-14\cdot\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2=0.$	Решите уравнение $\frac{x^2}{x+4}+\frac{3x}{x^2-4}-4=0.$ *Подсказка:*сгруппируем слагаемые $\left(\frac{x^2}{x+4}-1\right)+\left(\frac{3x}{x^2-4}-3\right)=0$, вынесем общий множитель $\left(x^2-x-4\right)$. Отв. $\left\{\frac{1\pm\sqrt{17}}{2};\frac{3\pm\sqrt{73}}{2}\right\}$	Решите уравнение $\frac{x^2}{x+3}+\frac{4x}{x^2-3}-5=0.$
148. Дана функция $f\left(x\right)=3x^2+4x-1$.Решите уравнение $f\left(f\left(x\right)+1\right)=63$. Подсказка: $\left(f\left(x\right)+1\right)\in\left\{4;-\frac{16}{3}\right\}$.	Дана функция $f\left(x\right)=3x^2+8x-1$.Решите уравнение $f\left(f\left(x\right)+1\right)=50$. Подсказка: $\left(f\left(x\right)+1\right)\in\left\{3;-\frac{17}{3}\right\}$.	Дана функция $f\left(x\right)=3x-2$.Решите уравнение $f\left(f\left(x^2\right)\right)=-14x$. . Отв: $\left\{-2;\frac{4}{9}\right\}$	Дана функция $f\left(x\right)=2x-3$. Решите уравнение $f\left(f\left(x^2\right)\right)=-9x$. . Отв: -3; 0,75.

Отв: $\left\{-2;\frac{2}{3}\right\}$	Отв: $\left\{-2;\frac{1}{4}\right\}$		
149. Решите уравнение при всех значениях параметра а $x^2-x\left(2a^2-a+2\right)+a^4-$ $-a^3-4a^2-11a-3=0$ отв. $x_1=a^2+2a+3; x_2=a^2-3a-1$	Решите уравнение при всех значениях параметра а $x^4-x^3-2x^2(a+2)-x(11-a)+$ $+a^2-2a-3=0$ отв.1)нет решений при $a<-3{,}25$; 2) $x=0{,}5\left(3\pm\sqrt{13-4a}\right), a\in[-3{,}25;2)$; 3) $x_1=0{,}5\left(3\pm\sqrt{13-4a}\right)$; $x_2=\left(-1\pm\sqrt{a-2}\right), a\geq 2$.	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $a^2-2ax-8x^2-4a+4x+12\lvert x\rvert=0$ имеет ровно 3 различных корня. Ответ: при $a\in\left\{0;\frac{4}{3};\frac{8}{3};4\right\}$ уравнение имеет 3 различных корня.	
150. Решите уравнение $\frac{16}{\lvert x^2-20x\rvert}=\frac{1}{25}-\frac{4}{5x}$. Отв.40.	Решите уравнение $\frac{25}{\lvert x^2-10x\rvert}=\frac{1}{4}-\frac{5}{2x}$. Отв.	Решите уравнение $\frac{x+5}{x(x-1)}+\frac{1}{\lvert x-1\rvert}=\frac{7x-10}{2x}$ Отв.3.	Решите уравнение $\frac{x+6}{x(x-2)}+\frac{3}{\lvert x-2\rvert}=\frac{7x-9}{3x}$ Отв.
151. Решите уравнение $\frac{3}{x^2+8x-20}-\frac{x+3}{x^2+12x+20}=$ $=\frac{1}{x^2-4}$ *Подсказка*: разложите знаменатели на множители.	Решите уравнение $\frac{2}{x^2+8x-48}-\frac{x-1}{x^2+16x+48}=$ $=\frac{1}{x^2-16}$	Решите уравнение $\frac{x^7-4x^5+3x^2-2x-16}{x^7-4x^5+4x^2-3x-22}=1;$ $-2\notin ОДЗ$. Отв.3.	Решите уравнение $\frac{x^7-9x^5+2x^2-2x-24}{x^7-9x^5+3x^2+3x-18}=1;$ Отв.
152. Найдите наименьшее из значений *x*, для которых существуют числа *y,z*, удовлетворяющие уравнению $x^2+2y^2+z^2+xy-xz-yz=1$. *Подсказка*: рассмотрите квадратное уравнение относительно z, затем квадратное неравенство относительно y. Отв. $x_{\min}=-\sqrt{\frac{7}{5}}$	Найдите наибольшее из значений *z*, для которых существуют числа *x,y*, удовлетворяющие уравнению $x^2+2y^2+z^2+xy-xz+yz=3$. *Подсказка*: рассмотрите квадратное уравнение относительно x, затем квадратное неравенство относительно y. Отв. $z_{\max}=\sqrt{7}$	Найдите наименьшее из значений x, для которых существуют числа y, z, удовлетворяющие уравнению $x^2+2y^2+2z^2+xy-xz+yz=2$. *Подсказка*: рассмотрите квадратное уравнение относительно z, затем квадратное неравенство относительно y. Отв. $x_{\min}=-\sqrt{3}$	Найдите наибольшее из значений z , для которых существуют числа x,y, удовлетворяющие уравнению $2x^2+2y^2+z^2+xy+xz+yz=4$. *Подсказка*: рассмотрите квадратное уравнение относительно x, затем квадратное неравенство относительно y. Отв. $z_{\max}=\sqrt{5}$
153. Найдите все значения параметра *a*,	Найдите все значения параметра *a*, при	При каких значениях параметра а разрешимо	При каких значениях параметра а имеет решение уравнение

при которых уравнение $\frac{8x^2-20x+16}{4x^2-10x+7}=a$ относительно x имеет решение? Отв. $a\in\left(2;\frac{14}{3}\right]$.	которых уравнение $\frac{6x^2-2x+1}{9x^2-3x+1}=a$ относительно x имеет решение? Отв. $a\in\left(\frac{2}{3};\frac{10}{9}\right]$.	уравнение $\frac{8x^2-4x+3}{4x^2-2x+1}=a$ относительно x? Отв. $a\in\left(2;\frac{10}{3}\right]$.	$\frac{3x^2-4x+8}{9x^2-12x+16}=a$? Отв. $a\in\left(\frac{1}{3};\frac{5}{9}\right]$.
154. Пусть x_0- больший из корней уравнения $x^2+2(a-b-3)x+a-b-13=0$. Найдите наибольшее значение x_0, если $a\ge 2$, $b\le 1$. Отв. 6. *Подсказка:* перепишем уравнение так: $x^2+2cx+c-10=0$, где $c=a-b-3\ge -2$ из условия. Больший корень уравнения $x_2(c)=-c+\sqrt{c^2-c+10}$ является монотонно убывающей функцией аргумента с, $c\in[-2;+\infty)$, не имеющей критических точек, следовательно, $x_{2\max}(-2)=6$. 2-ой способ: $c=\frac{10-x^2}{2x+1}\ge -2 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-2$ $\cup(-0{,}5;6]\Rightarrow x_{\max}=6$.	Пусть x_0- больший из корней уравнения $x^2+(3ab+3a-2)x+5ab+5a-17=0$. Найдите наибольшее значение x_0, если $a\ge 1; b\ge 0$ отв.3. *Подсказка:покажите, что* $c=ab+a\ge 1,$ $x^2+(3c-2)x+5c-17=0,$ $x_2(c)=\frac{2-3c+\sqrt{9c^2-32c+72}}{2}$ – монотонно убывающая функция, след. $x_{2\max}(1)=3.$ 2-ой способ:	Пусть x_0- больший из корней уравнения $x^2+(6a-3b-1)x+4a-2b+14=0$. Найдите наибольшее значение x_0, если $a\ge -1; b\le 0$. Отв. 5. *Подсказка:покажите, что* $c=2a-b\ge -2,$ $x^2+(3c-1)x+2c+14=0,$ $x_2(c)=\frac{1-3c+\sqrt{9c^2-14c-55}}{2}$ – монотонно убывающая функция, след. $x_{2\max}(-2)=5.$ 2-ой способ:	Пусть x_0- больший из корней уравнения $x^2+2(ab-a-1)x+3ab-3a-14=0$. Найдите наибольшее значение x_0, если $a\ge 1; b\ge 3$. Отв.2.
155. Найдите все значения параметра $a\in(-1;1)$, для каждого из которых выражение $1-2\sqrt{x^2-2axy+y^2-6y+1}$ принимает наибольшее значение лишь при одной паре чисел x, y. *Краткий конспект решения:* ММЗ:при каких а квадратное уравнение относительно у $x^2-2axy+y^2-6y+10=$ справедливо лишь для одной пары (x,y)? $D(x,a)=0\Leftrightarrow x^2(a^2-1)+6ax-$ При	Найдите все значения параметра $a\in(-1;1)$ для каждого из которых выражение $1-2\sqrt{4x^2+4axy+y^2+8y+18}$ принимает наибольшее значение лишь при одной паре чисел x, y. Отв. При $a=\pm\frac{1}{3}$ данное выражение принимает наибольшее значение, равное 1 лишь при одной паре чисел $x=\frac{3}{4}; y=-\frac{9}{2}.$ $y^2+y(4ax+8)+4x^2+18$	Для каждого значения параметра а , $a\in(0;2)$ найдите наименьшее значение выражения $x^2+y^2-2a(x+y)$, при условии $\cos\left(\frac{\pi xy}{2}\right)=1$. Отв. $-a^2$	

$a=\pm\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \exists!x=\frac{\sqrt{10}}{3}$; у отв. При $a=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$ данное выражение принимает наибольшее значение, равное 1.	$D(x,a)=0 \Leftrightarrow 2x^2\left(a^2-1\right)+8ax-1=$ $a=\pm\frac{1}{3}$.		
156. Найдите все значения параметра а, для которых при каждом значении переменной х из отрезка $[-4;-1]$ значение выражения $4x^2+16x+9$ не равно значению выражения ах. *Подсказка*: рассмотрите взаимное расположение графиков $y=(2x+4)^2$ и $y=ax+7$ на отрезке $[-4;-1]$. Отв. $a<-2{,}25; a>4$.	Найдите все значения параметра а, для которых при каждом значении переменной х из отрезка $[-1;2]$ значение выражения $4x^2-8x-3$ не равно значению выражения $-4\|x-a\|$. *Подсказка*: рассмотрите взаимное расположение графиков $4x^2-8x-3$ и $y=-4\|x-a\|$ на отрезке $[-1;2]$. Отв. $a<-1; a>3$.	Найдите все значения параметра а, для которых при каждом значении переменной х из отрезка $[-4;-1]$ значение выражения $4x^2+16x+9$ не равно значению выражения ax^2. *Подсказка*: рассмотрите взаимное расположение графиков $y=(2x+4)^2-8$ и $y=ax^2$ на отрезке $[-4;-1]$. Отв. $a<-4; a>0{,}5$.	Найдите все значения параметра а, для которых при каждом значении переменной х из отрезка $[-1;1]$ значение выражения x^2-2x-1 не равно значению выражения $-(x-a)^2$. *Подсказка*: рассмотрите взаимное расположение графиков $y=(x-1)^2-2$ и $y=-(x-a)^2$ на отрезке $[-1;1]$. Отв. $a<-; a>1+\sqrt{2}$.
157. Найдите все значения параметра *а*, при которых уравнение $\frac{x}{a(x+1)}-\frac{2}{x+2}=\frac{3-a^2}{a(x+1)(x+2)}$ имеет единственное решение. Отв.-3;-2;1;2.	Найдите все значения параметра *а*, при которых уравнение $1-\frac{3}{x+a-1}=\frac{5a}{(x+a-1)(x+1)}$ имеет единственное решение. Отв.-5;-3;0.	Решите уравнение $\frac{n^2-k^2}{k^2+x^2-2kx}=1-\frac{2k}{x-k}$ при всех значениях параметров n,k. Отв. $x\in\{2k+n;2k-n\}, n\neq\pm k$; $x=3k, n=\pm k$.	Решите уравнение $\frac{x^2+1}{a^2x-2a}-\frac{x}{a}=\frac{1}{2-ax}$ при всех значениях параметра а. Отв. $x\in\left\{-1;\frac{a+1}{a-1}\right\}, a\neq 1$; $x=-1, a=1$.
158. Найдите все значения параметра а , при которых уравнение $x\|x+2a\|+1-a=0$ имеет единственное решение. Найдите эти решения. Отв. $a<\frac{\sqrt{5}-1}{2}; a>1$.	Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2+4x-2\|x-a\|+2-a=0$ имеет ровно два различных решения. Найдите эти решения. Отв. $a<-\frac{7}{3}; a>-2$.	Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x\|x-2a\|-1-a=0$ имеет единственное решение. Найдите эти решения. отв. $a\in\left(-1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$	Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2-4x-2\|x-2a\|+2+a=0$ имеет ровно два различных корня. Найдите эти решения. отв. $a<2; a>\frac{7}{3}$.
159. Найдите все	Найдите все значения	Найдите все значения	Найдите все значения

значения параметра а, при каждом из которых уравнение $a^2-2ax-8x^2-4a+4x+12\|x\|=0$ имеет ровно 4 различных корня. Ответ: при $a\in\left(0;\frac{4}{3}\right)\cup\left(\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)\cup\left(\frac{8}{3};4\right)$ уравнение имеет 4 различных корня. *Подсказка*: $a_{1,2}=x-3\|x\|+4=\begin{cases}4x+4, x\le 0;\\ 4-2x, x\ge 0.\end{cases}$ $a_{3,4}=x+3\|x\|=\begin{cases}-2x, x\le 0;\\ 4x, x\ge 0.\end{cases}$	параметра а, при каждом из которых уравнение $a^2+4ax-5x^2-7a-14x+21\|x\|=0$ имеет ровно 4 различных корня. Ответ: при $a\in\left(0;\frac{7}{6}\right)\cup\left(\frac{7}{6};\frac{35}{6}\right)\cup\left(\frac{35}{6};7\right)$ уравнение имеет 4 различных корня. *Подсказка*: вычислите дискриминант уравнения относительно а. $a_1=7-2x-3\|x\|;$ $a_2=3\|x\|-2x;$	параметра а, при каждом из которых уравнение $a^2-2ax-8x^2-4a+4x+12\|x\|=0$ имеет ровно 2 различных корня. Ответ: при $a\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$ уравнение имеет 2 различных корня. *Подсказка*: $a_{1,2}=x-3\|x\|+4=\begin{cases}4x+4, x\le 0;\\ 4-2x, x\ge 0.\end{cases}$ $a_{3,4}=x+3\|x\|=\begin{cases}-2x, x\le 0;\\ 4x, x\ge 0.\end{cases}$	параметра а, при каждом из которых уравнение $a^2+4ax-5x^2-7a-14x+21\|x\|=0$ имеет ровно 2 различных корня. Ответ: при уравнение имеет 2 различных корня. *Подсказка*: вычислите дискриминант уравнения относительно а. $a_1=7-2x-3\|x\|;$ $a_2=3\|x\|-2x;$
160. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\|a^2+x^2-5x-9a\|=x+a$ имеет ровно 3; имеет ровно 4 различных корня. Ответ: при $a\in\{4-\sqrt{20};0;2;4+\sqrt{20}\}$ уравнение имеет 3 различных корня. При $a\in(4-\sqrt{20};0)\cup\left(\frac{8}{3};4+\sqrt{20}\right)$ уравнение имеет 4 различных корня.	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\|a^2+x^2-5x-9a\|=x+a$ имеет ровно 2 корня; ровно 1 корень. Ответ: при $a\in(5-\sqrt{34};4-\sqrt{20})\cup(0;2)\cup$ $\cup(4+\sqrt{20};5+\sqrt{34})$ уравнение имеет 2 различных корня. При $a\in\{5+\sqrt{34};4-\sqrt{20}\}$ уравнение имеет 1 корень.	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\|a^2+x^2-3x-7a\|=a-x$ имеет ровно 3; имеет ровно 4 различных корня. Ответ: при $a=3+\sqrt{13}$ уравнение имеет 3 различных корня. При $a\in(5;3+\sqrt{13})$ уравнение имеет 4 различных корня.	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\|a^2+x^2-3x-7a\|=a-x$ имеет ровно 2 корня; ровно 1 корень. Ответ: при $a\in(0;5)\cup(3+\sqrt{13};4+\sqrt{17})$ уравнение имеет 2 различных корня. При $a=4+\sqrt{17}$ уравнение имеет 1 корень.
161. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $a^2+x^2-4a-6x=\|2a-4x\|$ имеет ровно 4	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $a^2+x^2-4a-6x=\|2a-4x\|$ имеет ровно 3 различных	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $a^2+x^2-8a-2x=\|2a+6x\|$ имеет: 1)ровно 1корень;	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $a^2+x^2-8a-2x=\|2a+6x\|$ имеет: 1)ровно 3 различных корня;

различных корня. Ответ: при $a \in \left(5{,}6;\,1+\sqrt{26}\right)$ уравнение имеет 4 различных корня.	корня. Ответ: при $a = 5{,}6$ уравнение имеет 3 различных корня.	2) ровно 2 различных корня. Ответ: при $a \in \left\{5-\sqrt{41};5+\sqrt{41}\right\}$ уравнение имеет 1 корень; при $a \in \left(5-\sqrt{41};3-\sqrt{13}\right)\cup\left(0;5+\sqrt{41}\right)$ уравнение имеет 2 различных корня .	2) ровно 4 различных корня. Ответ: при $a \in \left\{3-\sqrt{13};0\right\}$ уравнение имеет 3 корня; при $a \in \left(3-\sqrt{13};0\right)$ уравнение имеет 4 различных корня .
162. **(ЕГЭ 2019).** Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\dfrac{x^2-4x+a}{4x^2-6ax+a^2}=0$ имеет ровно два различных решения. (Решите уравнение двумя способами). Ответ: при $a \in (-\infty;-5)\cup(-5;0)\cup(0;3)\cup(3;4)$ уравнение имеет два различных решения.	**(ЕГЭ 2019).** Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\dfrac{\lvert 3x\rvert-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$ имеет ровно два различных решения. (Решите уравнение двумя способами). Ответ: при $a \in (-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;3)\cup(3;8)$ уравнение имеет два различных решения	**(ЕГЭ 2019).** Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\dfrac{x^2-2x+a}{4x^2-3ax-a^2}=0$ имеет ровно два различных решения. (Решите уравнение двумя способами). Ответ: при $a \in (-\infty;-24)\cup(-24;0)\cup(0;1)$ уравнение имеет два различных решения.	**(ЕГЭ 2019).** Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\dfrac{x^2-6x+a^2+2a}{2x^2-ax-a^2}=0$ имеет ровно два различных решения. (Решите уравнение двумя способами). Ответ: при $a \in \left(-1-\sqrt{10};-4\right)\cup(-4;0)\cup(0;2)\cup\left(2;-1+\sqrt{10}\right)$ уравнение имеет два различных решения.
163. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^2-4a^2}=\sqrt{4x^2+(8a-3)x-6a}$ имеет единственный корень на отрезке $[-4;2]$. Ответ: при $a=-\dfrac{3}{4}\Rightarrow\exists!\quad x=1{,}5.$	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $x\sqrt{x-3a}=\sqrt{15a-10ax}$ имеет единственный корень на отрезке $[-1;2]$. Ответ: при $a\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]\Rightarrow\exists!\quad x\in[0;1{,}5].$ Ни при каких значениях параметра **а** корень уравнения не принадлежит	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\left(x^2-3x-4\right)\sqrt{4-4x+x^2}=ax-2a$ имеет: 1) ровно имеет 3 различных корня; 2) ровно 2 различных корня. Ответ: при $a\in(-6;\,6)\Rightarrow 3k.$	

	$[-1;0)\cup(1{,}5;2]$.		
164. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $(\lvert x+2\rvert+\lvert x-a\rvert)^2-4(\lvert x+2\rvert+\lvert x-a\rvert)+3a(4-3a)=0$ имеет: 1) ровно два различных корня; 2)бесконечное количество корней? Ответ: при $a\in\left[0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(1;\frac{4}{3}\right]$ уравнениеимеет два различных корня. При $a\in\{0{,}5;\quad 1\}\Rightarrow\infty$	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $(\lvert x+2\rvert+\lvert x-a\rvert)^2-4(\lvert x+2\rvert+\lvert x-a\rvert)+5a(6-5a)=0$ имеет: 1) ровно два различных корня; 2)бесконечное количество корней?	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $(\lvert x-3\rvert+\lvert x+a\rvert)^2-4(\lvert x-3\rvert+\lvert x+a\rvert)+7a(10-7a)=0$ имеет: 1) ровно два различных корня; 2)бесконечное количество корней?	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $(\lvert x+2\rvert+\lvert x-a\rvert)^2-4(\lvert x+2\rvert+\lvert x-a\rvert)+7a(10-7a)=0$ имеет: 1) ровно два различных корня; 2)бесконечное количество корней?
165. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $a^2-ax-2x^2-0{,}5x-2a+\lvert a+2{,}5x\rvert=0$ имеет: 1) ровно три различных корня; 2) ровно четыре различных корня. Ответ: при $a\in\left\{0;\frac{2}{3};1;\frac{5}{3}\right\}\Rightarrow 3k.$ Подсказка: используя метод областей, постройте график уравнения в КПП: $x_1=1-a, a\le\frac{5}{3};$ $x_2=\frac{a}{2}, a\ge 0;$ $x_3=-a, a\ge 0;$ $x_4=\frac{a}{2}-1{,}5, a\le\frac{5}{3}.$ Найдите координаты точек пересечения прямых.		*** Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\frac{x^2-2x+a^2-4}{x^2-a}=0$ имеет ровно два различных решения.	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $a^2-ax-2x^2+4x-3{,}5a-6{,}5+\lvert 4{,}5a+9x-13{,}5\rvert=0$ имеет: 1) ровно два различных корня; 2) ровно три различных корня; 3) ровно четыре различных корня. Ответ: при $a\in\{-1;1;3;5\}\Rightarrow 3k$ Подсказка: используя метод областей, постройте график уравнения в КПП: Найдите координаты точек пересечения прямых.

166. **(ЕГЭ 2019).** Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\frac{\lvert 4x-15\rvert+2a-15}{x^2-10x+a^2}=0$ имеет ровно два различных решения. (Решите уравнение двумя способами). Ответ: при $a\in(-\infty;-3)\cup(-3;0)\cup(0;4)\cup(4;5)$ уравнение имеет два различных решения	**(ЕГЭ 2019).** Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\frac{x^2-2x+a^2-4x}{x^2-a}=0$ имеет ровно два различных решения. (Решите уравнение двумя способами). Ответ: при $a\in(2-\sqrt{5};0)\cup(0;1)\cup(1;4)\cup(4;2+\sqrt{5})$ уравнение имеет два различных решения.	**(ЕГЭ 2019).** Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\frac{\lvert 4x\rvert-x-3-a}{x^2-x-a}=0$ имеет ровно два различных решения. (Решите уравнение двумя способами). Ответ: при $a\in(-3;0)\cup(0;2)\cup(2;7)\cup(7;12)\cup(12;+\infty)$ уравнение имеет два различных решения	**(ЕГЭ 2019).** Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\frac{x^2-4x+a}{x^2-ax+a^2}=0$ имеет ровно два различных решения. (Решите уравнение двумя способами). Ответ: при $a\in(-\infty;0)\cup(0;4)$ уравнение имеет два различных решения.

БЗ№3 Задача нахождения достаточных условий на коэффициенты уравнения $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$, обеспечивающих выполнение соотношений между корнями типа:
$x_1=\lambda x_2;\quad \alpha x_1+\beta x_2=\gamma;\quad x^2_1+x_2^{\,2}=a;\quad x^3_1+x_2^{\,3}=b$ **(с применением теоремы Виета).**

МЗ. Нахождения достаточных условий на коэффициенты уравнения $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$, обеспечивающих выполнение соотношений для корней типа: $x_1<x_2<0;\quad 0<x_1<x_2$
(с применением теоремы Виета). /Линия преобразований/
НЗ. Исследование свойств корней уравнения без нахождения самих корней.

167. Дано уравнение $x^2-ax-x+a=0, a\neq 1$ Не вычисляя корней, найдите: 1)сумму квадратов; 2)разность квадратов корней этого уравнения; 3)сумму кубов корней уравнения; 4)разность кубов. Отв.1) a^2+1; 2) a^2-1;	Дано уравнение $x^2+ax-x-a=0, a\neq 1$ Не вычисляя корней, найдите: 1)сумму квадратов; 2)разность квадратов корней этого уравнения; 3)сумму кубов корней уравнения;4)разность кубов. Отв.1) a^2+1; 2)	Дано уравнение $x^2+(2-a)x-a-3=0$ Не вычисляя корней, найдите: 1)сумму квадратов корней; 2)исследуйте, при каких **а** сумма квадратов корней минимальна. Отв.1) 2)	Дано уравнение $x^2+2ax+a-1=0$ Не вычисляя корней, найдите: 1)сумму квадратов корней; 2)исследуйте, при каких **а** сумма квадратов корней минимальна. Отв.1) 2)
168. Найдите все значения параметра а, при которых один корень уравнения $x^2+(2a-1)x+a^2+2=0$	Найдите все значения параметра а, при которых один корень уравнения $x^2+(2a-1)x+a^2+2=0$	Найдите все значения параметра а, при которых отношение корней уравнения $x^2+ax+2=0$ равно	Найдите все значения параметра а, при которых отношение корней уравнения $x^2-ax+4=0$ равно

вдвое больше другого. Отв.4.	втрое больше другого. Отв.	двум. Отв. ± 3	четырём. Отв. ± 5
169. Пусть квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ с заданными коэффициентами имеет корни x_1 и x_2. Составьте второе квадратное уравнение $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и найдите зависимость его коэффициентов p_1 и q_1 от коэффициентов p и q первого уравнения, если второе уравнение имеет корни: $0{,}2\,x_1$ и $0{,}2\,x_2$ Отв. $x^2 + 0{,}2px + 0{,}04q = 0$	Пусть квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ с заданными коэффициентами имеет корни x_1 и x_2. Составьте второе квадратное уравнение $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и найдите зависимость его коэффициентов p_1 и q_1 от коэффициентов p и q первого уравнения, если второе уравнение имеет корни: $x_1 + \sqrt{3}\cdot x_2$ и $\sqrt{3}\cdot x_1 + x_2$ Отв. $x^2 + p\left(1+\sqrt{3}\right)x + \left(2q + \sqrt{3}p^2\right) = 0$	Пусть квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ с заданными коэффициентами имеет корни x_1 и x_2. Составьте второе квадратное уравнение $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и найдите зависимость его коэффициентов p_1 и q_1 от коэффициентов p и q первого уравнения, если второе уравнение имеет корни: $\frac{x_1}{x_2}$ и $\frac{x_2}{x_1}$.Отв. $x^2 + \frac{2q - p^2}{q}x + 1 = 0$	Пусть квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ с заданными коэффициентами имеет корни x_1 и x_2. Составьте второе квадратное уравнение $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и найдите зависимость его коэффициентов p_1 и q_1 от коэффициентов p и q первого уравнения, если второе уравнение имеет корни: x_1^2 и x_2^2.Отв. $x^2 + \left(2q - p^2\right)x + q^2 = 0$
170. Составьте биквадратное уравнение с целыми коэффициентами, один из корней которого равен x_1. Найдите остальные корни полученного уравнения. $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Отв. $x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$	Составьте биквадратное уравнение с целыми коэффициентами, один из корней которого равен x_1. Найдите остальные корни полученного уравнения. $x_1 = \sqrt{3} + \sqrt{5}$. Отв. $x^4 - 18x^2 + 21 = 0.$	Составьте биквадратное уравнение с целыми коэффициентами, один из корней которого равен x_1. Найдите остальные корни полученного уравнения. $x_1 = \sqrt{5} - \sqrt{3}$. Отв. $x^4 - 16x^2 + 4 = 0.$	Составьте биквадратное уравнение с целыми коэффициентами, один из корней которого равен x_1. Найдите остальные корни полученного уравнения. $x_1 = \sqrt{7} - \sqrt{2}$. Отв. $x^4 - 18x^2 + 25 = 0.$
171. Какая взаимосвязь существует между корнями квадратных уравнений **$x^2 + px + q = 0$ *и*** **$x^2 - px + q = 0$;** где p, q не равны 0? Отв.расстояние между левыми корнями равно расстоянию между правыми и равно $\lvert p \rvert$.	Какая взаимосвязь существует между корнями квадратных уравнений **$ax^2 + bx + c = 0$ *и* $ax^2 - bx + c = 0$** где a, b, c не равны 0? Отв.расстояние между корнями первого равно расстоянию между корнями второго и равно $\left\lvert \frac{b}{a} \right\rvert$.	Какая взаимосвязь существует между корнями квадратных уравнений **$x^2 + px + q = 0$ *и* $qx^2 + px + 1 = 0$** где p, q не равны 0? Отв.корни уравнений являются взаимно-обратными числами.	Какая взаимосвязь существует между корнями квадратных уравнений **$ax^2 + bx + c = 0$** ***и*** **$cx^2 + bx + a = 0$** где a, b, c не равны 0? Отв.корни уравнений являются взаимно-обратными числами.
172. Какая взаимосвязь существует между корнями квадратных уравнений **$ax^2 + bx + c = 0$ *и*** **$x^2 + bx + ac = 0$** где a, b, c не равны 0?	Какая взаимосвязь существует между корнями квадратных уравнений **$ax^2 + bx + c = 0$ *и*** **$ax^2 + 2bx + 4c = 0$, где** a, b, c не равны 0?	Какая взаимосвязь существует между корнями квадратных уравнений **$ax^2 + bx + c = 0$ *и*** **$ax^2 + b^2x + b^2c = 0$, где** a, b, c не равны 0? Отв.отношение	Какая взаимосвязь существует между корнями квадратных уравнений **$ax^2 + bx + c = 0$ *и* $acx^2 + bx + 1 = 0$, где** a, b, c не равны 0? Отв.отношение корней второго уравнения к корням первого равно с.

Отв.отношение корней второго уравнения к корням первого равно а.	Отв.отношение корней второго уравнения к корням первого равно 2.	корней второго уравнения к корням первого равно b.	
173. Какая зависимость существует между коэффициентами уравнения $x^2 + px + q = 0$; если один из его корней равен: 1) 1; 2)-1 ?	Какая зависимость существует между коэффициентами уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если один из его корней равен: 1) 1; 2) -1 ?	Найдите корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если: 1) $a + b + c = 0$; 2) $a - b + c = 0$.	Найдите корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если: 1)$4a + 2b + c = 0$; 2)$9a - 3b + c = 0$.
174. Найдите наиболее рациональный способ решения квадратного уравнения: $b(b^2+3a^2)x^2-(b-a)^3x-a(a^2+3b^2)=0$ *Подсказка:* используем формулы сокращённого умножения и проверяем сумму или знакочередующуюся сумму (ЗЧС) коэффициентов уравнения.	Найдите наиболее рациональный способ решения квадратного уравнения: $(a-b)^3x^2-a^2(a-3b)x+b^2(b-3a)=0$ *Подсказка:* используем формулы сокращённого умножения и проверяем сумму или знакочередующуюся сумму (ЗЧС) коэффициентов уравнения.	Найдите наиболее рациональный способ решения квадратного уравнения: $(a^3+b^3)x^2-3ab(a+b)x-(a+b)^3=0$ *Подсказка:* используем формулы сокращённого умножения и проверяем сумму или знакочередующуюся сумму (ЗЧС) коэффициентов уравнения.	Найдите наиболее рациональный способ решения квадратного уравнения: $abx^2+(a^2+3ab+b^2)x+(a+b)^2=0$ *Подсказка:* используем формулы сокращённого умножения и проверяем сумму или знакочередующуюся сумму (ЗЧС) коэффициентов уравнения.
175. Найдите наиболее рациональный способ решения квадратного уравнения: $125x^2+127x-252=0$ *Подсказка:* используем формулы сокращённого умножения и проверяем сумму или знакочередующуюся сумму (ЗЧС) коэффициентов уравнения.	Найдите наиболее рациональный способ решения квадратного уравнения: $5017x^2-3210x-1807=0$ *Подсказка:* используем формулы сокращённого умножения и проверяем сумму или знакочередующуюся сумму (ЗЧС) коэффициентов уравнения.	Найдите наиболее рациональный способ решения квадратного уравнения: $(a+b+c)^2x^2-2(ab+bc+ac)x-$ $-a^2-b^2-c^2=0$ *Подсказка:* используем формулы сокращённого умножения и проверяем сумму или знакочередующуюся сумму (ЗЧС) коэффициентов уравнения.	Найдите наиболее рациональный способ решения квадратного уравнения: $(a^2+b^2+c^2)x^2+2(ab+bc+ac)x-$ $-(a+b+c)^2=0$ *Подсказка:* используем формулы сокращённого умножения и проверяем сумму или знакочередующуюся сумму (ЗЧС) коэффициентов уравнения.
176. Найдите не равные 0 коэффициенты p и q данного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$, если его корни равны этим коэффициентам. Отв. $(1;-2),(-0;-0{,}5)$	Найдите не равные 0 коэффициенты p и q данного квадратного уравнения $5x^2+px+q=0$, если его корни равны этим коэффициентам.	Найдите не равные 0 коэффициенты p и q данного квадратного уравнения $7x^2-px-q=0$, если его корни равны этим коэффициентам.	Найдите не равные 0 коэффициенты p и q данного квадратного уравнения $\frac{1}{3}x^2+px+q=0$, если его корни равны этим коэффициентам.
177. Найдите коэффициенты квадратного трехчлена x^2	Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет	Коэффициенты уравнения	Считая параметр *a* заданным числом в квадратном уравнении

$+ px + q = 0$, если известно, что его остаток при делении на двучлены $(x – p)$ и $(x – q)$ соответственно равны p и q. *Подсказка:* выполните деление многочлена «уголком». Отв. $(0;0),(1;-1)$.	два корня x_1, x_2. Составьте новое квадратное уравнение, у которого один из корней на единицу меньше большего корня, а другой – на единицу больше меньшего корня данного уравнения. *Подсказка:* ММЗ: Дано: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Найти $x_1' + x_2' = -\frac{b}{a}$; $x_1'x_2' = (x_1+1)(x_2-1) =$ ***Отв.*** $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c+b}{a} = 0$.	$ax^2 + bx + c = 0$ удовлетворяют соотношению $2b^2 = 9ac$. Докажите, что один из корней вдвое больше другого. *Краткий конспект решения:* $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - \frac{8}{9}b^2}}{2a}$; $x \in \left\{-\frac{2b}{3}; -\frac{b}{3}\right\}$. *QED*	$ax^2 + bx + c = 0$, найдите b и c , если известно, что b и c - корни этого уравнения. *Краткий конспект решения:система* $\begin{cases} ab^2 + b^2 + c = 0; \\ ac^2 + bc + c = 0 \end{cases}$ *относительно b,c решается вычитанием и имеет корни b,c:* $(0;0),\left(\frac{-1}{a+1}; \frac{-1}{a+1}\right)$.
178. Считая параметр b заданным числом в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$, найдите a и c , если известно, что a и c - корни этого уравнения.	Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня. Составьте новое квадратное уравнение, у которого один из корней на два меньше большего корня, а другой – на два больше меньшего корня данного уравнения.	Решите уравнение $x(x+1)+(x+1)(x+2)+$ $+(x+2)(x+3)+\ldots+$ $+(x+99)(x+100)=$ $=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+99\cdot100$ Отв:0;-100.	Решите уравнение $x(x+1)+(x+1)(x+2)+$ $+(x+2)(x+3)+\ldots+$ $+(x+2023)(x+2024)=$ $=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+$ $+2023\cdot2024$ Отв:0;-2024. *Подсказка*: решите уравнение $x^2 + 2024x = 0$
179. Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня. Составьте новое квадратное уравнение, у которого один из корней на три больше большего корня, а другой – на три меньше меньшего корня данного уравнения.	Покажите, что если a и b - корни уравнения $x^2 + px + 1 = 0$, а b и c - корни уравнения $x^2 + qx + 2 = 0$, то $(b-a)(b-c) = pq – 6$.	Покажите, что если a и b - корни уравнения $x^2 + px + 5 = 0$, а b и c - корни уравнения $x^2 + qx + 7 = 0$, то $(b-a)(b-c) = pq – 6$.	При каком положительном значении параметра a корни уравнения $5x^2 – 4(a+3)x + 4 = a^2$ противоположны по знаку? Найдите эти корни. Отв. $\|a\| > 2$
180. Найдите коэффициенты уравнения	Найдите коэффициенты уравнения $x^2 + px + q =$	Составьте квадратное уравнение с корнями *(a*	Пусть φ и ψ - корни

$x^2 + px + q = 0$ при условии, что разность корней уравнения равна 5, а разность их кубов равна 35. Подсказка: $5 = \sqrt{p^2 - 4q}$	0 при условии, что разность корней уравнения равна 7, а разность их кубов равна 49. Подсказка: $7 = \sqrt{p^2 - 4q}$ Отв. $(3;-2),(-3;2)$.	$+ b)^2$ и $(a - b)^2$, если a и b – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$. Отв. $x^2 - x(2p^2 - 3q) + p^2(p^2 - 3q) = 0$	уравнения $3x^2 + 7x + 4 = 0$. Не решая данного уравнения, составьте новое квадратное уравнение с числовыми коэффициентами, корни которого равны $\frac{\varphi}{\psi - 1}$ и $\frac{\psi}{\varphi - 1}$. Отв: $x^2 - \frac{13}{42}x + \frac{2}{7} = 0$
181. Укажите наибольшее и наименьшее целое значения параметра **а**, при котором уравнение $x^2 - 2ax + 2a + 24 = 0$ имеет различные отрицательные корни. Отв. $a = -11; a = -5$. *Подсказка: исп базовые задачи на расположение корней кв. трёхчлена. См.Примеры.*	Укажите наибольшее и наименьшее целое значения параметра **а**, при котором уравнение $x^2 - 2ax + 2a + 24 = 0$ имеет различные положительные корни. *Подсказка: исп базовые задачи на расположение корней кв. трёхчлена. См.Примеры.*	Укажите все целые значения параметра **а**, при котором уравнение $x^2 + (2 + a)x + 1 = 0$ имеет два различных отрицательных корня. Отв.а>0, т.е. все натуральные числа.	Укажите все целые значения параметра **а**, при котором уравнение $x^2 + (1 - a)x + 4 = 0$ имеет два различных положительных корня. Отв.а>5, т.е. все натуральные числа ≥ 6.
182. Не вычисляя корней уравнения $x^2 + px + q = 0$, найдите разность квадратов его корней. *Подсказка:* $x_1^2 - x_2^2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} \cdot (-p) = .$	Не вычисляя корней уравнения $2x^2 - 5x + 1 = 0$, найдите разность квадратов его корней.	Не вычисляя корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, найдите разность квадратов его корней.	Пусть x_1 и x_2 - корни уравнения $2x^2 - 7x - 3 = 0$. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа: а) $x_1 - 5$ и $x_2 + 6$; б) $x_1 + \frac{1}{x_2}$ и $x_2 + \frac{1}{x_1}$.отв.а) $x^2 - 4{,}5x - 29{,}75 - 2{,}75\sqrt{73} = 0$. б) $x^2 - \frac{7}{6}x - \frac{1}{6} = 0.$
183. При каком значении параметра а сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (a - 1)x + a^2 - 1{,}5 = 0$ **наибольшая**? *Подсказка*: $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 5 - (a-1)^2; \\ -3a^2 - 2a + 7 \geq 0; \end{cases} a_{\max} = 1.$	При каком значении параметра а сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (2 - a)x - a - 3 = 0$ **наименьшая?** Отв.а=1.	При каких значениях параметра а **сумма** корней квадратного уравнения $(a^2 - 25)x^2 + (a^2 + 4a - 5)x - a = 0$ равно нулю? *Подсказка*: К.з.п.а: $a \in \{-5;5\} \to \varnothing;$ Т.В. отв.а=1.	При каких значениях параметра а **произведение** корней уравнения $(a^2-9)x^2 + 3x + (a^2 - 7a + 12) = 0$ относительно х равно нулю? *Подсказка*: К.з.п.а: $a \in \{-3;3\} \to \varnothing;$ Т.В. отв.а=4.
184. В уравнении $7x^2 - 4x + a = 0$ сумма квадратов корней равна	В уравнении $13x^2 - 2x + a = 0$ квадрат разности корней	При каких значениях параметра а сумма корней уравнения	

$\frac{1}{14}$. Найдите а. *Подсказка*:необходимое условие: $D > 0 \Leftrightarrow a < \frac{4}{7}$; $x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{4}{7}\right)^2 - 2\cdot\frac{a}{7} = \frac{1}{14}$ $\frac{25}{28} > \frac{4}{7} \Rightarrow \varnothing$. Если рассматриваются комплексные корни, то ответ: $a = \frac{25}{28}$.	равен $\frac{1}{169}$. Найдите а. $\begin{cases} a < \frac{1}{13} \\ \left(\frac{2}{13}\right)^2 - 4\cdot\frac{a}{13} = \frac{1}{169} \end{cases} \Leftrightarrow$ Отв. : $a = \frac{3}{52}$	$x^2 - 2a(x - 1) - 1 = 0$ равна сумме квадратов его корней? *Подсказка:* приведите уравнение к каноническому виду. Отв. $a \in \{0{,}5;1\}$	
185. При каком значении параметра а расстояние между корнями уравнения $x^2 + (a - 1)x + a^2 - 1{,}5 = 0$ **наибольшее**? Найдите это расстояние. Отв. $-\frac{1}{3};\sqrt{\frac{22}{3}}$ *Подсказка: получите формулу:* $\lvert x_1 - x_2\rvert = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$ *И далее по т.Виета.*	При каком значении параметра а расстояние между корнями уравнения $x^2 + (2 - a)x - a - 3 = 0$ $= 0$ **наименьшее**? Найдите это расстояние. Отв. 0;4		
186. Не решая уравнения $x^2 + 2x + q = 0$, определите, при каких значениях параметра $q \in [-2;3]$ величина $\lvert x_1^2 - x_2^2\rvert$ принимает: а) наибольшее; б) наименьшее значение? Найдите эти значения, если x_1, x_2 – действительные корни данного квадратного уравнения. Подсказка: $\lvert x_1^2 - x_2^2\rvert = 2\sqrt{4 - 2q}$; $\max\left(2\sqrt{4-4q}\right) = 4\sqrt{3}; при q = -2$ $\min\left(2\sqrt{4-4q}\right) = 0; при q = 1.$	Не решая квадратного уравнения $x^2 + 2x + q^2 = 0$ относительно х, определите, при каких значениях параметра $q \in \left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ величина $\lvert x_1^2 - x_2^2\rvert$ принимает а) наибольшее; б) наименьшее значение. Найдите эти значения, если x_1, x_2 – действительные корни данного уравнения.	Найдите сумму квадратов всех корней уравнения $x^2 - 3\lvert x\rvert + 1 = 0$. Отв. $7 + 3\sqrt{5}$.	При каком значении параметра а корни уравнения $x^2 - 3x + 2b + 3 = 0$ удовлетворяют соотношению $5x_1 + 3x_2 = 23$? Отв.а=-15,5
187. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых больший корень уравнения $x^2 - (20a - 3)x + 100a^2 - 30a = 0$ в 6 раз больше, чем его	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых больший корень уравнения $x^2 - (8a - 7)x + 16a^2 - 28a = 0$ в 10 раз больше, чем его	При каких значениях параметра а один из корней уравнения $4x^2 - (3 + 2a)x + 2 = 0$ в 8 раз меньше другого?	При каких значениях параметра а **отношение** корней уравнения $2x^2 + (a-10)x + 6 = 0$ равно 12? Отв. $a \in \{-3;26\}$

меньший корень *Подсказка*: по т.Виета $x, 6x - корни \to 7x = 20a - 3;$ $6x^2 = 100a^2 - 30a;$ $a_1 = -0{,}06; a_2 = 0{,}36.$ Парадокс: почему $a_1 = -0{,}06$ не находится при другом способе решения?	меньший корень . *Подсказка*: по т.Виета $x, 10x - корни \to 11x = 8a - 7;$ $10x^2 = 16a^2 - 28a;$ $a_1 = \frac{35}{18}; a_2 = -\frac{63}{324}.$		
188. Не вычисляя корней уравнения $x^2 + px + q = 0$, найдите разность и разность квадратов его корней.	Известно, что корни уравнения $x^2 - 13x + a = 0$ равны соответственно квадратам корней уравнения $x^2 + bx + 6 = 0$. Найдите значение параметров a и b и корни обоих уравнений. Отв. $b = \pm 5 \to x \in \{2;3\}; x \in \{-3;-2$ $a = 36 \to x \in \{4;9\}$	Не вычисляя корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, найдите разность и разность квадратов его корней.	Не вычисляя корней уравнения $2x^2 - 5x + 1 = 0$, найдите разность и разность квадратов его корней.
189. При каких значениях параметра a отношение корней квадратного уравнения $(a^2 - 5a + 3)x^2 + (3a - 1)x + 2 = 0$ равно $\frac{1}{2}$? Отв. $\varnothing$	При каких значениях p и q корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ равны 2p и $\frac{q}{2}$? Отв.Т.В.; $(0;0); (1;-6)$	Известно, что корни уравнения $x^2 - 5x + a = 0$ на 1 меньше корней уравнения $x^2 - 7x + 3a - 6 = 0$. Найдите значение параметра a и корни обоих уравнений. Отв.a=6.Т.В.	
190. При каких значениях параметра a произведение корней уравнения относительно x $(a^2 - 9)x^2 + 3x + (a^2 - 7a + 12) = 0$ равно нулю?	При каких значениях параметра a сумма корней квадратного уравнения $(a^2 - 25)x^2 + (a^2 + 4a - 5)x - a = 0$ равно нулю?	Не решая уравнения $x^2 + 2x + q = 0$, определите, при каких значениях параметра $q \in [-2;3]$ величина $\lvert x_1^2 - x_2^2 \rvert$ принимает: а) наибольшее; б) наименьшее значение? Найдите эти значения, если x_1, x_2 – действительные корни данного квадратного уравнения.	Не решая квадратного уравнения $x^2 + 2x + q^2 = 0$ относительно x, определите, при каких значениях параметра $q \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ величина $\lvert x_1^2 - x_2^2 \rvert$ принимает а)наибольшее; б)наименьшее значение. Найдите эти значения, если x_1, x_2 – действительные корни данного уравнения.
		Найдите значение параметра a, при котором один корень уравнения	Найдите значение параметра a, если известно, что число *a* является корнем уравнения $2x^2 - (1 - 3a)x + 5a = 0.$

		$x^2 + x - a^2 - 2 = 0$ меньше другого на 5.	
191. Найдите все значения параметра а, при которых разность корней уравнения $x^2 - ax + 4 = 0$ равна 4. Отв. $\pm 4\sqrt{2}$	Разность корней квадратного уравнения $25x^2 - 25x + a - 2 = 0$ равна 0,2. Найдите значение параметра а.	Найдите все значения параметра а, при которых разность корней уравнения $2x^2 - ax + 1 = 0$ равна 1. Отв. $\pm\sqrt{12}$	При каком значении параметра а ***разность корней*** квадратного уравнения $x^2 + bx + 6 = 0$ равна 10 ?
192. При каком значении параметра а разность корней квадратного уравнения $x^2 + bx + 6 = 0$ равна 10 ? Отв. $\pm\sqrt{124}$	Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение $ax^2 + 2(a+3)x + (a+4) =$ имеет два корня, расстояние между которыми больше 2. *Краткий конспект решения*: ММЗ: $\begin{cases} a \neq 0; \\ a > -4{,}5; \\ \lvert x_1 - x_2 \rvert = \dfrac{2\sqrt{9+2a}}{\lvert a \rvert} > 2; \end{cases}$ Отв. $a \in (1-\sqrt{10};0) \cup (0;1+\sqrt{10})$	Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение $ax^2 + 2(a+2)x + (a+5) = 0$ имеет два корня, расстояние между которыми больше 1 . *Краткий конспект решения*: ММЗ: $\begin{cases} a \neq 0; \\ a < 4; \\ \lvert x_1 - x_2 \rvert = \dfrac{2\sqrt{4-a}}{\lvert a \rvert} > 1; \end{cases}$ Отв. $a \in (-2-\sqrt{20};0) \cup (0;-2+\sqrt{20})$	Разность корней квадратного уравнения $25x^2 - 25x + a - 2 = 0$ равна 0,2. Найдите значение параметра а. *Краткий конспект решения*: ММЗ: $a < 8{,}25$; $\lvert x_1 - x_2 \rvert = \dfrac{\sqrt{825-100a}}{25} = \dfrac{1}{5}$ Отв.а=8. 2-ой сп. По т.Виета.
193. При каких значениях параметра *а* число *а* является корнем уравнения *$8x^2 + (2a + 1)x + 2a - 1 = 0$*? Отв.-0,5; 0,2.	Найдите значение параметра а, если известно, что число *а* является корнем уравнения *$2x^2 - (1 - 3a)x + 5a = 0$.* Отв.0: -0,8.		Найдите значение параметра а, при котором один корень уравнения $x^2 + x - a^2 - 2 = 0$ меньше другого на 5. Отв. $a = \pm 2$.
194. Найдите все действительные значения r, при которых корни уравнения $x^2-2(r-1)x+2r+1=0$ действительны; исследуйте знаки корней в зависимости от r. $\begin{pmatrix} x_i > 0 & \text{при} & r \geq 4; \\ x_i < 0 & \text{при} & r \in (-0.5;\ 0) \\ x_1 x_2 < 0 & \text{при} & r < -0.5 \end{pmatrix}$	Найдите все значения параметра s, при которых $P_2(x)=x^2+sx+1$ положителен при всех $x \in R$. Отв. $s \in (-2;\ 2)$	Докажите, что для того, чтобы корни уравнения $x^2+px+q = 0$ (p,q – действительные числа) были действительны и отрицательны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: $p^2-4q \geq 0$, $p > 0$, $q > 0$. (Указание: используйте теорему Виета или базовую задачу на расположение корней квадратного трёхчлена задачу).	Найдите все значения параметра m, при которых действительны и положительны корни уравнения $(m-1)x^2-2mx+m+3=0$. Отв. $m \in (-\infty; -3) \cup (1;\ 1.5)$

195. При каком целом k один из корней уравнения $4x^2-(3k+2)x+(k^2-1)=0$ втрое меньше другого? (k=2)	При каком положительном значении λ один корень уравнения $8x^2-6x+9\lambda^2=0$ равен квадрату другого ? Отв. $\left(\lambda=\frac{1}{3}\right)$	В уравнении $x^2-2x+m=0$ определите то значение m, при котором его корни x_1 и x_2 удовлетворяют условию $7x_1-4x_2=47$. Отв. m= -5	При каком целом значении p уравнения $3x^2-4x+p-2=0$ и $x^2-2px+5=0$ имеют общий корень? Найдите этот корень. Отв.p=3; x=1
196. Найдите все значения параметра а, при которых уравнение $x^2-(a+3)x+a+5=0$ имеет два положительных корня, один из которых в 2 раза больше другого. Отв.3.	Найдите все значения параметра а, при которых уравнение $x^2+(a-5)x-a+20=0$ имеет два положительных корня, один из которых в 3 раза больше другого. Отв.-7.	Найдите все значения параметра а, при которых уравнение $x^2-(a+3)x+a+5=0$ имеет два отрицательных корня, один из которых в 2 раза больше другого. Отв.	Найдите все значения параметра а, при которых уравнение $x^2+(a-5)x-a+20=0$ имеет два отрицательных корня, один из которых в 3 раза больше другого. Отв.
197. Найдите все возможные значения выражения $x^3+\frac{27}{x^3}$ если $x^2+\frac{9}{x^2}$. Отв. $\pm 13\sqrt{22}$.	Найдите все возможные значения выражения $x^3+\frac{64}{x^3}$ если $x^2+\frac{16}{x^2}$. Отв. $\pm 5\sqrt{17}$.	Найдите значение выражения $16x^2+9x^{-2}+3$ если $4x-3x^{-1}=-6$. Отв.63.	Упростите выражение $\lambda(x)=\frac{x^3-6x^2-40x}{x(\lvert x+4\rvert+10)+40}$ И вычислите разность $\lambda(20)-\lambda(-20)$.
198. Вычислите **сумму** действительных корней уравнения $x^2+2(a^2-3a)x-(6a^3-14a^2+4)=0$ и найдите значения параметра a, при которых она принимает наибольшее значение. Отв. при $a=2$; $(x_1+x_2)_{наиб}=4$	Вычислите **разность** действительных корней уравнения $x^2+2(a^2-3a)x-(6a^3-14a^2+4)=0$ и найдите значения параметра a, при которых она принимает максимальное значение. Чему равно это максимальное значение? Отв. $2\sqrt{a^4-5a^2+4}$; $a_{\max}=0$; 4.	Вычислите **сумму** действительных корней уравнения $x^2+2(2a^2-5a)x-(6a^3-14a^2+4)=0$ и найдите значения параметра a, при которых она принимает наибольшее значение.	Вычислите **сумму** действительных корней уравнения $x^2+\frac{2a}{1+a^2}x-(6a^3-14a^2+4)=0$ и найдите значения параметра a, при которых она принимает наибольшее значение.

БазоваяЗадача№4 Задача нахождения достаточных условий на коэффициенты уравнения $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$, обеспечивающих принадлежность корней данным промежуткам типа:

$x_1;x_2\in(-\infty;\lambda)$; $x_1;x_2\in(\lambda;+\infty)$; $x_1;x_2\in(\alpha;\beta)$; $x_1<\lambda<x_2$, **где** λ,α,β **- заданные числа.**

МЗ. Исследование свойств корней уравнения без нахождения самих корней. /Линия функций /
НЗ. Задача нахождения достаточных условий на коэффициенты уравнений вида $x^2+bx+c=0$**, обеспечивающих перемежаемость (неперемежаемость) корней.**

Пожалуйста, ознакомьтесь с Примерами решения задач по данной теме.

199. При каких значениях **а** корни уравнения $x^2-2ax+(a-1)(a+1)=0$ принадлежат отрезку $[-5;5]$? Отв. $[-4;4]$	При каких значениях **а** корни уравнения $x^2-2(a+1)x+a(a+2)=$ принадлежат отрезку $[-1;3]$? Отв. $[-1;1]$	При каких значениях **а** число 0,5 находится между корнями уравнения $x^2-(a+1)x+2a^2=0$? Отв. $\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$	При каких значениях **а** число 1 находится между корнями уравнения $x^2+(a+1)x-a^2=0$? Отв. a<-1;a>2.
200. Найдите все значения параметра а, при которых оба корня уравнения $x^2+4ax+(1-2a+4a^2)=$ меньше -1. Отв. a>1.	Найдите все значения параметра а, при которых оба корня уравнения $x^2+4ax+(1-2a+4a^2)=$ больше 2. Отв.	Найдите все значения параметра а, при которых уравнение $x^2+2(a-1)x+a+5=0$ имеет хотя бы один положительный корень. Отв. $a\le-1$	Найдите все значения параметра а, при которых уравнение $x^2+2(a-1)x+a+5=0$ имеет хотя бы один отрицательный корень. Отв.
201. При каких значениях **а** уравнение $x^2+2(a+1)x+9=0$ имеет два положительных различных корня? Отв. a<-4	При каких значениях **а** корни уравнения $x^2-4x+(2-a)(2+a)=0$ расположены по разные стороны от числа 3 ? Отв. a>1;a<-1	При каких значениях **а** уравнение $x^2+2(a+1)x+9=0$ имеет два отрицательных различных корня? Отв. a>2.	При каких значениях **а** корни уравнения $x^2-4x+(2-a)(2+a)=0$ расположены по разные стороны от числа 0 ? Отв. a<-2;a>2.
202. При каких значениях **а** оба корня уравнение $x^2-ax+2=0$ принадлежат промежутку(0;3)? Отв. $a\in\left[\sqrt{8};\frac{11}{3}\right]$	При каких значениях **а** оба корня уравнение $x^2-ax+2=0$ принадлежат промежутку(1;3)? Отв. $a\in(\sqrt{8};3)$	Найдите необходимое и достаточное условие того, что корни x_1 и x_2 уравнения $x^2+px+q=0$ действительны и удовлетворяют неравенствам $\alpha<x_1<\beta$, $\alpha<x_2<\beta$.	Найдите все действительные значения параметра m, при которых корни уравнения $2mx^2-(m-1)x+1=0$ действительны и оба по модулю меньше единицы. Отв. $m<-2$; $m>5+\sqrt{24}$
203. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых больший корень уравнения $x^2-(14a-9)x+49a^2-63a+2$ меньше 9.	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых больший корень уравнения $x^2-(14a-9)x+49a^2-63a+20=$	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых больший корень уравнения $x^2-(14a-3)x+49a^2-21a+2=0$	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых больший корень уравнения $x^2-(14a-3)x+49a^2-21a+2=0$ больше -8.

Отв. $a < \dfrac{13}{7}$.	больше 9. *Подсказка*: рассмотрите два случая.	меньше -8. Отв..	*Подсказка*: рассмотрите два случая.
204. При каких значениях параметра a квадратное уравнение $ax^2 + 2(a+1)x + 2a = 0$ имеет: а) 2 различных отрицательных корня? Б) 2 различных положительных корня? В) 2 различных корня в интервале (1, 2)? Г) 2 корня разных знаков? Отв. а)При $a \in (0; 1+\sqrt{2})$ два различных отрицательных корня. Б)При $a \in (1-\sqrt{2}; 0)$ 2 различных положительных корня. В) При $a \in (1-\sqrt{2}; -0.4)$ 2 корня в интервале (1, 2). Г) нет решений.	При каких значениях параметра a квадратное уравнение $ax^2 + 2(a+2)x + 2a + 1 =$ имеет: а) 2 различных отрицательных корня? Б) 2 различных положительных корня? В) 2 различных корня в интервале (-1,1)? Г) 2 корня разных знаков?	При каких значениях параметра a квадратное уравнение $ax^2 + 2(a-1)x + 2a - 1 = = 0$ имеет: а) 2 различных отрицательных корня? Б) 2 различных положительных корня? В) 2 различных корня в интервале (-1, 2)? Г) 2 корня разных знаков?	При каких значениях параметра a квадратное уравнение $ax^2 + 2(a-3)x - 1 + 2a = 0$ имеет: а) 2 различных отрицательных корня? Б) 2 различных положительных корня? В) 2 различных корня в интервале (0, 2)? Г) 2 корня разных знаков?
205. Найдите все значения параметра *a*, при которых корни уравнений $x^2 + \frac{8x}{a} - \frac{3}{a} = 0$ и $x^2 + \frac{4x}{a} - \frac{19}{a} = 0$ **перемежаются** (т.е. оба уравнения имеют по два корня и между корнями одного из уравнений есть только один корень другого уравнения.). ОТВ. При $a \in \left(0; \frac{35}{16}\right)$ корни уравнений перемежаются.	Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых корни уравнений $x^2 + \frac{2x}{a} + 28 = 0$ и $x^2 + \frac{12x}{a} - 8 = 0$ **не перемежаются,** т.е. оба уравнения имеют по два корня и между двумя корнями одного из уравнений нет ни одного корня другого уравнения. Отв. При $a \in \left(-\frac{1}{\sqrt{28}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{\sqrt{28}}\right)$ корни уравнений не перемежаются.	При каких значениях параметра a корни уравнений $x^2+4x+4a=0$ и $x^2+3x+6a=0$ **не** перемежаются, то есть оба уравнения имеют по два корня и между двумя корнями одного из уравнений нет ни одного корня другого уравнения? Отв. $a \in (-\infty; -3] \cup \left[0; \frac{8}{3}\right)$	При каких значениях параметра a корни уравнений $x^2 + \frac{8x}{a} - 2a = 0$ и $x^2 + \frac{6x}{a} - a = 0$ **не** перемежаются, то есть оба уравнения имеют по два корня и между двумя корнями одного из уравнений нет ни одного корня другого уравнения? Отв. $a \in (-2; 0)$

206. Найдите все значения параметра *a,* при каждом из которых корни уравнений $x^2+\frac{3x}{a}+2a=0$ и $x^2+\frac{12x}{a}-a=0$ **не перемежаются,** т.е. оба уравнения имеют по два корня и между двумя корнями одного из уравнений нет ни одного корня другого уравнения. Отв. При $\left(-\sqrt[3]{36};-3\right]\cup\left(0;\frac{\sqrt[3]{9}}{2}\right)$ корни уравнений не перемежаются.	Найдите все значения параметра *a*, при которых корни уравнений $x^2+3x+2a=0$ и $x^2+6x+5a=0$ **перемежаются** (т.е. оба уравнения имеют по два корня и между корнями одного из уравнений есть только один корень другого уравнения.) Отв. $a\in(-1;0)$		
207. При каких значениях параметра *a* уравнение $(a-2)x^2-2ax+2a-3=0$ имеет два положительных корня ? *Подсказка:см.Б3.4.1.*	При каких значениях параметра *a* число 2 находится между корнями уравнения $x^2+(4a+5)x+3-2a=0$? отв. $a<-\frac{17}{6}$	При каких значениях параметра *a* оба корня уравнения $x^2-5ax+6a^2=0$ больше 100 ? Отв.a>50.	При каких значениях параметра *a* уравнение $2x^2+3x+a=0$ имеет два различных отрицательных корня ? Отв. $a\in\left(0;\frac{9}{8}\right)$
208. При каких значениях параметра *a* оба действительных корня уравнения $x^2-2ax-1=0$ по модулю меньше 2 ? Отв. $a\in(-0{,}75;0{,}75)$	При каких значениях параметра *a* оба действительных корня уравнения $x^2-2ax-1=0$ по модулю больше 2 ? Отв. $\varnothing$	При каких значениях параметра *a* неравенство $(x-3a)(x-a-3)<0$ выполняется при всех *x* из отрезка [1;3] ? Отв. $a\in\left(0;\frac{1}{3}\right)$.	При каких значениях параметра *a* неравенство $(x-3a)(x-a-3)<0$ выполняется при всех *x* из отрезка [2;4] ?
209. При каких значениях параметра *a* неравенство $(x-4a)(x-a-4)<0$ не выполняется при всех *x* из отрезка [1;4] ? Отв. $a\in(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$	При каких значениях параметра *a* все действительные корни уравнения $3ax^2+(3a^3-12a^2-1)x-a(a-4)=0$ удовлетворяют условию $\|x\|<1$?	При каких значениях параметра *a* уравнение $(a-1)x^2-(2a+1)x+2+5a=0$ имеет два действительных различных корня, бóльших 1 ?	При каких значениях параметра *a* уравнение $ax^2-(a^3+2a^2+1)x+a(a+2)=0$ имеет два действительных различных корня, принадлежащих отрезку [-2;2].

	Подсказка: см.Б34.3. Отв. $a\in\left(2+\sqrt{3};2+\sqrt{5}\right)\cup\{0\}$	*Подсказка: см.Б34.2.* Отв. $a\in\left(1;\frac{2+\sqrt{13}}{4}\right)$	*Подсказка: см.Б34.3.* Отв. $a\in\left[-1-\sqrt{3};-0{,}5\right]\cup$ В $\cup\left[0{,}5;\sqrt{3}-1\right]$
210. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $(a^2+a+1)x^2+(2a-3)x+a-5=0$ меньше 1, а другой больше 1. *Подсказка:см.Б34.4*. Отв. $a\in\left(-2-\sqrt{11};-2+\sqrt{11}\right)$	Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $2x^2-2(2a-1)x-a(a-1)=0$ удовлетворяют условию $x_1<a<x_2$. *Подсказка:см.Б34.4* Отв.а<0,а>1.	При каких значениях параметра a корни уравнения $ax^2+2(a+3)x+a+2=0$ неотрицательны? Отв. $a\in\left[-2{,}25;-2\right)$	При каких значениях параметра a один из корней уравнения $(a-5)x^2-2ax+a-4=0$ меньше 1, а другой больше 2? *Подсказка:см.Б34.4* Отв. $a\in(5;24)$
211. При каких значениях параметра a корни уравнения $(a+1)x^2-3ax+4a=0$ принадлежат интервалу (2;5)? *Подсказка:см.Б34.3*. Отв. $a\in\left(-\frac{32}{14};-\frac{25}{14}\right)$	При каких значениях параметра a оба корня x_1 и x_2 $(x_1\neq x_2)$ уравнения $x^2+2(a-3)x+9=0$ принадлежит интервалу (-6;1). Отв. $a\in(6;6{,}75)$	При каких значениях параметра a один из корней многочлена $(a^2+a+1)x^2+(a-3)x+a^2$ больше 3, а другой меньше 3? *Подсказка:см.Б34.4* Отв. $a\in(-1{,}2;0)$	При каких значениях параметра a оба корня уравнения $2x^2+ax+a^2-5=0$: *1)* меньше 1; *2)* больше 1. *Отв1:* $a\in\left(-\sqrt{\frac{40}{7}};\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2};\sqrt{\frac{40}{7}}\right)$. *Отв2.* $\varnothing$
212. При каких значениях параметра a уравнение $(a+5)x^2+(2a-3)x+a-10=0$ имеет два различных отрицательных корня? *Подсказка:см.Б34.1* *Отв.*. $a\in(-26{,}125;-5)\cup(10;+\infty$	При каких значениях параметра a один из корней уравнения $(a^2-2)x^2+(a^2+a-1)x-a^3+a=0$ больше числа a, а другой меньше числа a? Отв. $a\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(1;\sqrt{2}\right)$	При каких значениях параметра a один из корней уравнения $(a^2-2)x^2+(a^2+a-1)x-a^3+a=0$ больше числа $2a$, а другой меньше числа $2a$? Отв. $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\frac{3-\sqrt{14}}{5};0\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{14}}{5};\sqrt{2}\right)$	При каких значениях параметра a один из корней уравнения $(a^2-2)x^2+(a^2+a-1)x-a^3+a=0$ больше числа $2a$, а другой меньше числа $3a$? Отв.
213. Найдите наименьшее из значений x, для которых существуют числа y,z, удовлетворяющие уравнению $x^2+2y^2+z^2+xy-xz-yz=1$. *Подсказка*: рассмотрите квадратное уравнение относительно z, затем квадратное неравенство относительно y.	Найдите наибольшее из значений z, для которых существуют числа x,y, удовлетворяющие уравнению $x^2+2y^2+z^2+xy-xz+yz=3$. *Подсказка*: рассмотрите квадратное уравнение относительно x, затем квадратное неравенство относительно y.	Найдите наименьшее из значений x, для которых существуют числа y, z, удовлетворяющие уравнению $x^2+2y^2+2z^2+xy-xz+yz=2$. *Подсказка*: рассмотрите квадратное уравнение относительно z, затем квадратное неравенство относительно y. Отв. $x_{\min}=-\sqrt{3}$	Найдите наибольшее из значений z, для которых существуют числа x,y, удовлетворяющие уравнению $2x^2+2y^2+z^2+xy+xz+yz=4$. *Подсказка*: рассмотрите квадратное уравнение относительно x, затем квадратное неравенство относительно y. Отв. $z_{\max}=\sqrt{5}$

Отв. $x_{\min} = -\sqrt{\frac{7}{5}}$	Отв. $z_{\max} = \sqrt{7}$		
214. При каких значениях параметра *а* все действительные корни уравнения $3ax^2+(3a^3-12a^2-1)x-a(a-4)=0$ удовлетворяют условию $\lvert x \rvert < 1$?	При каких значениях параметра *а* уравнение $(a-1)x^2-(2a+1)x+2+5a=0$ имеет два действительных различных корня, больших 1 ?	При каких значениях параметра *а* уравнение $ax^2-(a^3+2a^2+1)x+a(a+2)=0$ имеет два действительных различных корня, принадлежащих отрезку [-2;2].	При каких значениях параметра *а* один из корней уравнения $(a^2+a+1)x^2+(2a-3)x+a-5=0$ меньше 1, а другой больше 1. $[-1;1]$
215. Найдите все значения параметра а, при которых отрезок $[1;3]$ принадлежит множеству решений неравенства $x^2-(a+2)x-2a^2+7a-3<0$ *Подсказка*:исп.БЗ 4.4. ММЗ: $\begin{cases} f(1)<0; \\ f(3)<0 \end{cases}$ где $f(x)=x^2-(a+2)x-2a^2+7a-$ Отв. $a<0; a>2.$	Найдите все значения параметра а, при которых отрезок $[1;2]$ принадлежит множеству решений неравенства $(2-a)x^2+(a^2-3a+3)x-a+1>0$ *Подсказка*:исп.БЗ 4.4. ММЗ: $\begin{cases} (2-a)f(1)<0; \\ (2-a)f(2)<0 \end{cases}$ при а>2. Исп.БЗ 4.1; 4.2 при а<2, где $f(x)=(2-a)x^2+(a^2-3a+3)x-a+1$ Отв. $a<2; a>3.$	Найдите все значения параметра а, при которых отрезок $[1;2]$ принадлежит множеству решений неравенства $(2a+4)x^2+(a^2-a-8)x-a+3>0$ *Подсказка*:исп.БЗ 4.4. ММЗ: $\begin{cases} (a+2)f(1)<0; \\ (a+2)f(2)<0 \end{cases}$ при а<-2. Исп.БЗ 4.1; 4.2 при а>-2, где $f(x)=(2a+4)x^2+(a^2-a-8)x-a+3$ Отв. $a\le-2; a>1.$	Найдите все значения параметра а, при которых неравенство $ax^2+(2a+4)x+5a+4<0$ имеет множество решений, которое не содержит положительных чисел, меньших 3. *Подсказка*:исп.БЗ 4.4. ММЗ: $\begin{cases} (a)f(0)<0; \\ (a)f(3)<0 \end{cases}$ при а<0, $\lambda=0; \lambda=4$ Исп.БЗ 4.1; 4.2 при а>0, где $\lambda=0; \lambda=3$ $f(x)=ax^2+(2a+4)x+5a+4$ Отв. $a\in[-1{,}25;1)$
216. Найдите все значения параметра а, при которых неравенство $ax^2+(2a+2)x+3a+1<0$ имеет множество решений, которое не содержит положительных чисел, меньших 4. *Подсказка*:исп.БЗ 4.4. ММЗ: $\begin{cases} (a)f(0)<0; \\ (a)f(4)<0 \end{cases}$ при а<0, $\lambda=0; \lambda=4$. Исп.БЗ 4.1; 4.2 при а>0, где $\lambda=0; \lambda=4$ $f(x)=ax^2+(2a+2)x+3a+1$	Найдите все значения параметра а, при которых неравенство $ax^2+(2a+8)x+17a+8<0$ имеет множество решений, которое не содержит положительных чисел, меньших 7. *Подсказка*:исп.БЗ 4.4. ММЗ: $\begin{cases} (a)f(0)<0; \\ (a)f(7)<0 \end{cases}$ при а<0, $\lambda=0; \lambda=7$. Исп.БЗ 4.1; 4.2 при а>0, где $\lambda=0; \lambda=7$ $f(x)=ax^2+(2a+8)x+17a+8$	Найдите все значения параметра а, при которых неравенство $4ax^2+(4a+8)x+5a+4<0$ имеет множество решений, которое не содержит положительных чисел, меньших 2,5. Отв. $a\in[-0{,}6;1)$	Найдите все значения параметра а, при которых неравенство $4ax^2+(4a+8)x+5a+4<0$ имеет множество решений, которое не содержит интервал чисел $(-3;-1)$. Отв.

Отв. $a \in \left[-\frac{1}{3};1\right)$.	Отв. $a \in \left[-\frac{8}{17};1\right)$.		
217. Найдите все значения параметра а, при которых решением неравенства $\lvert x-1\rvert+\lvert x-3\rvert \le \frac{3}{2}\lvert x-a\rvert+\frac{1}{2}(x-a)$ будет отрезок, длина которого не превосходит 2. Отв. $a \in (3;4]$. *Подсказка:* для выявления закономерности можно в с.к. XOY построить графики левой и правой частей неравенства при фиксированных а, например, $a \in \{0;1;2;3;4;5\}$.	Найдите все значения параметра а, при которых решением неравенства $\lvert x+2\rvert+\lvert x-3\rvert-3 \le \frac{3}{2}\lvert x-a\rvert+\frac{1}{2}(x-a)$ будет промежуток, длина которого не превосходит 6. Отв. $a \in (2;3]$. *Подсказка:* для выявления закономерности можно в с.к. XOY построить графики левой и правой частей неравенства при фиксированных а, например, $a \in \{0;1;2;3;4;5\}$.	Найдите все значения параметра а, при которых решением неравенства $\lvert x+2\rvert+2\lvert x-3\rvert-3 \le \frac{3}{2}\lvert x-a\rvert+\frac{1}{2}(x-a)$ будет промежуток, длина которого не превосходит 5. Отв. $a \in [0,5;2)$.	Найдите все значения параметра а, при которых решением неравенства $2\lvert x+2\rvert+2\lvert x-3\rvert-8 \le \frac{3}{2}\lvert x-a\rvert+\frac{1}{2}(x-a)$ будет промежуток, длина которого не превосходит 6. Отв. $a \in [-1;0)\cup(2;4,5]$.
БЗ№5 Задача решения систем квадратных уравнений. **ЗЗ. Системы, решаемые методом подстановки, способом введения новой переменной; графическим способом (в системе координат XOY).** **МЗ. Системы, решаемые функциональным методом (использующим свойства функций: чётность, монотонность, периодичность, ограниченность).** **НЗ. Системы, решаемые координатно-параметрическим методом (КПМ) в системе координат XOA); целые значения параметра.**			
218. Найдите все значения параметра μ, при которых система $\begin{cases} x+y=\mu, \\ x^2+y^2=6 \end{cases}$. имеет единственное решение. Отв: $\pm\sqrt{12}$	Найдите все значения параметра μ, при которых система $\begin{cases} x-y=\mu, \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$. имеет единственное решение. Отв: $\pm\sqrt{8}$	Найдите наибольшее, наименьшее значения выражения $x+y$, при условии $x^2+y^2=6$. Отв: $\pm\sqrt{12}$	Найдите наибольшее, наименьшее значения выражения $x-y$, при условии $x^2+y^2=4$. Отв: $\pm\sqrt{8}$
219. Числа *x, y, a* $\in$ *R*, таковы, что $\begin{cases} x+y=a-1; \\ xy=a^2-7a+14 \end{cases}$ При каких значениях *a* сумма x^2+y^2 принимает наибольшее значение? Отв. система	Действительные числа *x, y, a* $\in$ *R* таковы, что $\begin{cases} x+y=2a-1; \\ xy=a^2-9a+18 \end{cases}$ При каких значениях а сумма x^2+y^2 принимает наименьшее значение? Отв. система разрешима	Вычислите сумму действительных корней уравнения $x^2+2(a^2-3a)x-(6a^3-14a^2+4)=0$ и найдите значения параметра *a*, при которых она принимает наибольшее значение. *Краткий конспект решения:* $D=(a^2-1)(a^2-4)\ge 0$	Вычислите сумму ***квадратов*** действительных корней уравнения $x^2+2(a^2-3a)x-(6a^3-14a^2+4)=0$ и найдите значения параметра *a*, при которых она принимает максимальное значение. *Краткий конспект решения:*

разрешима при $a \in \left[\frac{11}{3};5\right]$. $x^2+y^2=9-(a-6)^2$ $f_{\max}(5)=8.$	при $a \in \left[\frac{71}{32};+\infty\right)$ $f_{\min}\left(\frac{71}{32}\right)=....$	$x_1+x_2=f(a)=2(3a-a^2)$ $f_{\max}(1)=4$. отв.1.	$x_1^2+x_2^2=f(a)=$ $=4(a^4-3a^3+a^2+1)$; $f_{\max}(0{,}25)=\frac{261}{64}$.
220. Решите систему $\begin{cases} y^2-x^2=a^2, \\ y-x=\frac{a}{3} \end{cases}$ при условии $y+x=18, a>0$. Отв.(8;10)	Решите систему $\begin{cases} y^2-x^2=8a, \\ y-x=a^2 \end{cases}$ при условии $y-x=2, a>0$. Отв.(7;9)	Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a) \\ (x+y)^2=14 \end{cases}$ имеет ровно два решения.	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=2a \\ xy=a-\frac{1}{2} \end{cases}$ имеет ровно два решения.
221. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=a \end{cases}$ имеет ровно одно решение. Отв. ± 2	Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=x+a \end{cases}$ имеет ровно одно решение. Отв. $\pm 2\sqrt{2}$	Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=x^2-a \end{cases}$ имеет ровно одно решение. Отв.а=-2; (0;2).	Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ (y-4)^2+x^2=a^2 \end{cases}$ имеет ровно одно решение. Отв. $\pm 2;\pm 6$.
222. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x=4+a \end{cases}$ не имеет решений. Отв.а>-1;а<-7.	Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y=4+a \end{cases}$ не имеет решений. Отв.а>-1;а<-7.	Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y=a-x \end{cases}$ не имеет решений. Отв.	Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y=3a+2x \end{cases}$ не имеет решений. Отв.
223. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2-y=1 \\ y+x=a \end{cases}$ имеет единственное решение. Поясните	Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y=1 \\ y-x=a \end{cases}$ имеет единственное решение. Поясните геометрический смысл	Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y-5=a(x+4) \end{cases}$ имеет единственное решение. Поясните геометрический смысл	Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ y-6=a(x-5) \end{cases}$ имеет единственное решение. Поясните геометрический смысл

геометрический смысл задачи. Отв. $-\frac{5}{4}$	задачи. Отв.	задачи. Отв.	задачи. Отв.
224. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x+5y=-5; \\ x^2+16xy+64y^2-12ax- \\ -96ay+45a^2+66a+121=0 \end{cases}$ имеет единственное решение. *Подсказка:*исключив x из второго уравнения, получим квадратное относительно y уравнение с дискриминантом $D_1=-(9a+33)^2$, которое имеет решения только при $a=-\frac{11}{3}$.	Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x-2y=5; \\ x^2+4xy+4y^2-18ax- \\ -36ay+85a^2+20a+25=0 \end{cases}$ имеет единственное решение. *Подсказка:* $x=2y+5\rightarrow$ $D_1=-(8a+20)^2$	При каких значениях $a\neq 6$ абсциссы всех общих точек графиков функций $f(x)=x^2+6x+a^2$; и $g(x)=x^2-ax+36$; больше , чем a^2? Подсказка: $(6+a)x=36-a^2$; $x_{общ}=6-a>a^2 \Leftrightarrow a\in(-3;2)$	При каких значениях $a\neq 4$ абсциссы всех общих точек графиков функций $f(x)=x^2+8x+4a^2$; и $g(x)=x^2+2ax+64$; не больше , чем a^2? $x_{общ}=8+2a\leq a^2 \Leftrightarrow$ Подсказка: $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\geq 4; \\ a\leq -4. \end{array}\right.$
225. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнения $x^2+3x+7a-21=0$ и $x^2+6x+5a-6=0$ имеют хотя бы один общий корень. Отв. $a\in\left\{3;-\frac{33}{4}\right\}$.Укажите условие существования корней. Подсказка:выразите параметр a из обоих уравнений и приравняйте их. Уравнение имеет корни $x_1=-3; x_2=-10,5$, им соответствуют $a_1=3; a_2=-8,25$	Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнения $x^2+4x-3a+7=0$ и $x^2+7x-5a+15=0$ имеют хотя бы один общий корень. Отв. $a\in\{1;7,75\}$.Укажите условие существования корней. Подсказка:выразите параметр a из обоих уравнений и приравняйте их. Уравнение имеет корни $x_1=-2; x_2=2,5$, им соответствуют $a_1=1; a_2=7,75$		
226. Найдите все пары **целых чисел (x,y),** являющихся решениями системы уравнений: $\begin{cases} (3x^2-y-11)(x-2)=0; \\ x^2+2y^2=6. \end{cases}$	Найдите все пары **целых чисел (x,y),** являющихся решениями системы уравнений: $\begin{cases} (2x^2+y-3)(x-1)=0; \\ x^2-2y^2=-1. \end{cases}$	Решите систему уравнений $\begin{cases} xy-x-y=-1; \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$ Отв $(1;3);(3;1);(1;-3);(-3;1)$	Решите систему уравнений $\begin{cases} -xy+x+y=7; \\ x^2+y^2=13. \end{cases}$

227. Решите систему уравнений $\begin{cases} \lvert x\rvert-3\lvert y\rvert=2; \\ x+3\lvert y\rvert=8. \end{cases}$	Решите систему уравнений $\begin{cases} \lvert x\rvert+2\lvert y\rvert=9; \\ x-2\lvert y\rvert=-3. \end{cases}$	Решите систему уравнений $\begin{cases} (x-2)^2-2(y+3)^2=2x+y-1; \\ x^2+y^2-4x+6y=-13. \end{cases}$ Отв.(2;-3).	Решите систему уравнений $\begin{cases} (x+1)^2+(y+2)^2=x+3y+7; \\ x^2+y^2+2x+4y=-5. \end{cases}$ Отв.(-1;-2).
228. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} \left((x-2)^2+(y-3)^2\right)\left((x-8)^2+(y-2)^2\right)\le 0; \\ (x-2a)^2+(y-a)^2\le 4a^2 \end{cases}$ имеет ровно одно решение. Отв. при $a\in[1;2)\cup(13;34]$одно решение.	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (x-a)^2+(y-a)^2=5a^4; \\ 2x^2+2y^2=5xy \end{cases}$ имеет ровно два решения. Отв. при $a=5$два решения	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (x-2a)^2+(y-2a)^2=5a^4; \\ 3x^2+3y^2=10xy \end{cases}$ имеет ровно два решения. Отв. при два решения	
229. (ЕГЭ2015) Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y=a(x-1); \\ \lvert x^2+y^2-1\rvert=2x-2y-2. \end{cases}$ имеет более двух решений. Отв.при $a\in(1;2)$более двух решений.	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y=0.5x+a; \\ \lvert 2x^2+y^2-1\rvert+(y)^2+4y=0. \end{cases}$ имеет два или три корня. Отв.при $a\in\left(-1-\frac{\sqrt{30}}{4};-\frac{3}{8}\right)\cup\left(-\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ 2 или 3 корня.	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 3y=2x+a; \\ \lvert x^2-x-6\rvert=(y-1)^2+x-7. \end{cases}$ имеет ровно один или два корня. Отв.при $a\in(-\infty;-10)$ 2 корня; при $a\in(-9;-2]$1или 2 корня; при $a\ge 3$ 1или 2 корня.	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 3y=2x+a; \\ \lvert x^2-x-6\rvert=(y-1)^2+x-7. \end{cases}$ имеет ровно три или четыре корня. Отв. при $a\in[-10;-9]$3 или 4 корня.
230. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнени $\begin{cases} -x+y+3z=a; \\ 2x^2+y^2=3x-2y+z. \end{cases}$ имеет единственное решение. Отв.при $a=-\frac{33}{4}$одно решение. *Подсказка:*	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} -x-3y+2z=x^2+3y^2; \\ x-3y-4z=a. \end{cases}$ имеет единственное решение. Отв.при $a=3{,}5$ одно решение. *Подсказка:*	Найдите все положительные значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (x-2a+3)^2+(y-a)^2=2{,}25; \\ (x+3)^2+(y-a)^2=a^2+2a+1. \end{cases}$ имеет единственное решение. Отв.при $a=\frac{1}{6}; a=2{,}5$ одно решение. *Подсказка:*	Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений $\begin{cases} (\lvert x\rvert-5)^2+(y-4)^2=9 \\ (x+2)^2+y^2=a^2 \end{cases}$. Отв. $2, \sqrt{65}+3$

$6x^2-10x+3y^2+7y=a \Leftrightarrow$ $6\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+3\left(y+\frac{7}{6}\right)^2=a+\frac{33}{4}$	$x^2+0.5x+3y^2+4.5y=-0.5a \Leftrightarrow$ $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+3\left(y+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{28-8a}{16}$	$O_1(2a-3;a), O_2(-3;a), O_1O_2=2a;$ $\left[\begin{array}{l}O_1O_2=R_1+R_2=1{,}5+a+1=2a;\\ O_1O_2=\lvert R_1-R_2\rvert=\lvert a-0{,}5\rvert=2a.\end{array}\right.$	
231. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}(x+3)^2+(y-9)^2=25;\\ y=\lvert x-a\rvert+4\end{cases}$ имеет три различных решения. Отв.-3; $5\sqrt{2}-8; 2-5\sqrt{2}$	Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}(x+3)^2+(y-9)^2=25;\\ y=14-\lvert x-a\rvert\end{cases}$ имеет три различных решения. Отв.-3; $5\sqrt{2}-8; 2-5\sqrt{2}$	Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}(x+3)^2+(y-9)^2=25;\\ y=\lvert x-a\rvert+4\end{cases}$ имеет четыре различных решения.	Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}(x+3)^2+(y-9)^2=25;\\ y=14-\lvert x-a\rvert\end{cases}$ имеет четыре различных решения.
232. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}y=\lvert x-a\rvert+3a;\\ y=\lvert x^2-4x-5\rvert+1.\end{cases}$ имеет ровно три корня. Отв. при $a\in\left\{0;\frac{49}{16}\right\}$ 3 корня. *Подсказка*: **линия** вершин «галочек»- прямая y=3x.	Найдите все решения системы уравнений $\begin{cases}\left\lvert y+\frac{1}{x}\right\rvert+\left\lvert x-y+\frac{13}{6}\right\rvert=\frac{13}{6}+x+\frac{1}{x};\\ x^2+y^2=\frac{97}{36},\end{cases}$ удовлетворяющие условиям x<0, y>0. Отв. $\left(-\frac{3}{2};\frac{2}{3}\right);\left(-\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right);$ *Подсказка*: используйте схемы равносильных преобразований.	Найдите все значения параметра a, *при* каждом из которых система $\begin{cases}\lvert x^2-5x+4\rvert-9x^2-5x+4+10x\lvert x\rvert=\\ x^2-2(a-1)x+a(a-2)=0\end{cases}$ имеет единственное решение. **Отв.** $a=-1, 1<a<3, 4<a\le 6$	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}\lvert x^2-7x+6\rvert+x^2+5x+6-12\lvert x\rvert=0;\\ x^2-2(a-2)x+a(a-4)=0\end{cases}$ имеет ровно два решения. отв. $a\in\{1;2\}\cup[5;6]$
233. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений $\begin{cases}x^2+(y-6)^2=36;\\ \sqrt{x^2+(y-18)^2}+\sqrt{x^2+(y-18)^2}=\\ =\sqrt{a^2+324}.\end{cases}$ Отв. $\pm 6\sqrt{3}$	Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений $\begin{cases}x^2+(y-5)^2=25;\\ \sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y)^2}=\\ =\sqrt{a^2+225}.\end{cases}$ (Отв. $\pm 5\sqrt{3}$).	Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}x^2+y^2=2(1+a)\\ (x+y)^2=14\end{cases}$ имеет ровно два решения. Отв. 2,5.	Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}x^2+y^2=2a\\ xy=a-\frac{1}{2}\end{cases}$ имеет ровно два решения отв.а=0,25.
234. Найдите все значения параметра a,	Найдите все значения параметра a, при каждом	Найдите площадь фигуры, заданной на координатной	Найдите площадь фигуры, заданной на координатной

при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений $\begin{cases} y = 2+\sqrt{-x^2-2x}; \\ (x-a)^2+(y+2a)^2=1. \end{cases}$	из которых имеет единственное решение система уравнений $\begin{cases} y=\sqrt{5+4x-x^2}+2, \\ y=\sqrt{9-a^2+2ax-x^2}+a. \end{cases}$ отв. $[-1;\,2)\cup(2;\,5]$	плоскости XOY с помощью комбинированной системы с модулем: $\begin{cases} \left\lvert \lvert x-y\rvert-\lvert y+1\rvert \right\rvert = 2y-x+1, \\ (x+1)^2+(y+1)^2\le 2 \end{cases}$ Отв. $\frac{\pi}{4}$	плоскости XOY с помощью комбинированной системы с модулем: $\begin{cases} \left\lvert \lvert x-y\rvert-\lvert y-2\rvert \right\rvert = x-2y+2, \\ (x-2)^2+(y-2)^2\le 3 \end{cases}$ Отв. $\frac{3\pi}{8}$.
235. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0 \\ 2x^2-4x+3+y^3=0 \end{cases}$ Отв. $(1;-1)$. *Подсказка*: из первого уравнения следует, что $y^2=\frac{2x}{1+x^2}\le 1$. Из второго $2(x-1)^2+1+y^3=0 \Leftarrow$ $x=1;y=-1.$	Решите систему уравнений $\begin{cases} y^2-xy+1=0 \\ x^2+2x=-y^2-2y-1 \end{cases}$ Отв. $(-2;1)$	Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+4x^2y^2+4y=0 \\ 4x^3-4y^2-4y-5=0 \end{cases}$ Отв. $(1;-0{,}5)$	Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2-xy^2+4=0 \\ x^2+y^2+4=4x+2y \end{cases}$ Отв. $(2;2)$
236. Найдите все значения параметра a, при которых существует только **одно** значение x, удовлетворяющее системе уравнений. $\begin{cases} \lvert x^2-5x+4\rvert-9x^2-5x+4+10x\lvert x\rvert=0 \\ x^2-2(a-1)x+a(a-2)=0 \end{cases}$ отв. $a\in\{-1\}\cup(1;3)\cup(4;6)$. *Подсказка*: постройте график функции в левой части первого уравнения, во втором уравнении исп. теорему Ф. Виета.	Найдите все значения параметра a, при которых существует только **одно** значение x, удовлетворяющее системе уравнений. $\begin{cases} \lvert x^2+5x+4\rvert-9x^2+5x+4-10x\lvert x\rvert=0 \\ x^2-2(a+1)x+a(a+2)=0 \end{cases}$ отв. $a\in\{1\}\cup[-6;-4)\cup(-3;-1$ *Подсказка*: постройте график функции в левой части первого уравнения, во втором уравнении исп. теорему Ф. Виета.	Найдите все значения параметра a, при которых существует ровно **два** значения x, удовлетворяющих системе уравнений: $\begin{cases} \lvert x^2-7x+6\rvert+x^2+5x+6-12\lvert x\rvert=0 \\ x^2-2(a-2)x+a(a-4)=0 \end{cases}$ отв. $a\in\{1\}\cup\{2\}\cup[5;6]$	Найдите все значения параметра a, при которых существует ровно **два** значения x, удовлетворяющих системе уравнений: $\begin{cases} \lvert x^2+7x+6\rvert+x^2-5x+6-12\lvert x\rvert=0 \\ x^2-2(a+2)x+a(a+4)=0 \end{cases}$ отв. $a\in\{-2\}\cup\{-1\}\cup[-6;-5]$
237. Числа *x, y, z* таковы, что $x^2+3y^2+z^2=2$. Какое наименьшее значение может принимать выражение 2x+y-z. *Подсказка*: ММЗ: при каких минимальных a система	Числа a, b, c таковы, что $2a^2+b^2+c^2=3$. Какое наименьшее значение может принимать выражение a-2b+c. Отв. $a_{\min}=-\sqrt{\frac{33}{2}}$	Числа p, q, r таковы, что $3p^2+q^2+r^2=4$. Какое наибольшее значение может принимать выражение p+q-2r. Отв. $a_{\max}=\frac{8}{\sqrt{3}}$	Числа u, v, w таковы, что $u^2+v^2+2w^2=5$. Какое наименьшее значение может принимать выражение v-2w-u. Отв. $a_{\min}=-2\sqrt{5}$.

$\begin{cases}x^2+3y^2+z^2-2=0;\\ a=2x+y-z\end{cases}$ имеет решения? Далее исключаем z из первого и решаем квадратное уравнение относительно x с дискриминантом от y, который неотрицателен при $a^2\le\frac{32}{3}$. $a_{\min}=-\sqrt{\frac{32}{3}}$			
238. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых графики функций $y=\frac{3x+1}{x}$ и $y=\frac{4x+3a-7}{ax-1}$ разбивают координатную плоскость ровно на пять частей. Отв. $a\in[0;1]$	Найдите все значения параметра a, *при* каждом из которых система $\begin{cases}\lvert x^2-5x+4\rvert-9x^2-5x+4\\ x^2-2(a-1)x+a(a\end{cases}$ имеет единственное решение.	Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений $\begin{cases}(\lvert x\rvert-5)^2+(y-4)^2=9\\ (x+2)^2+y^2=a^2\end{cases}$.	
239. Решите систему уравнений $\begin{cases}3x^2-xy-y^2-4x+y-7=0;\\ 2x^2-5xy-3y^2+7y-2=0\end{cases}$ *Подсказка*: из четырёх попыток выразить одно неизвестное через другое удачным оказывается выражение из второго уравнения y через x или x через y: $\left[\begin{aligned}x&=1-\frac{y}{2};\\ x&=3y-1;\end{aligned}\right.$ что приводит к совокупности двух систем. Отв. $(3;-4);(-3;8);$ $(-1;0);\left(\frac{67}{29};-\frac{32}{29}\right)$	Решите систему уравнений $\begin{cases}5x^2-2xy+10y^2-6x-10y+5=0;\\ x^2-4xy+y^2-2x-3y-7=0\end{cases}$ *Подсказка*:из четырёх проб выразить одно неизвестное через другое удачной не оказалась ни одна. Попробуем тогда выделить сумму квадратов в первом уравнении: Первое уравнение имеет корни $\left(\frac{5}{7};\frac{4}{7}\right)$.	Решите систему уравнений $\begin{cases}3x^2-xy-y^2-4x+y-7=0;\\ 5x^2-6xy-4y^2-4x+8y-9=0\end{cases}$ *Подсказка*:попробуйте вычесть первое уравнение из второго и затем разложить на множители. Отв. $(3;-4);(-3;8);$ $(-1;0);\left(\frac{67}{29};-\frac{32}{29}\right)$	Решите систему уравнений $\begin{cases}4x^2+4y^2+4z^2+17=8x+4y+16z;\\ 3x-4y+12z=12.\end{cases}$ Ответ: $\left(\frac{10}{13};\frac{21}{26};\frac{14}{13}\right)$. Решение. Сфера $(x-1)^2+(y-0{,}5)^2+(z-2)^2=1$ с центром в точке $C(1;0{,}5;2)$; $R=1$ и плоскость $\alpha: 3x-4y+12z=12$ касаются в одной точке, т.к. расстояние $\rho(C;\alpha)=1=R$. Координаты точки касания находятся из решения системы (пересечение перпендикулярной прямой и плоскости) $\begin{cases}\frac{x-1}{3}=\frac{y-0{,}5}{-4}=\frac{z-2}{12}=t;\\ 3x-4y+12z=12.\end{cases}$
240. Найдите все	Решите систему	Найдите все значения	Найдите все значения

положительные значения а, при которых система уравнений $\begin{cases}(x-2a+3)^2+(y-a)^2=2,\\(x+3)^2+(y-a)^2=a^2+2(\end{cases}$ имеет **единственное решение.** Отв. $a\in\left\{\frac{1}{6};2{,}5\right\}$. Подсказка: рассмотрите все возможные случаи взаимного расположения двух окружностей на плоскости.	уравнений $\begin{cases}4x^2+4y^2+4z^2+17=8x+4y+16z;\\3x-4y+12z=12.\end{cases}$ Ответ: $\left(\frac{10}{13};\frac{21}{26};\frac{14}{13}\right)$. Решение. Сфера $(x-1)^2+(y-0{,}5)^2+(z-2)^2=$ с центром в точке $C(1;0{,}5;2);\quad R=1$ и плоскость $\alpha:3x-4y+12z=12$ касаются в одной точке, т.к. расстояние $\rho(C;\alpha)=1=R$. Координаты точки касания находятся из решения системы (пересечение перпендикулярной прямой и плоскости) $\begin{cases}\frac{x-1}{3}=\frac{y-0{,}5}{-4}=\frac{z-2}{12}=t;\\3x-4y+12z=12.\end{cases}$	параметра a, при каждом из которых имеет **единственное решение** система уравнений $\begin{cases}x^2+(y-6)^2=36;\\\sqrt{x^2+(y-18)^2}+\sqrt{x^2+(y-18)^2}=\\=\sqrt{a^2+324}.\end{cases}$	параметра a, при каждом из которых имеет **единственное решение** система уравнений $\begin{cases}x^2+(y-5)^2=25;\\\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y)^2}=\\=\sqrt{a^2+225}.\end{cases}$
241. (МФТИ 1999) Решите систему уравнений $\begin{cases}x^2-4x-2y-1=0;\\y^2-2x+6y+14=0\end{cases}$ Отв.(3;-2).	(МФТИ 1999) Решите систему уравнений $\begin{cases}x^2-4x+4y+27=0;\\y^2+2x+8y+10=0.\end{cases}$ Отв.(1;-6).	(МФТИ 1999) Решите систему уравнений $\begin{cases}x^2-6x-3y-1=0;\\y^2+2x+9y+14=0.\end{cases}$ Отв.(2;-3).	(МФТИ 1999) Решите систему уравнений $\begin{cases}x^2+7x-y+11=0;\\y^2+3x-y+15=0.\end{cases}$ Отв.(-5;1).
242. (МГУ 1979) Решите систему уравнений $\begin{cases}10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0\\3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0.\end{cases}$ Отв.(2;1). *Подсказка: первое уравнение рассматриваем как квадратное относительно x и вычисляем его дискриминант* $D(y)=-(7y-7)^2$	(МГУ 1979) Найдите те решения системы уравнений $\begin{cases}y^2-4xy+4y-1=0;\\3x^2-2xy-1=0.\end{cases}$ которые удовлетворяют условию $x\cdot y>0$. Отв.(1;1). *Подсказка: подстановка приводит к уравнению 4 степени, корни которого определяются по правилу «нулевой суммы коэффициентов уравнения».*	(МГУ 1979) Решите систему уравнений $\begin{cases}x^2+2y^2-2xy+2x-8y+10=0;\\2x^2+3y^2-7xy+13x-4y-7=0.\end{cases}$ Отв.(2;3).	(МГУ 1979) Найдите те решения системы уравнений $\begin{cases}x^2-3xy+6x-1=0;\\y^2-xy-2=0.\end{cases}$ которые удовлетворяют условию $x\cdot y>0$. Отв.(1;2). *Подсказка: подстановка приводит к уравнению 4 степени, корни которого определяются по теореме о целых корнях уравнения с целыми коэффициентами.*
243. (МГУ 1981) Решите систему уравнений $\begin{cases}x^2y^2-2x+y^2=0;\\2x^2-4x+3+y^3=0.\end{cases}$	(МГУ 1981) Решите систему уравнений $\begin{cases}y^2-xy+1=0;\\x^2+2x=-y^2-2y-1.\end{cases}$	(МГУ 1981) Решите систему уравнений $\begin{cases}x^2+4x^2y^2+4y=0;\\4x^3-4y^2-4y-5=0.\end{cases}$	(МГУ 1981) Решите систему уравнений $\begin{cases}x^2-xy^2+4=0;\\x^2+y^2+4=4x+2y.\end{cases}$

Отв.(1;-1). *Подсказка:см.примеры решений.*	Отв.(-2;-1). Подсказка:выразите x из первого и получите условия на x, используя свойства функции $y+\frac{1}{y}$. Исп.геом .смысл второго уравнения.	Отв.(1;-0,5). *Подсказка:если рассматривать первое как квадр.отн. y, то из неотрицательности дискриминанта получим ограничения на x.Выделяя во втором полный квадрат по y, методом оценки получим систему* $\begin{cases}4x^3=4;\\(2y+1)^2+4=4.\end{cases}$	Отв.(2;2). Подсказка: найдите дискриминант $D(y)$ первого уравнения и получите ограничения на y. Исп.геом .смысл второго уравнения.
244. (МГУ 1979) Решите систему уравнений $\begin{cases}3x^2+2y^2-3x+5y=3;\\4{,}5x^2+3y^2-3x+8y=7.\end{cases}$ Отв. $(2;-1);\left(\frac{12}{7};-\frac{1}{7}\right)$. *Подсказка: используйте пропорциональность старших коэффициентов и линейные преобразования уравнений для упрощения.*	(МГУ 1979) Решите систему уравнений $\begin{cases}2x^2+y^2+x-2y=1;\\5x^2+2{,}5y^2+3x-4y=4.\end{cases}$ Отв. $(-1;2);\left(\frac{7}{9};\frac{10}{9}\right)$. *Подсказка: используйте пропорциональность старших коэффициентов и линейные преобразования уравнений для упрощения.*	(МГУ 1979) Решите систему уравнений $\begin{cases}2x^2-4y^2-1{,}5x+y=0;\\3x^2-6y^2-2x+2y=0{,}5.\end{cases}$ Отв. $(1;0{,}5);(-3;2{,}5)$. *Подсказка: используйте пропорциональность старших коэффициентов и линейные преобразования уравнений для упрощения.*	(МГУ 1979) Решите систему уравнений $\begin{cases}5x^2+y^2+4x-8y=-7;\\2x^2+0{,}4y^2+2x-3y=-1{,}6.\end{cases}$ Отв. $(1;4);\left(-\frac{5}{9};\frac{64}{9}\right)$. *Подсказка: используйте пропорциональность старших коэффициентов и линейные преобразования уравнений для упрощения.*
245. (МГУ 1979) Решите систему уравнени $\begin{cases}2x^2+y^2-4x+2y=1;\\3x^2-2y^2-6x-4y=5\end{cases}$ *Подсказка:пропорциональность коэффициентов подскажет, на какие числа домножить уравнения перед тем, как сложить (или вычесть) их.* Отв. $(1-\sqrt{2};-1);(1+\sqrt{2};1)$	(МГУ 1979) Решите систему уравнени $\begin{cases}3x^2+2y^2+12x-4y=-8\\2x^2-y^2+8x+2y=-9\end{cases}$ *Подсказка:пропорциональность коэффициентов подскажет, на какие числа домножить уравнения перед тем, как сложить (или вычесть) их.* Отв. $\left(2-\sqrt{\frac{2}{7}};1+3\sqrt{\frac{2}{7}}\right);\left(-2-\sqrt{\frac{2}{7}};1-3\sqrt{\frac{2}{7}}\right)$	(МГУ 1979) Решите систему уравнени $\begin{cases}3x^2-y^2-12x+4y=-11;\\4x^2+2y^2-16x-8y=-18\end{cases}$ *Подсказка:пропорциональность коэффициентов подскажет, на какие числа домножить уравнения перед тем, как сложить (или вычесть) их.* Отв. $(2;2+\sqrt{3});(2;2-\sqrt{3})$	(МГУ 1979) Решите систему уравнени $\begin{cases}5x^2-3y^2+10x-12y=17;\\2x^2+y^2+4x+4y=-2\end{cases}$ *Подсказка:пропорциональность коэффициентов подскажет, на какие числа домножить уравнения перед тем, как сложить (или вычесть) их.* Отв. $(-1+\sqrt{2};-2);(-1-\sqrt{2};-2)$.
246. (МГУ 1980) Решите систему уравнени $\begin{cases}3x^2+2xy-9x-4y+6=0;\\5x^2+2xy-12x-4y+4=0.\end{cases}$ Отв. $(2;y),y\in R;\quad(-0{,}5;2{,}25$ *Подсказка:1 способ: упрощение системы уравнений методом линейных преобразований. 2 способ:рассматриваем первое*	(МГУ 1980) Решите систему уравнени $\begin{cases}2xy+y^2-4x-3y+2=0;\\xy+3y^2-2x-14y+16=0.\end{cases}$ Отв. $(x;2),x\in R;\quad(-1;3)$. *Подсказка:1 способ: упрощение системы уравнений методом линейных преобразований. 2 способ:рассматриваем одно из уравнений как квадратное*	(МГУ 1980) Решите систему уравнени $\begin{cases}3x^2+xy-2x+y-5=0;\\2x^2-xy-3x-y-5=0.\end{cases}$ Отв. $(-1;y),y\in R;\quad(2;-1)$.. *Подсказка:1 способ: упрощение системы уравнений методом линейных преобразований. 2 способ:рассматриваем одно из уравнений как квадратное*	(МГУ 1980) Решите систему уравнени $\begin{cases}xy+3y^2-x+4y-7=0;\\2xy+y^2-2x-2y+1=0.\end{cases}$ Отв. $(x;1),x\in R;\quad(2;-3)$. *Подсказка:1 способ: упрощение системы уравнений методом линейных преобразований. 2 способ:рассматриваем*

уравнение как квадратное относительно x и исследуем его дискриминант. Получится ли этот способ, если взять второе уравнение, или рассмотреть уравнение как квадратное относительно y?	*относительно x или y и исследуем его дискриминант.*	*относительно x или y и исследуем его дискриминант.*	*одно из уравнений как квадратное относительно x или y и исследуем его дискриминант.*
247. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} y=(a+2)x^2+2ax+a-1= \\ x=(a+2)y^2+2ay+a-1= \end{cases}$ имеет ровно одно решение. Ответ: при $a=-2 \Rightarrow \exists!\ \left(-\frac{3}{5};-\frac{3}{5}\right)$. *Подсказка: замечая симметрию системы приходим к необходимому условию единственности решения: $(x;x)$ при a=-2.Затем проверяем достаточность этого условия.* *2-ой способ заключается в* ***вычислении разности уравнений*** *и разложении на множители.*	Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} y=(a+3)x^2+2ax+a-1=0; \\ x=(a+3)y^2+2ay+a-1=0 \end{cases}$ имеет ровно одно решение. Ответ: при $a\in\left\{-3;\frac{13}{12}\right\}\Rightarrow$. $\exists!\ \left(-\frac{4}{7};-\frac{4}{7}\right);\left(-\frac{1}{7};-\frac{1}{7}\right)$. *Подсказка: замечая симметрию системы приходим к необходимому условию единственности решения: $(x;x)$ при $a\in\left\{-3;\ \frac{13}{12}\right\}$.* *Затем проверяем достаточность этого условия.* *2-ой способ заключается в* ***вычислении разности уравнений*** *и разложении на множители.*	(МФТИ 2009).Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} x^2-y+a=0; \\ x+y^2+a=0 \end{cases}$ имеет ровно одно решение. Ответ: при $a=\frac{1}{4}\Rightarrow\exists!\ \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.	(МФТИ 2009).Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} x^2+y+a=0; \\ x+y^2+a=0 \end{cases}$ имеет ровно одно решение. Ответ: при $a=\frac{1}{4}\Rightarrow\exists!\ \left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.
248. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a); \\ (x+y)^2=14 \end{cases}$ имеет ровно два решения. Найдите эти решения. Отв. a=2,5; $\left(\sqrt{\frac{7}{2}};\sqrt{\frac{7}{2}}\right);\left(-\sqrt{\frac{7}{2}};-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ *Подсказка: заметим, что неизвестные входят в уравнения четным и симметричным способом.*	Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} x^2+y^2=2a; \\ xy=a-0{,}5 \end{cases}$ имеет ровно два решения. Найдите эти решения. Отв. a=0,25; $(0{,}5;-0{,}5);(-0{,}5;0{,}5)$ *Подсказка: заметим, что неизвестные входят в уравнения четным и симметричным способом.*	Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} (x-y)^2=\frac{2}{3}; \\ xy=5a-\frac{1}{3} \end{cases}$ имеет ровно два решения. Найдите эти решения. Отв. $a=\frac{1}{30}$; $\left(\sqrt{\frac{1}{6}};-\sqrt{\frac{1}{6}}\right);\left(-\sqrt{\frac{1}{6}};\sqrt{\frac{1}{6}}\right)$. *Подсказка: заметим, что неизвестные входят в уравнения четным и симметричным способом.*	Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} (x-y)^2=6a-14; \\ x^2+y^2=3(2+a) \end{cases}$ имеет ровно два решения. Найдите эти решения. Отв. $a=\frac{7}{3}$. *Подсказка: заметим, что неизвестные входят в уравнения четным и симметричным*

			способом.
249. (МГУ1987). Найдите все значения пар параметров a,b при каждой из которых система уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 + (x+y) = x - y + a; \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0 \end{cases}$ имеет не менее пяти решений. Ответ: не менее 5 (точнее, бесконечное множество) решений система имеет при a 1 -1 $a \in R$ b -2 -2 2 *Подсказка: разложите первое уравнение на множители, тогда система распадётся на две более простые системы с одним квадратным уравнением.*	(МГУ1987). Найдите все значения пар параметров a,b при каждой из которых система уравнений $\begin{cases} bx(2x-y) + (y-1)(2x-y) = bx + y - 1; \\ 4x^2 + y^2 + axy - 1 = 0 \end{cases}$ имеет не менее пяти решений. Ответ: не менее 5 (точнее, бесконечное множество) решений система имеет при a -4 4 b $b \in R$ 2 *Подсказка: разложите первое уравнение на множители, тогда система распадётся на две более простые системы с одним квадратным уравнением.*	(МГУ1987). Найдите все значения пар параметров a,b при каждой из которых система уравнений $\begin{cases} (x+y)(x-ay) + 2(x+y) = 2(x - ay + 2); \\ x^2 + y^2 - bxy - 4 = 0 \end{cases}$ имеет не менее пяти решений. Ответ: не менее 5 (точнее, бесконечное множество) решений система имеет при a $a \in R$ 1 b -2 2 *Подсказка: разложите первое уравнение на множители, тогда система распадётся на две более простые системы с одним квадратным уравнением.*	(МГУ1987). Найдите все значения пар параметров a,b при каждой из которых система уравнений $\begin{cases} (x-2y)^2 + a(x-2y) = x - 2y + a; \\ x^2 + 4y^2 - bxy - 1 = 0 \end{cases}$ имеет не менее пяти решений. Ответ: не менее 5 (точнее, бесконечное множество) решений система имеет при a $a \in R$ b 4 *Подсказка: разложите первое уравнение на множители, тогда система распадётся на две более простые системы с одним квадратным уравнением.*
250. (МГУ 1988) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} axy + x - y + 1{,}5 = 0; \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$ имеет единственное решение. Найдите это решение. Отв. при a=-0,5; $\exists!\left(-\frac{4}{3};\frac{1}{2}\right)$. При a=1 $\exists!\left(-\frac{8}{7};\frac{1}{6}\right)$. При $a = \frac{-7 \pm 4\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \exists!$ *Подсказка: контрольными значениями параметра, подлежащие исследованию, являются: 1)значения параметра, при которых старший коэффициент уравнения равен нулю;2) значения параметра, при которых дискриминант равен нулю; 3)*	(МГУ 1988) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} xy + 3y + 2 = 0; \\ x(y + 1 - a) + y(2a - 3) + a + 3 = 0 \end{cases}$ имеет единственное решение. Найдите это решение. Отв. $a \in \{1;3;5{,}5\}$. *Подсказка: контрольными значениями параметра, подлежащие исследованию, являются: 1)значения параметра, при которых старший коэффициент уравнения равен нулю;2) значения параметра, при которых дискриминант равен нулю; 3) значения параметра, при которых корень, зависящий от параметра, не принадлежит ОДЗ.*	(МГУ 1988) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} xy + y - 1 = 0; \\ a(xy - x - y + 1) + x - y + 1{,}5 = 0 \end{cases}$ имеет единственное решение. Найдите это решение. Отв. $a \in \{1;2;4{,}5\}$. *Подсказка: контрольными значениями параметра, подлежащие исследованию, являются: 1)значения параметра, при которых старший коэффициент уравнения равен нулю;2) значения параметра, при которых дискриминант равен нулю; 3) значения параметра, при которых корень, зависящий от параметра, не принадлежит ОДЗ.*	(МГУ 1988) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} xy + 2y - x = 0; \\ y(x + 2a - 4) - ax - y + 5 = 0 \end{cases}$ имеет единственное решение. Найдите это решение. Отв. $a \in \{2;3;3{,}5\}$. *Подсказка: контрольными значениями параметра, подлежащие исследованию, являются: 1)значения параметра, при которых старший коэффициент уравнения равен нулю;2) значения параметра, при которых дискриминант равен нулю; 3) значения параметра, при которых корень, зависящий от параметра, не принадлежит ОДЗ.*

значения параметра, при которых корень, зависящий от параметра, не принадлежит ОДЗ.			
251. **(ЕГЭ 2023).** Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}(x^2+y^2+6x)\cdot\sqrt{x+y+6}=0;\\ y=x+a;\end{cases}$ имеет ровно два различных решения. Ответ: при $a\in[0;6]\cup\{3-3\sqrt{2};3+3\sqrt{2}\}$ система уравнений имеет два различных решения.	(МЗ)Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}(x^2+y^2+6x)\cdot\sqrt{x+y+6}=0;\\ y=x+a;\end{cases}$ имеет ровно три различных решения. Ответ: при $a\in(3-3\sqrt{2};0)\cup(6;3+3\sqrt{2})$ система уравнений имеет три различных решения.	(МЗ)Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}(x^2+y^2+6x)\cdot\sqrt{x+y+6}=0;\\ y=x+a;\end{cases}$ имеет ровно два различных решения. Ответ: при $a<3-3\sqrt{2};\quad a>3+3\sqrt{2}$ система уравнений имеет одно решение.	(Л.31.17)Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $(x^2-3x-4)\sqrt{4-4x+x^2}=ax-2a$ имеет: 1) ровно имеет 3 различных корня; 2) ровно 2 различных корня. Ответ: при $a\in(-6;6)\Rightarrow 3k.$ Подсказка: постройте графики левой и правой частей уравнения.
252. **(ЕГЭ 2023,В312).** Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}(x^2-6x-y+2)\cdot\sqrt{x-y+2}=0;\\ y=ax+a;\end{cases}$ имеет ровно два различных решения. Ответ: при $a\in\left[\frac{9}{8};2\right)\cup\{-2;\quad 1\}$ система уравнений имеет два различных решения.	**(ЕГЭ 2023,В311).** Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}(x^2-7x-y+8)\cdot\sqrt{x-y+8}=0\\ y=ax+a;\end{cases}$ имеет ровно два различных решения. Ответ: при $a\in\left[\frac{16}{9};8\right)\cup\{-1;\quad 1\}$ система уравнений имеет два различных решения.	**(ЕГЭ 2023, В402№17).** Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}(\lvert x+2\rvert+\lvert x-1\rvert-y)\cdot\sqrt{10-x-y}=0\\ y=x+a;\end{cases}$ имеет ровно два различных решения. Ответ: при $a\in[4;32)\cup\{2\}$ система уравнений имеет два различных решения.	(МЗ)При каждом значения параметра а найдите количество решений системы уравнений $\begin{cases}(\lvert x+1\rvert+\lvert x-3\rvert-y)\cdot\sqrt{10-x-y}=0;\\ y=ax+2a.\end{cases}$
253. **(ЕГЭ 2023, В310№17).** Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}(x^2-5x-y+3)\cdot\sqrt{x-y+3}=0;\\ y=ax+a;\end{cases}$	(МЗ)Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}(x^2-5x-y+3)\cdot\sqrt{x-y+3}=0;\\ y=ax+a;\end{cases}$ имеет ровно три различных решения.	(МЗ)Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}(x^2-5x-y+3)\cdot\sqrt{x-y+3}=0;\\ y=ax+a;\end{cases}$ имеет одно решение. Ответ: при a<-1;a>3	(МЗ)При каждом значения параметра а найдите количество решений системы уравнений $\begin{cases}(x^2-5x-y+3)\cdot\sqrt{x-y+3}=0;\\ y=ax+2a.\end{cases}$

имеет ровно два различных решения. Ответ: при $a \in \left[\frac{9}{7};3\right) \cup \{-1;\quad 1\}$ система уравнений имеет два различных решения.	Ответ: при $a \in (-1;\quad 1) \cup \left(1;\frac{9}{7}\right)$ система уравнений имеет три различных решения.	система уравнений имеет одно решение.	
254. **(ЕГЭ 2023, В401№17).** Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}(\lvert x+1\rvert+\lvert x-3\rvert-y)\cdot\sqrt{10-x-y}=0\\ y=x+a;\end{cases}$ имеет ровно два различных решения. Ответ: при $a \in [2;26) \cup \{1\}$ система уравнений имеет два различных решения.	(МЗ)Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}(\lvert x+1\rvert+\lvert x-3\rvert-y)\cdot\sqrt{10-x-y}=0;\\ y=x+a;\end{cases}$ имеет ровно три различных решения. Ответ: при $a \in (1;2)$ система уравнений имеет три различных решения.	(МЗ)Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}(\lvert x+1\rvert+\lvert x-3\rvert-y)\cdot\sqrt{10-x-y}=0;\\ y=x+a;\end{cases}$ имеет ровно одно решение. Ответ: при a<1;a>26 система уравнений имеет одно решение.	(МЗ)При каждом значения параметра а найдите количество решений системы уравнений $\begin{cases}(\lvert x+1\rvert+\lvert x-3\rvert-y)\cdot\sqrt{10-x-y}=0;\\ y=2x+a.\end{cases}$
255.			

БЗ№6 Задача решения квадратных неравенств и систем квадратных неравенств.

ЗЗ. Основные формулировки: 1)при каких а неравенство выполняется при всех x? 2)при каких а неравенство не выполняется ни при каких x?(соотношением знаков старшего коэффициента и дискриминанта); 3)при всех значениях параметра решите неравенство.
МЗ. Две основные формулировки: при каких а неравенство выполняется при всех x из интервала (или другого промежутка)?
При каких а неравенство не выполняется ни при каких x из интервала (или другого промежутка) ?

НЗ. Задание областей с помощью неравенств; решение задачи линейного программирования.

Целые значения параметра или неизвестного.

256. Для каждого значения а решите систему	Для каждого значения а решите систему $\begin{cases}x^2-5x+4>0\\ x>a\end{cases}$.	Для каждого значения а решите систему $\begin{cases}x^2-4x+3>0\\ x<a\end{cases}$.	Докажите, что для любого x > 0 выполнено неравенство $x^2+\pi x+7{,}5\pi\sin x>0$.

$\begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ x<a \end{cases}$. Отв.	Отв.	Отв.	
257. Решите систему неравенств $\begin{cases} (1+x)^2 \ge 16; \\ (2x-7)^2 < 9. \end{cases}$	Решите систему неравенств $\begin{cases} (2+x)^2 \ge 9; \\ (2x+1)^2 < 25. \end{cases}$	Решите систему неравенств $\begin{cases} \lvert x+3\rvert \le 6; \\ \lvert 2x+5\rvert \ge 11. \end{cases}$	Решите систему неравенств $\begin{cases} \lvert x+1\rvert \le 12; \\ \lvert 2x-9\rvert \ge 13. \end{cases}$
258. Найдите наименьшее целое решение системы неравенств $\begin{cases} -\dfrac{t^2-16}{18}-\dfrac{t}{3} \le 0; \\ \lvert t+2\rvert > 1. \end{cases}$	Найдите наименьшее целое решение системы неравенств $\begin{cases} -\dfrac{t^2-28}{9}-\dfrac{t}{3} \le 0; \\ \lvert t+3\rvert > 2. \end{cases}$	Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2\lvert x^2-25\rvert \le 9(x^2-25); \\ x(x-6) \ge x-6. \end{cases}$	Решите систему неравенс $\begin{cases} x^2\lvert x^2-49\rvert \le 16(x^2-49); \\ x(x-9) \ge x-9. \end{cases}$
259. Решите неравенство $(3x^2+0{,}7x-2{,}8)^5 \ge (x^2+5x-2,$. *Подсказка:* 1сп. –использование монотонность функции t^5; 2 сп.-использование ФСУ.	Решите неравенство $\left(5x^2+\frac{1}{3}x-2\right)^3 \le \left(x^2+\frac{1}{3}x+4\right)^3$. *Подсказка:* 1сп. –используем монотонность функции t^3; 2 сп.-используем ФСУ.	Решите неравенство $(5x^2+0{,}7x-2{,}7)^7 \ge (x^2+4x-2{,}7)^7$ *Подсказка:* 1сп. –использование монотонность функции t^7; 2 сп.-использование ФСУ(проблематично?).	Решите неравенство $\left(4x^2+\frac{1}{6}x-2\right)^3 \le \left(3x^2+\frac{1}{6}x+4\right)^3$ *Подсказка:* 1сп. –используем монотонность функции t^3; 2 сп.-используем ФСУ.
260. Решите неравенство $(x\sqrt{5}-2)(4x\sqrt{5}+2)+(x\sqrt{5}+2)^2 \le 0$ Отв. $x \in \left[0; \dfrac{2}{5\sqrt{5}}\right]$	Решите неравенство $(x\sqrt{7}-3)(7x\sqrt{5}+3)+(x\sqrt{7}+3)^2 \le 0.$	Решите неравенство $(8x^2-6x+1)\sqrt{-25x^2+15x-2} \ge 0$ Отв. $[0{,}2;0{,}25] \cup \{0{,}4\}$	
261. Решите неравенство не менее, чем тремя способами $\lvert 6x+7\rvert > 7-2x.$	Решите неравенство не менее, чем тремя способами $\lvert 5x+1\rvert > 1-4x.$	Решите неравенство не менее, чем тремя способами $\lvert 4x-5\rvert \ge (4x-5)^2.$	Решите неравенство не менее, чем тремя способами $\lvert 3x-1\rvert \ge (3x-1)^2.$
262. Решите неравенство $\left(x^2-\frac{5}{3}x+\frac{19}{3}\right)^2-\left(x^2-\frac{5}{3}x-\frac{16}{3}\right)^2$	Решите неравенство $\left(x^2-\frac{8}{5}x+\frac{22}{5}\right)^2-\left(x^2-\frac{8}{5}x-\frac{17}{5}\right)^2>0$	Решите неравенство $\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{18}{5}\right)^4 > \left(x^2-\frac{1}{2}x-\frac{13}{5}\right)^4$	Решите неравенство $\left(x^2-\frac{1}{3}x+\frac{18}{5}\right)^6 < \left(x^2-\frac{1}{3}x-\frac{13}{5}\right)^6$
263. Решите неравенство $(x^2-7x)^2+18x^2-126x+72<0$ *Подсказка*: замена $t=x^2-7x$	Решите неравенство $(x^2-9x)^2+4x^2-36x-140<0$	Решите неравенство	Решите неравенство $6(4x+1)(x^2+9x+3)<$ $<9(4x+1)^2+(x^2+9x+3)^2$

		$6(4x+3)(x^2-x+9)<$ $<9(4x+3)^2+(x^2-x+9)^2$ *Подсказка:*это однородное неравенство второй степени вида $6ab<9a^2+b^2$	
264. Решите неравенство $(3x-8)(x^2-4x-2)\geq$ $\geq\|3x-8\|\cdot\|x^2-x+9\|$ *Подсказка:* докажите, неравенство $\|a\|\geq a, a\in R.$ Тогда исходное неравенство равносильно уравнению при условии неотрицательной левой части. *Отв.* $\left[2-\sqrt{6};\frac{8}{3}\right]\cup\left[2-\sqrt{6};+\infty\right)$	Решите неравенство $(4x-9)(x^2-5x-4)\geq$ $\geq\|4x-9\|\cdot\|x^2-5x-4\|$ Отв: $\left[\frac{5-\sqrt{41}}{2};\frac{9}{4}\right]\cup\left[\frac{5+\sqrt{41}}{2};+\infty\right.$ *Подсказка:* 1-й способ – по определению; 2-й сп. – по схеме равносильных преобразований.	Решите неравенство $(x^2+1{,}5x+0{,}7)^2+(x^2+4{,}2x+0{,}862)^2\leq$ $(x^2+2{,}5x+0{,}76)^2+(x^2+3{,}2x+0{,}802)^2$ *Подсказка: сгруппируйте первое слагаемое с третьим; второе с четвёртым, обнаружится общий множитель…* *Отв.х=-0,6.*	Решите неравенство $(x^2+1{,}5x+0{,}7)^2+(x^2+4{,}2x+0{,}862)^2\leq$ $(x^2+2{,}5x+0{,}76)^2+(x^2+3{,}2x+0{,}802)^2$ *Подсказка: сгруппируйте* *первое слагаемое с третьим; второе с четвёртым,* *обнаружится общий множитель…* *Отв.х=0,15*
265. Найдите абсциссы всех тех точек графика функции $f(x)=-14x^2+13$, расстояние от каждой из которых до оси абсцисс не больше расстояния до оси ординат. *Подсказка:* постройте на одной с.к. графики $f(x)=14x^2+13; y=x; y=-x$.	Найдите абсциссы всех тех точек графика функции $f(x)=-13x^2+12$, расстояние от каждой из которых до оси абсцисс не больше расстояния до оси ординат. *Подсказка:* постройте на одной с.к. графики $f(x)=-13x^2+12; y=x; y=-x\cdot$		
266. При каких значениях а неравенство $x^2+(2a+4)x+8a+1>0$ выполняется при всех значениях х? Отв.1<a<3	При каких значениях а неравенство $x^2-(2a+2)x+3a+7\leq 0$ не выполняется ни при каких значениях х? Отв.-2<a<3	При каких значениях а неравенство $x^2+(2a+4)x+8a+1<0$ не выполняется ни при каких значениях х? Отв.	При каких значениях а неравенство $x^2-(2a+2)x+3a+7>0$ выполняется при всех значениях х? Отв.
267. При каких значениях а неравенство $ax^2-4x+3a+1>0$ выполняется при всех значениях х>0? Отв.1<a	При каких значениях а неравенство $ax^2-4x+3a+1>0$ выполняется при всех значениях х<0?	При каких значениях а неравенство $ax^2-4x+3a+1>0$ не выполняется при всех значениях х>0?	При каких значениях а неравенство $ax^2-4x+3a+1>0$ не выполняется при всех значениях х<0?

	Отв. $1<a$. Подсказка: рассмотрите два случая: 1) $\begin{cases} a>0; \\ D(a)<0; \end{cases}$ 2) $0<x_1<x_2 \Leftrightarrow$ БЗ4 $\begin{cases} D>0; \\ x_B>0; \\ af(0)>0 \end{cases}$	Отв.	Отв.
268. При всех значениях параметра решите неравенство $x^2+(2a+4)x+8a+1>0$ Отв $1) a\in(1;3) \Rightarrow x\in R;$ $2) a\in\{1;3\} \Rightarrow x\in R-\{-3;-5\}$ $3) a\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty) \Rightarrow$ $x\in\left(-\infty;-a-2-\sqrt{a^2-4a+3}\right)\cup$ $\cup\left(-a-2-\sqrt{a^2-4a+3};+\infty\right)$	При всех значениях параметра решите неравенство $x^2-(2a+2)x+3a+7\le 0$	При всех значениях параметра решите неравенство $x^2+(2a+4)x+8a+1<0$	При всех значениях параметра решите неравенство $x^2-(2a+2)x+3a+7>0$
269. При каких значениях параметра *a* неравенство *(x-3a)(x-a-3)<0* выполняется при всех *x* из отрезка [1;3] ? *Подсказка:оба числа 1 и 3 принадлежат интервалу между корнями 3a и a+3. Это БЗ4.4.*	При каких значениях параметра *a* неравенство *(x-4a)(x-a-4)<0* не выполняется при всех *x* из отрезка [1;4] ?	При каких значениях параметра *a* неравенство *(x-3a)(x-a-3)<0* не выполняется при всех *x* из отрезка [1;3] ?	При каких значениях параметра *a* неравенство *(x-4a)(x-a-4)<0* выполняется при всех *x* из отрезка [1;4] ?
270. При каких положительных значениях параметра **a** во множестве решений неравенства $2ax^2-(4a-3)x-6<0$ можно разместить два отрезка длиной 2, не имеющих общих точек? Отв. $a\in(0;0{,}75)$. *Подсказка*: математическая модель задачи:	При каких отрицательных значениях параметра **a** во множестве решений неравенства $ax^2-(3-2a)x-6>0$ можно разместить два отрезка длиной 2, не имеющих общих точек? Отв. $a\in(-0{,}5;0)$.	При каких значениях параметра $a\in R$ во множестве решений неравенства $2ax^2-(4a-3)x-6<0$ можно разместить два отрезка длиной 2, не имеющих общих точек? Отв. $a\in(-\infty;0{,}75)$.	При каких значениях параметра $a\in R$ во множестве решений неравенства $ax^2-(3-2a)x-6>0$ можно разместить два отрезка длиной 2, не имеющих общих точек? Отв..

$\begin{cases} a>0; \\ D(a)>0; \\ \lvert x_1-x_2\rvert>4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0; \\ \left\lvert 2+\dfrac{3}{2a}\right\rvert>4 \end{cases}$	$\begin{cases} a<0; \\ D(a)>0; \\ \lvert x_1-x_2\rvert>4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0; a\neq -1{,}5; \\ \left\lvert 2+\dfrac{3}{a}\right\rvert>4. \end{cases}$		
271. Найдите все решения неравенства или уравнения, лежащие в заданном промежутке. cos (3/2) - 4x - $x^2 \geq 0$, -21/5<x<0. Отв. $x\in\left[-2-\sqrt{4+\cos 1{,}5};0\right)$	Найдите все решения неравенства или уравнения, лежащие в заданном промежутке. x^2 + 2x + cos5 < 0, $x\in\left[-2;-\dfrac{1}{3}\right]$. Отв. $x\in\left(-1-\sqrt{1-\cos 5};-\dfrac{1}{3}\right]$	Найдите все решения неравенства или уравнения, лежащие в заданном промежутке. tg (5/2) + 6x - x^2 > 0, $x\in[0{,}25;6]$. Отв. $x\in\left[0{,}25;3+\sqrt{9+tg\,2{,}5}\right)$	Найдите все решения неравенства или уравнения, лежащие в заданном промежутке. x^2 - 2x + sin (7/2) $\leq$ 0, $x\in\left(-\dfrac{1}{3};2\right)$ Отв. $x\in\left[1-\sqrt{1-tg 3{,}5};2\right)$
272. Найдите все значения параметра *а*, при которых неравенство $\dfrac{8x^2-20x+16}{4x^2-10x+7}\leq a$ верно при всех $x\in R$. Отв. $a\geq\dfrac{14}{3}$.	Найдите все значения параметра *а*, при которых неравенство $\dfrac{6x^2-2x+1}{9x^2-3x+1}\geq a$ является верным при всех значениях $x\in R$. Отв.т.к. $E(\varphi)=\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{10}{9}\right]$, то $a\leq\dfrac{2}{3}$	Найдите все значения параметра а , при которых неравенство $\dfrac{8x^2-4x+3}{4x^2-2x+1}\leq a$ является верным при всех значениях $x\in R$. Отв. $a\geq\dfrac{10}{3}$.	Найдите все значения параметра а , при которых неравенство $\dfrac{3x^2-4x+8}{9x^2-12x+16}\geq a$ является верным при всех значениях $x\in R$. Отв. $a\leq\dfrac{1}{3}$.
273. Найдите все значения α, при которых решения системы неравенств $\begin{cases} x^2+6x+7+\alpha\leq 0 \\ x^2+4x+7\leq 4\alpha \end{cases}$ образуют на числовой прямой отрезок единичной длины. *Подсказка: постройте график системы неравенств в КПП ХОА*	Найдите все значения α, при которых система неравенств $\begin{cases} x^2+4x+3\leq\alpha \\ x^2-2x\leq 3-6\alpha \end{cases}$ имеет единственное решение.	Найдите все значения параметра а, при которых все решения неравенства $\dfrac{x-2}{x-5}<0$ удовлетворяют неравенству x^2+(4-a)x-4a+4>0.	
274. Укажите наименьшее целое значение **а**, при котором неравенство $-x^2-4x+3-a<0$ выполняется при любых значениях x. Отв.8.	Укажите наименьшее целое значение **а**, при котором неравенство $x^2+2ax+16<0$ не выполняется ни при каких значениях x.	Найдите все значения параметра а, при которых неравенство $\left\lvert\dfrac{x^2+ax+1}{x^2+x+1}\right\rvert<3$ выполняется для всех	

	Отв.-4.	значений x. Отв. $a \in (-1;5)$. Подсказка:возведите в квадрат и разложите как разность квадратов.	
275. Найдите все такие значения параметра a, при которых множество решений неравенства $(x+1)(a-x) \geq 0$ содержит ровно два целых числа. Отв. $a \in [0;1) \cup (-3;-2]$	Найдите все такие значения параметра a, при которых множество решений неравенства $(x+1)(a-x) \geq 0$ содержит ровно три целых числа. Отв.	Найдите все такие значения параметра a, при которых множество решений неравенства $(x+1)(a-x) > 0$ содержит ровно два целых числа. Отв. $a \in [-4;-3) \cup (1;2]$	Найдите все такие значения параметра a, при которых множество решений неравенства $(x+1)(a-x) > 0$ содержит ровно одно целое число. Отв. $a \in [-3;-2) \cup (0;1]$
276. При каких целых значениях p неравенство $(p+x)(x-7) < 0$ имеет ровно три натуральных решения? Отв.	При каких целых значениях p неравенство $(x-p)(x-6) < 0$ имеет ровно четыре натуральных решения? Отв.		
277. Найдите все такие значения параметра a, при которых множество решений неравенства $(x+1)(a-x) > 0$ не содержит ни одного целого числа. Отв. $a \in [-2;0]$	Найдите все такие значения параметра a, при которых множество решений неравенства $(x+2)(a-x) > 0$ не содержит ни одного целого числа. Отв.	Найдите все такие значения параметра a, при которых множество решений неравенства $(x+3)(a-x) > 0$ не содержит ни одного целого числа. Отв.	Найдите все такие значения параметра a, при которых множество решений неравенства $(x+4)(a-x) > 0$ не содержит ни одного целого числа. Отв.
278. Найдите все такие значения параметра **a**, при которых множество решений неравенства $x^2(x+1)(a-x) \geq 0$ содержит ровно два натуральных числа. Отв. $a \in [2;3)$	Найдите все такие значения параметра **a**, при которых множество решений неравенства $x^2(x+1)(a-x) \geq 0$ не содержит ни одного натурального числа. Отв. $a \in (-\infty;1)$	Найдите все такие значения параметра **a**, при которых множество решений неравенства $x^2(x+1)(a-x) \geq 0$ содержит ровно три натуральных числа. Отв.	Найдите все такие значения параметра **a**, при которых множество решений неравенства $x^2(x+1)(a-x) \leq 0$ содержит только два целых числа. Отв.
279. Найдите все значения параметра *a*, при которых неравенство	Найдите все значения параметра *a*, при которых неравенство	Найдите все значения параметра a , при которых неравенство	Найдите все значения параметра a , при которых

$\frac{8x^2-20x+16}{4x^2-10x+7} \le a$ верно при всех $x \in R$.	$\frac{6x^2-2x+1}{9x^2-3x+1} \ge a$ является верным при всех значениях $x \in R$.	$\frac{8x^2-4x+3}{4x^2-2x+1} \le a$ является верным при всех значениях $x \in R$.	неравенство $\frac{3x^2-4x+8}{9x^2-12x+16} \ge a$ является верным при всех значениях $x \in R$.
280. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых неравенство $3-\lvert x-a\rvert > x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение. Отв. $a \in \left(-\frac{13}{4};3\right)$.	Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2 < 4-\lvert x-a\rvert$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.	Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $2 > \lvert x+a\rvert + x^2$ имеет хотя бы одно положительное решение.	Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2+\lvert x-a\rvert < 1$ имеет хотя бы одно положительное решение.
281. При каких значениях параметра а множество решений неравенства $\frac{ax^2-(2-a)x-2}{2x-3} < 0$ содержит ровно четыре целых числа? Отв. $\left[-0{,}4;-\frac{1}{3}\right)$	При каких значениях параметра а множество решений неравенства $\frac{4x^2-(2a-6)x-3a}{x+3} < 0$ содержит ровно семь натуральных чисел? Отв. $[14;16)$	При каких значениях параметра а множество решений неравенства $\frac{3x^2-(a-6)x-2a}{3x+2} > 0$ содержит ровно пять целых отрицательных чисел? Отв. $(-24;-21]$	При каких значениях параметра а множество решений неравенства $\frac{2x^2-(a+6)x+3a}{2x-7} > 0$ содержит ровно пять целых отрицательных чисел? Отв. $(-12;-10]$
282. Найдите наименьшее значение выражения $x+y$, если известно, что $xy=9; x>0$. Отв.6. *Подсказка*: попробуйте обойтись без производной.	Найдите наименьшее значение выражения $2a+b$, если известно, что $ab=8; b>0$. Отв.8.	Найдите наименьшее значение выражения $3z+2t$, если известно, что $zt=6; z>0$. Отв.12.	Найдите наименьшее значение выражения $x+\frac{81}{x}, x>0$ Отв.18.
283. Самолёт пролетел путь от А до В по ветру и путь от В до против ветра, причём скорость ветра не менялась. В другой раз самолёт совершил полёт по тому же маршруту в безветренную погоду. В обоих случаях моторы самолёта развивали одинаковую мощность. В каком случае на весь полёт ушло меньше времени?	Два тракториста могут вспахать поле за t_1 дней. Если бы первый тракторист вспахал половину поля, а затем второй остальную часть, то потребовалось бы t_2 дней. Докажите, что $t_2 \ge 2t_1$.	Докажите, что правильная дробь с положительными членами увеличивается с увеличением числителя и знаменателя на одно и то же положительное число, а неправильная дробь уменьшается.	Два туриста вышли из пункта А в пункт В. Первый турист **половину затраченного времени** от начала движения шёл со скоростью v_1 км/час, затем со скоростью v_2 км/час. Второй же турист **первую половину пути** шёл со скоростью v_1 км/час, а вторую половину пути со скоростью v_2 км/час. Кто из них затратил меньше времени на прохождение пути от А до В?

Подсказка: математическая модель задачи: сравнить две дроби $\frac{x}{x^2-a^2} \vee \frac{1}{x}$.			Отв. первый.
284. В фигуру, ограниченную параболой $y=4-x^2$ и ось. ОХ, помещён прямоугольник,две вершины которого лежат на параболе, а две- на оси ОХ. Найдите наибольший из периметров этих прямоугольников. Отв.10.	В фигуру, ограниченную параболой $y=4-x^2$ и ось. ОХ, помещён прямоугольник,две вершины которого лежат на параболе, а две- на оси ОХ. Найдите наибольшую из площадей этих прямоугольников. Отв. $3{,}5\sqrt{2}$.	В фигуру, ограниченную параболой $y=9-x^2$ и ось. ОХ, помещён прямоугольник,две вершины которого лежат на параболе, а две- на оси ОХ. Найдите наибольший из периметров этих прямоугольников.	В фигуру, ограниченную параболой $y=9-x^2$ и ось. ОХ, помещён прямоугольник,две вершины которого лежат на параболе, а две- на оси ОХ. Найдите наибольшую из площадей этих прямоугольников. Отв..
285. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{(x+3)(x+12)}{x}, x>0$ Отв.27.	Найдите наименьшее значение выражения $\frac{4x^2-7x+25}{x}, x>0$ Отв.13.	Найдите наименьшее значение выражения $\frac{x^4+x^2+1}{x^2+1}$. Отв.1.	Найдите наибольшее значение выражения $\frac{x}{x^2+16}, x>0$. Отв. $\frac{1}{8}$.
286. Теплоход прошёл путь АВ по течению реки и обратно. Докажите, что средняя скорость теплохода в этом движении меньше его собственной скорости (собственная скорость теплохода и скорость течения реки постоянны).	Докажите, что если произведение двух положительных чисел есть число постоянное, то их сумма будет наименьшей, если эти числа равны.	Докажите, что если сумма двух положительных чисел есть число постоянное, то их произведение будет наименьшим, если эти числа равны.	Докажите, что среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше, чем их среднее геометрическое, т.е. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$; $a \geq 0; b \geq 0$. Покажите, что равенство возможно лишь при a=b.
287. (МФТИ).Решите систему неравенств $\begin{cases} 4x^2+y^2+8x \leq 0; \\ xy+y+1 \leq 0. \end{cases}$ **Отв.** $\left(-1+\frac{1}{\sqrt{2}};-\sqrt{2}\right);\left(-1-\frac{1}{\sqrt{2}};\sqrt{2}\right.$ *Краткий конспект геометрического решения*: система задаёт множество точек, расположенных внутри эллипса $(x+1)^2+\frac{y^2}{4} \leq 1$ или на его границе, а также одновременно на гиперболе $y=-\frac{1}{x+1}$.Имеем	**Решите систему неравенств** $\begin{cases} x^2+9y^2-18y \leq 0; \\ 2x+3-2xy \leq 0. \end{cases}$ **Отв.** $\left(\frac{3}{\sqrt{2}};1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(-\frac{3}{\sqrt{2}};1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ *Краткий конспект алгебраического решения*:складывая первое неравенство со вторым, умноженным на три, получим $(x-3y+3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x=3y-3$; Исключая х из исходной системы, получим	**Решите систему неравенств** $\begin{cases} y^2+3xy+1 \leq 0; \\ 9x^2-12x-8y \leq 0. \end{cases}$ **Отв.** $\left(\frac{\sqrt{8}}{3};1-\sqrt{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{8}}{3};1+\sqrt{2}\right)$	**Решите систему неравенств** $\begin{cases} 3x^2+2xy+3 \leq 0; \\ y^2+6y+18x \leq 0. \end{cases}$ **Отв.** $\left(-1+\sqrt{2};-3\sqrt{2}\right)$; $\left(-1-\sqrt{2};3\sqrt{2}\right)$

систему уравнений $\begin{cases} y = -\frac{1}{x+1}; \\ x^2 + 2x + \frac{1}{4(x+1)^2} = 0. \end{cases}$ Замена $x+1=t$ приводит второе уравнение к виду $4t^4 - 4t^2 + 1 = 0; t^2 = 0,5;$ $x_{1,2} = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; y_{1,2} = -\frac{}{x_{1,2}}$	$\begin{cases} 2y^2 - 4y + 1 \le 0; \\ 2y^2 - 4y + 1 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow 2y^2 - 4y + 1 = 0$ Решив систему, равносильную исходной $\begin{cases} x = 3y - 3; \\ 2y^2 - 4y + 1 = 0; \end{cases}$ получим решения исходной системы.		
288. (МФТИ). Рассматриваются всевозможные параболы, ветви которых направлены вниз, касающиеся оси абсцисс и прямой $y = 0,5x - 3.$ Найдите уравнение той из них, для которой сумма расстояний от начала координат до точек пересечения параболы с осями минимальна.		Найдите минимальное значение произведения xy, где x и y удовлетворяют системе $\begin{cases} x + y = 3a - 1 \\ x^2 + y^2 = 4a^2 - 2a + 2 \end{cases}$ отв. (-0.9)	
289. На координатной плоскости XOY изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению: $x^2 + y^2 - 2x + 4\|y+1\| = 0.$ *Подсказка: определите нули подмодульного выражения и примените метод областей в плоскости XOY.* Отв.(1;-1)	На координатной плоскости XOY изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению: $x^2 - 8\|x-1\| + y^2 + 8y = 1.$ *Подсказка: определите нули подмодульного выражения и примените метод областей в плоскости XOY.* Отв. дуги окружностей: 1) $\begin{cases} x \ge 1; \\ (x-4)^2 + (y+4)^2 = 25; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 1; \\ (x+4)^2 + (y+4)^2 = 41; \end{cases}$	На координатной плоскости XOY изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению: $x^2 + y^2 - 8\|x-1\| + 8\|y+1\| = 9.$	На координатной плоскости XOY изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению: $\|x+y\| + x \cdot \|x+1\| = 0.$ *Подсказка: определите нули подмодульного выражения и примените метод областей в плоскости XOY.*
290. Найдите все значения параметра *a*, при которых система $\begin{cases} (x+2)^2 + y^2 = a \\ \|x\| + \|y-1\| = 1 \end{cases}$	Найдите все значения параметра *a*, при которых система имеет единственное решение	Найдите все значения параметра *a*, при которых система имеет единственное решение	

имеет единственное решение.	$\begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2=a\\ \lvert x\rvert+\lvert y\rvert=1\end{cases}$	$\begin{cases}x^2+y^2=a,\\ \lvert x-1\rvert+\lvert y+1\rvert=1\end{cases}$	
291. Постройте на координатной плоскости XOY множество точек M (x;y), при подстановке координат которых в данные уравнения относительно a эти уравнения будут иметь один действительный корень: $(2x+y)a^4+(4-xy)a^2+$ $+y+\lvert y\rvert=0$	Постройте на координатной плоскости XOY множество точек M (x;y), при подстановке координат которых в данные уравнения относительно a эти уравнения будут иметь один действительный корень: $(8-x^2-y^2)a^4+(2-x^2-y)a^2+$ $+\sqrt{x^2-2xy+y^2}+x-y=0$	Постройте на координатной плоскости XOY множество точек M (x;y), при подстановке координат которых в данные уравнения относительно a эти уравнения будут иметь три действительных корня: $(y-x)a^4+(y-2)a^2+$ $+\lvert x+y\rvert+x+y=0$	Постройте на координатной плоскости XOY множество точек M (x;y), при подстановке координат которых в данные уравнения относительно a эти уравнения будут иметь три действительных корня: $(4-x^2)a^4+$ $+(x^2y^2-1)a^2+$ $+\lvert y-2\rvert+y-2=0$
БЗ№7 Задача решения квадратных уравнений, неравенств и систем с параметром, содержащих модуль. **ЗЗ. Задачи, решаемые методом интервалов, графическим способом (в системе координат XOY).** **МЗ. Задачи, решаемые координатно-параметрическим методом (КПМ) в системе координат XOA); целые значения параметра.** **Н.З. Задачи, решаемые с использованием схем равносильных преобразований выражений с модулями-см**			
292. Докажите неравенство $a\ge-\lvert a\rvert$	Докажите неравенство $\lvert a\rvert\ge a$	Докажите неравенство $\lvert a+b\rvert\le\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$	Докажите неравенство $\lvert a-b\rvert\ge\lvert\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\rvert$
293. Докажите неравенство $\lvert a-1\rvert+\lvert a-2\rvert\ge1.$ *Подсказка:* используйте геометрический смысл модуля.	Докажите неравенство $\lvert a-5\rvert+\lvert a-2\rvert\ge3.$	Докажите неравенство $\lvert a-1\rvert+\lvert a-2\rvert+\lvert a-3\rvert\ge2$	Докажите неравенство $\lvert a-1\rvert+\lvert a-2\rvert+$ $+\lvert a-3\rvert+\lvert a-4\rvert\ge4$
294. Докажите, что если $a+b=1$, то $a^2+b^2\ge\frac{1}{2}$. *Подсказка:* используйте геометрический смысл уравнений.	Докажите, что если $a^2+b^2=1$, то $\lvert a+b\rvert\le\sqrt{2}$, то *Подсказка:* используйте геометрический смысл уравнений.	Докажите, что если $a^2+b^2+c^2=1$, то $\lvert a+b+c\rvert\le\sqrt{3}$, то *Подсказка:* используйте геометрический смысл уравнений (можно использовать сферические координаты).	Решите уравнение, испоплзуя равносильный переход: $\lvert 8x^3-5x-2\rvert=$ $\lvert 8x^3+4x^2+3x+2\rvert.$ Отв.-1;-0,5;0;0,25.

295. Докажите схемы равносильных преобразований $\lvert f(x)\rvert = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ -f(x)=g(x) \end{array}\right. \end{cases}$ и, используя их, решите уравнения:	Докажите схемы равносильных преобразований $\lvert f(x)\rvert + \lvert g(x)\rvert = f(x)+g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$; и, используя их, решите уравнения:	Докажите схемы равносильных преобразований $\lvert f(x)\rvert + \lvert g(x)\rvert = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{cases}$ и, используя их, решите уравнения:	Докажите схемы равносильных преобразований $\lvert f(x)\rvert + \lvert g(x)\rvert = f(x)+g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$; и, используя их, решите уравнения:
296. $\lvert x^2-3x-3\rvert = \lvert x^2-2x+5\rvert$ Отв.-8;2;0,5.	$\lvert x^3-3x-3\rvert = \lvert x^3+3x^2+3\rvert$ Отв.-4;-2;0;1,5.	$\lvert x^3-3x-3\rvert = \lvert x^3+3x^2+3\rvert$ Отв.0; $\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{4}$.	$\lvert x^2+3x-1\rvert = \lvert x^2-7x+3\rvert$ Отв.0,4;1.
297. Докажите схемы равносильных преобразований $\lvert f(x)\rvert \ge f(x) \Leftrightarrow x\in D($; $\lvert f(x)\rvert > f(x) \Leftrightarrow f(x)<0$; и, используя их, решите неравенства:	Докажите схемы равносильных преобразований $\lvert f(x)\rvert < f(x) \Leftrightarrow x\in\varnothing$; $\lvert f(x)\rvert \le f(x) \Leftrightarrow f(x)\ge 0$ и, используя их, решите неравенства:	Докажите схемы равносильных преобразований $\lvert f(x)\rvert \le g(x) \Leftrightarrow$ $-g(x)\le f(x)\le g(x)$ и, используя их, решите неравенства:	Докажите схемы равносильных преобразований и, используя их, решите неравенства:
298. Решите неравенство $x^2-\lvert 5x-3\rvert - x<2$ отв. $x\in\left(-5;3+\sqrt{8}\right)$	Решите неравенство $3x^2-\lvert x-3\rvert > 9x-2$ Отв. $x<\dfrac{4-\sqrt{19}}{3}; x>\dfrac{4+\sqrt{19}}{3}$	Решите неравенство $x^2+4\ge\lvert 3x+2\rvert - 7x$ Отв. $x\le -5-\sqrt{13}; x\ge -2+\sqrt{2}$	Решите неравенство $\lvert x-2\rvert \le 2x^2-9x+9$ Отв. $x\le\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}; x\ge\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}$
299. Найдите все корни уравнения $\lvert x^2+x-1\rvert = 2x-1$, удовлетворяющие неравенству $x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	Найдите все корни уравнения $1+x+\lvert x^2-x-3\rvert = 0$, удовлетворяющие неравенству $x+\dfrac{\sqrt{14}}{3}>0$.	Найдите все корни уравнения $2\lvert x^2+2x-5\rvert = x-1$, удовлетворяющие неравенству $x<\sqrt{2}$.	Решите уравнение: $\left\lvert \dfrac{x^2}{2}-2x-\dfrac{3}{2}\right\rvert + \left\lvert \dfrac{x^2}{2}-3x+4\right\rvert = \dfrac{3}{4}$ Отв. $\dfrac{10+\sqrt{86}}{4}; \dfrac{5+\sqrt{2}}{2}$.

300. Постройте график функции $y=\|x+2\|+\|x^2-1\|+\|x-2\|$. При каждом значении параметра а определите количество корней уравнения $y(x)=a$.	Постройте график функции $y=\|x^2-4x-5\|+\|x^2-2x-3\|$. При каждом значении параметра a определите количество корней уравнения $y(x)=a$.	Постройте график функции $y=\|x^2-4x\|-5$. При каждом значении параметра а определите количество корней уравнения $y(x)=a$.	Постройте график функции $y=\frac{(x^2-4x-5)\cdot(x+3)}{\|x+1\|}$. При каждом значении параметра а определите количество корней уравнения $y(x)=a$.
301. Найдите площадь фигуры, которая задаётся на координатной плоскости следующими условиями: $\begin{cases} \|\,\|x-y\|-\|y-1\|\,\| = x-2y+ \\ (x-1)^2+(y-1)^2\le 1 \end{cases}$ Отв. $\frac{\pi}{8}$	Найдите площадь фигуры, которая задаётся на координатной плоскости следующими условиями: $\begin{cases} \|\,\|x-y\|-\|y+1\|\,\| = 2y-x+1 \\ (x+1)^2+(y+1)^2\le 2 \end{cases}$ Отв. $\frac{\pi}{4}$	Найдите площадь фигуры, которая задаётся на координатной плоскости следующими условиями: $\begin{cases} \|\,\|x-y\|-\|y-2\|\,\| = x-2y+2 \\ (x-2)^2+(y-2)^2\le 3 \end{cases}$ Отв. $\frac{3\pi}{8}$.	Найдите площадь фигуры, которая задаётся на координатной плоскости следующими условиями: Найдите все значения параметра а, при которых решение неравенства $\|\|x\|-3\|\le 3a\|x\|$ содержит не менее двух и не более четырёх положительных простых чисел. Отв. $\left[\frac{2}{15};\frac{8}{33}\right)$. Отв. $\frac{\pi}{2}$.
302. Найдите все значения параметра а, при которых решение неравенства $\|\|x\|-3\|\le 3a\|x\|$ содержит не менее двух и не более четырёх положительных простых чисел. Отв. $\left[\frac{2}{15};\frac{8}{33}\right)$.	Найдите все значения параметра а, при которых решение неравенства $\|\|x\|-3\|\le 3a\|x\|$ содержит от одного до трёх положительных простых чисел.	Найдите все значения параметра а, при которых решение неравенства $\|\|x\|-4\|\le 4a\|x\|$ содержит не менее двух и не более четырёх положительных простых чисел.	Найдите все значения параметра а, при которых решение неравенства $\|\|x\|-3\|\le 5a\|x\|$ содержит от двух до четырёх положительных простых чисел.
303. МГУ). Найдите все значения параметра с, при которых система неравенств $\begin{cases} 3x^2-8xy-8y^2\ge 2; \\ x^2-4xy+2y^2\le\frac{c+1}{2c+1} \end{cases}$	(МГУ). Найдите все значения параметра с, при которых система неравенств $\begin{cases} 5x^2+7xy+2y^2\ge\frac{3c+1}{c+2}; \\ 3x^2+xy+y^2\le 1. \end{cases}$ имеет решение. Ответ:	(МГУ). Найдите все значения параметра с, при которых система неравенств $\begin{cases} 5x^2-4xy+2y^2\ge 3; \\ 7x^2+4xy+2y^2\le\frac{2c-1}{2c+5}. \end{cases}$ имеет решение. Ответ: c<-2,5.	(МГУ). Найдите все значения параметра с, при которых система неравенств $\begin{cases} x^2+2xy-7y^2\ge\frac{1-c}{1+c}; \\ 3x^2+10xy-5y^2\le -2. \end{cases}$ имеет решение. Ответ: c<-1.

имеет решение. Ответ: c>-0,5.	c>-2. Подсказка:умножим второе на -3 и сложим с первым для выделения полного квадрата.	Подсказка:умножим первое на -1, второе на 3 и сложим для выделения полного квадрата.	Подсказка:умножим первое на -2 и сложим со вторым для выделения полного квадрата.
304. (МФТИ).Решите систему неравенств $\begin{cases}4x^2+y^2+8x\le 0;\\ xy+y+1\le 0.\end{cases}$ **Отв.** $\left(-1+\frac{1}{\sqrt{2}};-\sqrt{2}\right);\left(-1-\frac{1}{\sqrt{2}};\sqrt{2}\right)$ *Краткий конспект геометрического решения*: система задаёт множество точек, расположенных внутри эллипса $(x+1)^2+\frac{y^2}{4}\le 1$ или на его границе, а также одновременно на гиперболе $y=-\frac{1}{x+1}$.Имеем систему уравнений $\begin{cases}y=-\frac{1}{x+1};\\ x^2+2x+\frac{1}{4(x+1)^2}=0.\end{cases}$ Замена $x+1=t$ приводит второе уравнение к виду $4t^4-4t^2+1=0;t^2=0{,}5;$ $x_{1,2}=-1\pm\frac{1}{\sqrt{2}};y_{1,2}=-\frac{1}{x_{1,2}+1}.$	**Решите систему неравенств** $\begin{cases}x^2+9y^2-18y\le 0;\\ 2x+3-2xy\le 0.\end{cases}$ **Отв.** $\left(\frac{3}{\sqrt{2}};1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(-\frac{3}{\sqrt{2}};1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ *Краткий конспект алгебраического решения*:складывая первое неравенство со вторым, умноженным на три, получим $(x-3y+3)^2\le 0\Leftrightarrow x=3y-3;$ Исключая x из исходной системы, получим $\begin{cases}2y^2-4y+1\le 0;\\ 2y^2-4y+1\ge 0;\end{cases}\Leftrightarrow 2y^2-4y+1=0$ Решив систему, равносильную исходной $\begin{cases}x=3y-3;\\ 2y^2-4y+1=0;\end{cases}$ получим решения исходной системы.	**Решите систему неравенств** $\begin{cases}y^2+3xy+1\le 0;\\ 9x^2-12x-8y\le 0.\end{cases}$ **Отв.** $\left(\frac{\sqrt{8}}{3};1-\sqrt{2}\right);$ $\left(-\frac{\sqrt{8}}{3};1+\sqrt{2}\right)$	**Решите систему неравенств** $\begin{cases}3x^2+2xy+3\le 0;\\ y^2+6y+18x\le 0.\end{cases}$ **Отв.** $\left(-1+\sqrt{2};-3\sqrt{2}\right);$ $\left(-1-\sqrt{2};3\sqrt{2}\right)$
305. МГУ1986). Найдите наибольшее из значений , которое может принимать выражение $x+3y$, если x,y удовлетворяют неравенству $x^2+xy+4y^2\le 3.$ Отв. $(x+3y)_{\max}=\sqrt{8},$ $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ *Подсказка: введите параметр* $c=x+3y$*, исключите x из неравенства, исследуйте, при каких значениях параметра c неравенство имеет решения. Выберите из наибольшее или наименьшее.*	(МГУ1986). Найдите наибольшее из значений , которое может принимать выражение $x+5y$, если x,y положительны и удовлетворяют неравенству $x^2-6xy+y^2+21\le 0.$ Отв. $(x+5y)_{\max}=7\sqrt{3},$	(МГУ1986). Найдите наименьшее из значений , которое может принимать выражение $x-2y$, если x,y удовлетворяют неравенству $x^2+2xy+7y^2\le 6.$ Отв. $(x-2y)_{\min}=-\sqrt{15}$	(МГУ1986). Найдите наибольшее из значений , которое может принимать выражение $x+2y$, если x,y отрицательны и удовлетворяют неравенству $x^2-4xy+y^2+3\le 0.$ Отв. $(x+2y)_{\max}=-\sqrt{13}.$
306. Точка A	Точка A принадлежит	Точка A принадлежит	Точка A принадлежит параболе

принадлежит параболе $\pi: y=-0{,}125x^2-x$, а точка В принадлежит кривой $\omega: x^2+y^2+8x+8y+16=0$. Какое наименьшее значение может иметь длина отрезка АВ?	параболе $\pi: y=x^2-6x+14{,}5$, а точка В принадлежит кривой $\omega: x^2+y^2-6x-20y+108=0$. Какое наименьшее значение может иметь длина отрезка АВ?	параболе $\pi: y=-0{,}5x^2+4x-5$, а точка В принадлежит кривой $\omega: x^2+y^2-6x-y+9=0$. Какое наименьшее значение может иметь длина отрезка АВ?	$\pi: y=0{,}25x^2+2x+2$, а точка В принадлежит кривой $\omega: x^2+y^2+4x-6y+9=0$. Какое наименьшее значение может иметь длина отрезка АВ?
307. (ЕГЭ 2008). Найдите все значения параметра а, при каждом из которых множество решений неравенства $\frac{25+a(10-x)}{x^2}<\frac{5}{x}\left(2+\frac{5a}{x^2}\right)-1$ содержится в каком-нибудь отрезке длиной 4 и при этом содержит некоторый отрезок длиной 1. Отв. $[-4;-1)\cup(1;4]$	(ЕГЭ 2008). Найдите все значения параметра а, при каждом из которых множество решений неравенства $8(a+2)-x(a-x)<8\left(x+\frac{2a}{x}\right)$ содержит какой-нибудь отрезке длиной 4, но **не содержит никаких двух непересекающихся отрезков длиной 4 каждый.** Отв. $[-8;-4)\cup(8;12]$	(ЕГЭ 2008). Найдите все значения параметра а, при каждом из которых множество решений неравенства $\frac{9+a(6-x)}{x^2}<\frac{3}{x}\left(2+\frac{3a}{x^2}\right)-1$ содержится в каком-нибудь отрезке длиной 2 и при этом содержит некоторый отрезок длиной 1. Отв. $[-2;-1)\cup(1;2]$	(ЕГЭ 2008). Найдите все значения параметра а, при каждом из которых множество решений неравенства $1-\frac{a}{x}<\frac{3}{x}\left(2-\frac{2a+3}{x}+\frac{3a}{x^2}\right)$ содержится в каком-нибудь отрезке длиной 5 и при этом содержит некоторый отрезок длиной 3. Отв. $[-5;-3)$
308. (ЕГЭ 2008). Найдите все значения параметра а, при каждом из которых множество решений неравенства $12(a+3)-x(a-x)<12\left(x+\frac{3a}{x}\right)$ содержит какой-нибудь отрезке длиной 6, но **не содержит никаких двух непересекающихся отрезков длиной 4 каждый.** Отв. $[-8;-6)$	(ЕГЭ 2008). Найдите все значения параметра а, при каждом из которых множество решений неравенства $x(a+8)-16>x^2+8a-\frac{16a}{x}$ содержит какой-нибудь отрезке длиной 5, но **не содержит никакого отрезка длиной 10.** Отв. $[-10;-5)\cup(9;14]$		
309. Найдите все значения параметра а, при которых решением неравенства $\lvert x-1\rvert+\lvert x-3\rvert\le\frac{3}{2}\lvert x-a\rvert+\frac{1}{2}(x-a)$ будет отрезок, длина которого не	Найдите все значения параметра а, при которых решением неравенства $\lvert x+2\rvert+\lvert x-3\rvert-3\le\frac{3}{2}\lvert x-a\rvert+\frac{1}{2}(x-a)$ будет промежуток, длина которого не превосходит 6.	Найдите все значения параметра а, при которых решением неравенства $\lvert x+2\rvert+2\lvert x-3\rvert-3\le\frac{3}{2}\lvert x-a\rvert+\frac{1}{2}(x-a)$ будет промежуток, длина которого не превосходит 5.	Найдите все значения параметра а, при которых решением неравенства $2\lvert x+2\rvert+2\lvert x-3\rvert-8\le\frac{3}{2}\lvert x-a\rvert+\frac{1}{2}(x-a)$ будет промежуток, длина которого не превосходит 6.

превосходит 2. Отв. $a \in (3;4]$. *Подсказка:* для выявления закономерности можно в с.к. XOY построить графики левой и правой частей неравенства при фиксированных а, например, $a \in \{0;1;2;3;4;5\}$.	Отв. $a \in (2;3]$. *Подсказка:* для выявления закономерности можно в с.к. XOY построить графики левой и правой частей неравенства при фиксированных а, например, $a \in \{0;1;2;3;4;5\}$.	Отв. $a \in [0{,}5;2)$.	Отв. $a \in [-1;0) \cup (2;4{,}5]$.
310. Постройте фигуру Ф, заданную на координатной плоскости XOY соотношением $2 \cdot (4-2x) \geq \lvert y-2x^2 \rvert + \lvert y+2x^2 \rvert$. Найдите площадь фигуры.	Постройте фигуру Ф, заданную на координатной плоскости XOY соотношением $2 \cdot (3-2x) \geq \lvert y-x^2 \rvert + \lvert y+x^2 \rvert$. Найдите площадь фигуры.		
311. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $\frac{1}{2}x(x-2) \leq a(\lvert x-1 \rvert -1)$ содержит число, равное сумме кубов корней уравнения $x^2-3x+1=0$. Ответ: $a \geq 9$.	Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $x(x-6) \leq (a+3)(\lvert x-3 \rvert -3)$ содержит число, равное сумме квадратов корней уравнения $x^2-4x+1=0$. Ответ: $a \geq 11$.	Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $x(x-5) \leq (2a+1)(\lvert x-2{,}5 \rvert -2{,}5)$ содержит число, равное сумме кубов корней уравнения $x^2-5x+2=0$. Ответ: $a \geq 47$.	Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $x(x-3) \leq (3a+1)(\lvert x-1{,}5 \rvert -1{,}5)$ содержит число, равное сумме Четвёртых степеней корней уравнения $x^2-6x+2=0$. Ответ: $a \geq 338\frac{1}{3}$.
312. Для каждого значения параметра p решите неравенство $p \cdot \lvert x \rvert \geq 1$	Для каждого значения параметра p решите неравенство $p \cdot \lvert x-5 \rvert \geq -3$	Для каждого значения параметра p решите неравенство $\lvert x \rvert . (x+p) \leq 0$;	Для каждого значения параметра p решите неравенство $(x+3).(x+p)^2 < 0$
313. Для каждого значения параметра a решите систему неравенств $\begin{cases} \lvert x \rvert > a \\ 2x-3 \leq 3x+1 \end{cases}$ Отв.	Для каждого значения параметра a решите систему неравенств $\begin{cases} \lvert x+1 \rvert \geq a \\ (x+1)(x+3) < 0 \end{cases}$	Для каждого значения параметра a решите систему неравенств $\begin{cases} \lvert x \rvert < 2a \\ ax \geq 5 \end{cases}$	

1) $a \le 0 \Rightarrow x \ge -4$; 2) $a \in (0;4] \Rightarrow x \in [-4;-a) \cup (a;+\infty)$; 3) $a \ge 4 \Rightarrow x \in (a;+\infty)$.			
314. Найдите все значения параметра p, при которых из неравенства $0 \le x \le 1$ следует неравенство $(p^2+p-2)x^2-(p+5)x-2 \le 0$	Найдите все значения параметра p, при которых неравенство $px^2-4x+3p+1>0$ выполнено при всех x>0.	При каких значениях p из неравенства $x^2-(3p+1)x+p>0$ следует неравенство x>1?	Найдите все значения k, при каждом из которых существует хотя бы одно общее решение неравенств $x^2+4kx+3k^2 > 1+2k$, $x^2+2kx \le 3k^2-8k+4$.
315. При всех значениях параметра a определите количество корней уравнения $\lvert 2t-a\rvert-\lvert t+2a\rvert=t^2$. *Подсказка:используйте КПП.* Ответ: $a<-\frac{9}{4} \to 0$ *корней*; $a=-\frac{9}{4} \to 1$ *корень*; $-\frac{9}{4}<a<-\frac{1}{12} \to 2$ *корня*; $a=-\frac{1}{12} \to 3$ *корня*; $-\frac{1}{12}<a<0 \to 4$ *корня*; $a=0 \to 3$ *корня*; $0<a<\frac{1}{12} \to 4$ *корня*; $a=\frac{1}{12} \to 3$ *корня*; $\frac{1}{12}<a<\frac{9}{4} \to 2$ *корня*; $a=\frac{9}{4} \to 1$ *корень*; $a>\frac{9}{4} \to 0$ *корней*.	При всех значениях параметра a определите количество корней уравнения $\lvert 3t-a\rvert-\lvert t+3a\rvert=t^2$. *Подсказка:используйте КПП.* Ответ: $a<-2 \to 0$ *корней*; $a=-2 \to 1$ *корень*; $-2<a<-\frac{1}{4} \to 2$ *корня*; $a=-\frac{1}{4} \to 3$ *корня*; $-\frac{1}{4}<a<0 \to 4$ *корня*; $a=0 \to 3$ *корня*; $0<a<\frac{1}{4} \to 4$ *корня*; $a=\frac{1}{4} \to 3$ *корня*; $\frac{1}{4}<a<2 \to 2$ *корня*; $a=2 \to 1$ *корень*; $a>2 \to 0$ *корней*.	При всех значениях параметра a определите количество корней уравнения $\lvert 2t-a\rvert-\lvert t+2a\rvert=2t^2$. *Подсказка:используйте КПП.* Ответ:	При всех значениях параметра a определите количество корней уравнения $\lvert 3t-a\rvert-\lvert t+3a\rvert=2t^2$. *Подсказка:используйте КПП.* Ответ:

Зачетная работа
«Квадратный трехчлен, квадратные уравнения и неравенства»

Билет № 1.

Задание 1.

Даны координаты точек A(-1, -1), B(0, 1), C(2, -1).

1) Напишите уравнение функции вида $y = ax^2 + bx + c$, график которой проходит через точки A, B и C. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки A и B.
2) Изобразите область D, ограниченную параболой и прямой AB.
3) Подсчитайте количество точек с целочисленными координатами, принадлежащих области D.

4) Найдите координаты вершины параболы и уравнение оси симметрии параболы.
5) Укажите область определения D(y) и множество значений E(y) квадратичной функции.
6) Найдите все значения x, при которых: а) $y(x) > 0$; б) $y(x) = 0$; в) $y(x) < 0$.
7) Составьте уравнение касательной к параболе, параллельной прямой AB.
8) Найдите расстояние между секущей AB и касательной к параболе.
9) Постройте графики параболы, секущей и касательной на одном чертеже.
10) Чему равна площадь треугольника ABC?
11) Составьте уравнения трех касательных к параболе, параллельных соответственно сторонам BC и AC.
12) Найдите координаты точек A_1, B_1, C_1 попарного пересечения касательных.
13) Укажите коэффициенты подобия треугольников и площадь треугольника $A_1B_1C_1$.

Задание 2.

Даны 3 квадратных трехчлена $f_1(x) = 45x^2 + 21x - 5a$; $f_2(x) = 45x^2 + 21ax - 5$; $f_3(x) = 45ax^2 + 21x - 5$.
Проведите исследование каждого квадратного трехчлена по следующему плану.

Определите, при каких значениях параметра a соответствующее квадратное уравнение:

1) не имеет действительных корней;
2) имеет 2 различных действительных корня;
3) имеет 1 корень. Этот случай проиллюстрируйте графиком функции;
4) имеет корень, равный 13;
5) имеет только положительные различные корни;
6) не имеет неотрицательных корней;
7) имеет корни разных знаков;
8) имеет различные корни, принадлежащие интервалу (0; 2);
9) имеет дискриминант, совпадающий хотя бы с одним из дискриминантов других уравнений;
10) имеет дискриминант D = 55 при $a \in Z$;
11) корни уравнений $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = 0$ перемежаются, т.е. каждое уравнение имеет 2 различных корня и между корнями одного уравнения находится только 1 корень другого уравнения.
12) корни уравнений $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = 0$ не перемежаются, т.е. каждое уравнение имеет 2 различных корня и между корнями одного уравнения нет корней другого уравнения.
13) не вычисляя корней многочленов $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$, для каждого из них определите следующие выражения:
$S_1 = x_1 + x_2$; $S_2 = x_1^2 + x_2^2$; $S_3 = x_1^3 + x_2^3$; $S_4 = x_1^4 + x_2^4$; $S_5 = x_1^5 + x_2^5$; $S_6 = x_1^6 + x_2^6$, где x_1, x_2 - корни соответствующих многочленов.
14) вычислите расстояние между прямой $y = 5x - 11$ и каждой из парабол $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $y = f_3(x)$ при значении параметра a, равном $2 \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}\right]$, где $[b]$ означает целую часть числа b, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее b.
15) * При каких значениях a корни $f_1(x)$ и $f_2(x)$, взятые в каком-либо порядке, образуют: а) арифметическую ÷, б) геометрическую ∺ прогрессию?
16) Существует ли квадратный трехчлен $P_2(x)$ такой, что $P_2(x^2) = f_1^2(x) + f_2^2(x) + f_3^2(x)$ $\forall x \in R$ хотя бы при каком-нибудь значении параметра a?

Задание 3.

Будем рассматривать квадратные уравнения вида $x^2 + px + q = 0$, каждое такое уравнение задаётся двумя числами p, q. Условимся изображать это уравнение точкой $(p; q)$ на координатной плоскости POQ. Например, уравнение $x^2 - 2x + 3 = 0$ изобразится точкой A(-2;3), а уравнение $x^2 - 1 = 0$ точкой B(0;-1).

1. Какое уравнение соответствует началу координат?
2. Возьмите наугад точку на плоскости POQ. Если уравнение, соответствующее взятой точке, имеет два действительных корня, отметьте эту точку зелёным цветом. Если уравнение не имеет действительных корней, отметьте эту точку красным цветом. Возьмите ещё несколько точек и сделайте с ними то же самое. Не сможете ли Вы указать ту область на плоскости POQ, которую занимают зелёные точки? а также ту область, которую занимают красные точки? Какая линия отделяет зелёные точки от красных? Сколько корней имеют уравнения, соответствующие точкам этой линии?
3. Нарисуйте множество точек плоскости POQ, соответствующих тем уравнениям, у которых корни действительны и сумма корней равна 0.
4. Нарисуйте множество точек плоскости POQ, соответствующих тем уравнениям, у которых корни действительны и положительны; действительны и отрицательны; действительны и имеют противоположные знаки.
5. Какой точкой или точками на плоскости POQ изобразится уравнение , один из корней которого равен 1? один из корней которого равен -1? Укажите точку А, соответствующую трёхчлену $(x-1)^2$, точку В, соответствующую трёхчлену $(x+1)^2$, точку С, соответствующую $x\cdot(x-1)$.
6. Нарисуйте множество точек плоскости POQ, соответствующих тем уравнениям, у которых корни действительные, а сумма квадратов коэффициентов p и q равна 1.
7. В зависимости от положения точки M(p, q) в плоскости POQ укажите число корней уравнения $x^2+px+q=0$, заключённых между –1 и 1.
8. Рассмотрим квадрат К, ограниченный прямыми p=5, p=-5, q=5, q=-5.Сколько зелёных точек с целочисленными координатами лежит внутри К? Аналогичный вопрос о красных точках.
9. Рассмотрим в плоскости *POQ* две точки (11, 22) и (7, 10), первой из которых соответствует квадратный трёхчлен $p_1(x)$, а второй $p_2(x)$. Составим рациональную дробь $y=\dfrac{p_1(x)}{p_2(x)}$.

   Определите целые значения x, при которых дробь y также принимает целые значения.
10. *Рассмотрим функцию $f(x)=\cos^2 x+p\cos x+q, x\in[0,\pi]$. Каждой такой функции, как и раньше, поставим в соответствие точку M(p,q) плоскости POQ. В одной системе координат XOY постройте графики функций $y=f(x)$,соответствующие следующим случаям: а) p=4,q=6, б) p=2, q=6, в) p= -1, q=6, г) p= -2, q=6,
    д) p= - 4, q=6. Исследуйте функцию f(x) на возрастание и убывание в зависимости от положения точки M(p,q) в плоскости POQ.
11. *Пусть M_o (p_o ,q_o) и M(p,q)- точки плоскости POQ, соответствующие функциям $f_0(x)=\cos^2 x+p_0\cos x+q_0$ и $f(x)=\cos^2 x+p\cos x+q$. .Найдите наибольшее значение выражения $|f(x)-f_0(x)|$. Обозначим $\rho(M,M_0)=\max|f(x)-f_0(x)|, x\in[0,\pi]$.
12. *Предположим ,что $M_0(p_0,q_0)$-фиксированная точка, а M(p,q)- переменная. Определите геометрическое место точек M(p,q) таких, что $\rho(M,M_0)=const$.
13. *Пусть A(2,2) и B(-2,-2) – точки в плоскости POQ. Найдите геометрическое место точек M таких, что $\rho(M,A)=\rho(M,B)$.

Задание 4.

1. Дан квадратный трёхчлен $f(x)=ax^2+bx+c$. Пусть D - его дискриминант. Найдите явный вид следующих функций:

$f_1(x)=f(x+1)$; $f_2(x)=f(3x-1)$; $f_3(x)=x^2 f\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$; $f_4(x)=(x-1)^2\cdot f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$; $f_5(x)=(x-2)^2\cdot f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$; $f_6(x)=x^2\cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

$f_7(x)=(2x+1)^2\cdot f\left(\dfrac{3x-2}{2x+1}\right)$. Для тех из них, которые являются квадратными трёхчленами, найдите их дискриминанты и сравните с D. Можно ли заменяя несколько раз в какой либо последовательности трёхчлен x^2+3x-1 на трёхчлены $f_3(x); f_4(x); f_6(x)$, получить в результате квадратный трёхчлен x^2+3x+1?

Задание 5.

1. Покажите, что областью значений E(f) функции $f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x^2+4x+3a}$ является R, если $a\in[0.01;\ 0.1]$. Докажите, что если число *c* принимает любое значение из отрезка $[0.01;\ 0.1]$, то уравнение $\dfrac{x^2+2x+c}{x^2+4x+3c}=a$ имеет решение относительно x $\forall a\in R$.

Задание 6.

1. На графике функции $y=x^2-3x$ найдите точки, у которых абсциссы и ординаты равны.
2. Дана функция $y=x^2-8x+17$. Задайте формулой функцию, график которой симметричен графику данной функции относительно оси *OX*.

Задание 7.

1. Постройте график функции $y=|x+2|+|x^2-1|+|x-2|$. При каждом значении параметра а определите количество корней уравнения $y(x)=a$.
2. Постройте график функции $y=|x^2-4x|-5$. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y(x)$ на отрезке $[-1;5]$.
3. Постройте график функции $y=\dfrac{(x^2-4x-5)\cdot|x+3|}{x+1}$. При каждом значении параметра а определите количество корней уравнения $y(x)=a$.
4. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости XOY соотношением $2\cdot(4-2x)\geq|y-2x^2|+|y+2x^2|$.

Зачетная работа
«Квадратный трехчлен, квадратные уравнения и неравенства»

Билет № 2.

Задание 1.
Даны координаты точек A(-1, 9), B(2, 4), C(6, 8).

1) Напишите уравнение функции вида $y=ax^2+bx+c$, график которой проходит через точки A, B и C. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки A и B.
2) Изобразите область D, ограниченную параболой и прямой AB.
3) Подсчитайте количество точек с целочисленными координатами, принадлежащих области D.
4) Найдите координаты вершины параболы и уравнение оси симметрии параболы.
5) Укажите область определения D(y) и множество значений E(y) квадратичной функции.
6) Найдите все значения *x*, при которых: а) $y(x)>0$; б) $y(x)=0$; в) $y(x)<0$.
7) Составьте уравнение касательной к параболе, параллельной прямой AB.
8) Найдите расстояние между секущей AB и касательной к параболе.
9) Постройте графики параболы, секущей и касательной на одном чертеже.
10) Чему равна площадь треугольника ABC?
11) Составьте уравнения трех касательных к параболе, параллельных соответственно сторонам BC и AC.
12) Найдите координаты точек A_1, B_1, C_1 попарного пересечения касательных.
13) Укажите коэффициенты подобия треугольников и площадь треугольника $A_1B_1C_1$.

Задание 2.

Даны 3 квадратных трехчлена $f_1(x) = 3x^2 + 5x + 7a$;

$f_2(x) = 3x^2 + 5ax + 7$; $f_3(x) = 3ax^2 + 5x + 7$. Проведите исследование

каждого квадратного трехчлена по следующему плану.

Определите, при каких значениях параметра *a* соответствующее квадратное уравнение:

1) не имеет действительных корней;
2) имеет 2 различных действительных корня;
3) имеет 1 корень. Этот случай проиллюстрируйте графиком функции;
4) имеет корень, равный 11;
5) имеет только положительные различные корни;
6) не имеет неотрицательных корней;
7) имеет корни разных знаков;
8) имеет различные корни, принадлежащие интервалу (0; 1);
9) имеет дискриминант, совпадающий хотя бы с одним из дискриминантов других уравнений;
10) имеет дискриминант D=51 при $a \in Z$;
11) корни уравнений $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = 0$ перемежаются, т.е. каждое уравнение имеет 2 различных корня и между корнями одного уравнения находится только 1 корень другого уравнения.
12) корни уравнений $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = 0$ не перемежаются, т.е. каждое уравнение имеет 2 различных корня и между корнями одного уравнения нет корней другого уравнения.
13) не вычисляя корней многочленов $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$, для каждого из них определите следующие выражения:
    $S_1 = x_1 + x_2$; $S_2 = x_1^2 + x_2^2$; $S_3 = x_1^3 + x_2^3$; $S_4 = x_1^4 + x_2^4$; $S_5 = x_1^5 + x_2^5$; $S_6 = x_1^6 + x_2^6$, где x_1, x_2 - корни соответствующих многочленов.
14) вычислите расстояние между прямой $y = 3x - 10$ и каждой из парабол $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $y = f_3(x)$ при значении параметра *a*, равном $2 \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}\right]$, где $[b]$ означает целую часть числа *b*, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее *b*.
15) * При каких значениях *a* корни $f_1(x)$ и $f_2(x)$, взятые в каком-либо порядке, образуют: а) арифметическую ÷, б) геометрическую ∺ прогрессию?
16) Существует ли квадратный трехчлен $P_2(x)$ такой, что $P_2(x^2) = f_1^2(x) + f_2^2(x) + f_3^2(x) \quad \forall x \in R$ хотя бы при каком-нибудь значении параметра *a*?

Задание 3.

Будем рассматривать квадратные уравнения вида $x^2 + px + q = 0$, каждое такое уравнение задаётся двумя числами p, q.

Условимся изображать это уравнение точкой $(p; q)$ на координатной плоскости POQ. Например, уравнение $x^2 - 2x + 3 = 0$ изобразится точкой A(-2;3), а уравнение $x^2 - 1 = 0$ точкой B(0;-1).

1) Какое уравнение соответствует началу координат?
2) Возьмите наугад точку на плоскости POQ. Если уравнение, соответствующее взятой точке, имеет два действительных корня, отметьте эту точку зелёным цветом. Если уравнение не имеет действительных корней , отметьте эту точку красным цветом. Возьмите ещё несколько точек и сделайте с ними то же самое. Не сможете ли Вы указать ту область на плоскости POQ, которую занимают зелёные точки? а также ту область, которую занимают красные точки? Какая линия отделяет зелёные точки от красных? Сколько корней имеют уравнения, соответствующие точкам этой линии?
3) Нарисуйте множество точек плоскости POQ, соответствующих тем уравнениям, у которых корни действительны и сумма корней равна 1.

4) Нарисуйте множество точек плоскости POQ, соответствующих тем уравнениям, у которых корни действительны и положительны; действительны и отрицательны; действительны и имеют противоположные знаки.
5) Какой точкой или точками на плоскости POQ изобразится уравнение , один из корней которого равен 2? один из корней которого равен -2? Укажите точку A, соответствующую трёхчлену $(x-2)^2$, точку B, соответствующую трёхчлену $(x+2)^2$, точку C, соответствующую $x\cdot(x-2)$.
6) Нарисуйте множество точек плоскости POQ, соответствующих тем уравнениям, у которых корни действительные, а сумма квадратов коэффициентов p и q равна 1.
7) В зависимости от положения точки M(p, q) в плоскости POQ укажите число корней уравнения $x^2+px+q=0$, заключённых между –2 и 2.
8) Рассмотрим квадрат K, ограниченный прямыми p=4, p= - 4, q=4, q= - 4.Сколько зелёных точек с целочисленными координатами лежит внутри K? Аналогичный вопрос о красных точках.
9) Рассмотрим в плоскости POQ две точки (12, 23) и (8, 11), первой из которых соответствует квадратный трёхчлен $p_1(x)$, а второй $p_2(x)$. Составим рациональную дробь $y=\dfrac{p_1(x)}{p_2(x)}$.

Определите
целые значения *x*, при которых дробь y также принимает целые значения.

10) * Рассмотрим функцию $f(x)=\sin^2 x+p\sin x+q,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Каждой такой функции, как и раньше, поставим в соответствие точку M(p,q) плоскости POQ. В одной системе координат XOY постройте графики функций $y=f(x)$,соответствующие следующим случаям: а) p=4,q=6, б) p=2, q=6, в) p= -1, q=6, г) p=- 2,q=6,
д) p= - 4, q=6. Исследуйте функцию f(x) на возрастание и убывание в зависимости от положения точки M(p,q) в плоскости POQ.
11) * Пусть M_o (p_o ,q_o) и M(p,q)- точки плоскости POQ, соответствующие функциям $f_0(x)=\sin^2 x+p_0\sin x+q_0$ и $f(x)=\sin^2 x+p\sin x+q$. .Найдите наибольшее значение выражения $|f(x)-f_0(x)|$. Обозначим $\rho(M,M_0)=\max\limits_{x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}|f(x)-f_0(x)|$.
12) *Предположим ,что $M_0(p_0,q_0)$ - фиксированная точка, а M(p,q)- переменная. Определите геометрическое место точек M(p,q) таких, что $\rho(M,M_0)=const.$
13) *Пусть A(2,2) и B(-2,-2) – точки в плоскости POQ. Найдите геометрическое место точек M таких, что $\rho(M,A)=\rho(M,B)$.

Задание 4.

1) Дан квадратный трёхчлен $f(x)=ax^2+bx+c$. Пусть D - его дискриминант. Найдите явный вид следующих функций: $f_1(x)=f(x+1)$; $f_2(x)=f(3x-1)$; $f_3(x)=x^2 f\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$;

$f_4(x)=(x-1)^2\cdot f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$; $f_5(x)=(x-2)^2\cdot f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$;

$f_6(x)=x^2\cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

$f_7(x)=(2x+1)^2\cdot f\left(\dfrac{3x-2}{2x+1}\right)$. Для тех из них, которые являются квадратными трёхчленами, найдите их дискриминанты и сравните с D. Можно ли заменяя несколько раз в какой либо последовательности трёхчлен x^2+3x-1 на трёхчлены $f_3(x)$; $f_4(x)$; $f_6(x)$, получить в результате квадратный трёхчлен x^2+3x+1?

Задание 5.

Найдите область значений E(f) функции $f(x)=\dfrac{10x^2+20x+11}{5x^2+10x+7}$.

Задание 6.

1. На графике функции $y=x^2-5x+3$ найдите точки, у которых абсцисса и ордината отличаются только знаком.
2. Дана функция $y=x^2-6x+10$. Задайте формулой функцию, график которой симметричен графику данной функции относительно оси *OY*. Сделайте соответствующие графики.

Задание 7.

1. Постройте график функции $y=|x^2-4x-5|+|x^2-2x-3|$. При каждом значении параметра *a* определите количество корней уравнения $y(x)=a$.
2. Постройте график функции $y=|x^2-4x|+5x+1$. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y(x)$ на отрезке $[-0.5;4,5]$.
3. Постройте график функции $y=\dfrac{(x^2-4x-5)\cdot(x+3)}{|x+1|}$. При каждом значении параметра а определите количество корней уравнения $y(x)=a$.
4. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости XOY соотношением $2\cdot(3-2x)\geq|y-x^2|+|y+x^2|$.

Зачетная работа
«Квадратный трехчлен, квадратные уравнения и неравенства»

Билет № 3.

Задание 1.
Даны координаты точек A(0, 10), B(3, 5), C(7, 9).

1) Напишите уравнение функции вида $y=ax^2+bx+c$, график которой проходит через точки A, B и C. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки A и B.
2) Изобразите область D, ограниченную параболой и прямой AB.
3) Подсчитайте количество точек с целочисленными координатами, принадлежащих области D.
4) Найдите координаты вершины параболы и уравнение оси симметрии параболы.
5) Укажите область определения D(y) и множество значений E(y) квадратичной функции.
6) Найдите все значения *x*, при которых: а) $y(x)>0$; б) $y(x)=0$; в) $y(x)<0$.
7) Составьте уравнение касательной к параболе, параллельной прямой AB.
8) Найдите расстояние между секущей AB и касательной к параболе.
9) Постройте графики параболы, секущей и касательной на одном чертеже.
10) Чему равна площадь треугольника ABC?
11) Составьте уравнения трех касательных к параболе, параллельных соответственно сторонам BC и AC.
12) Найдите координаты точек A_1, B_1, C_1 попарного пересечения касательных.
13) Укажите коэффициенты подобия треугольников и площадь треугольника $A_1B_1C_1$.

Задание 2.

Даны 3 квадратных трехчлена $f_1(x)=28x^2-16x+a$; $f_2(x)=28x^2-16ax+1$; $f_3(x)=28ax^2-16x+1$.

Проведите исследование каждого квадратного трехчлена по следующему плану.

Определите, при каких значениях параметра *a* соответствующее квадратное уравнение:

1) не имеет действительных корней;
2) имеет 2 различных действительных корня;
3) имеет 1 корень. Этот случай проиллюстрируйте графиком функции;
4) имеет корень, равный 13;
5) имеет только положительные различные корни;
6) не имеет неотрицательных корней;
7) имеет корни разных знаков;
8) имеет различные корни, принадлежащие интервалу (0; 3);
9) имеет дискриминант, совпадающий хотя бы с одним из дискриминантов других уравнений;
10) имеет дискриминант D = 59 при $a \in Z$;
11) корни уравнений $f_1(x)=0$ и $f_2(x)=0$ перемежаются, т.е. каждое уравнение имеет 2 различных корня и между корнями одного уравнения находится только 1 корень другого уравнения.
12) корни уравнений $f_1(x)=0$ и $f_2(x)=0$ не перемежаются, т.е. каждое уравнение имеет 2 различных корня и между корнями одного уравнения нет корней другого уравнения.
13) не вычисляя корней многочленов $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$, для каждого из них определите следующие выражения:
$S_1 = x_1 + x_2$; $S_2 = x_1^2 + x_2^2$; $S_3 = x_1^3 + x_2^3$; $S_4 = x_1^4 + x_2^4$; $S_5 = x_1^5 + x_2^5$; $S_6 = x_1^6 + x_2^6$, где x_1, x_2 - корни соответствующих многочленов.
14) вычислите расстояние между прямой *y = 7x - 13* и каждой из парабол $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $y = f_3(x)$ при значении параметра *a*, равном $2 \cdot \left[\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\right]$, где $[b]$ означает целую часть числа *b*, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее *b*.
15) При каких значениях *a* корни $f_1(x)$ и $f_2(x)$, взятые в каком-либо порядке, образуют: а) арифметическую ÷, б) геометрическую ∷ прогрессию?
16) Существует ли квадратный трехчлен $P_2(x)$ такой, что $P_2(x^2) = f_1^2(x) + f_2^2(x) + f_3^2(x) \quad \forall x \in R$ хотя бы при каком-нибудь значении параметра *a*?

Задание 3.

Будем рассматривать квадратные уравнения вида $x^2 - px - q = 0$, каждое такое уравнение задаётся двумя числами $p, q.$ Условимся изображать это уравнение точкой $(p; q)$ на координатной плоскости POQ. Например, уравнение $x^2 - 2x + 3 = 0$ изобразится точкой A(2; -3), а уравнение $x^2 - 1 = 0$ точкой B(0; 1).

1) Какое уравнение соответствует началу координат?
2) Возьмите наугад точку на плоскости POQ. Если уравнение, соответствующее взятой точке, имеет два действительных корня, отметьте эту точку зелёным цветом. Если уравнение не имеет действительных корней, отметьте эту точку красным цветом. Возьмите ещё несколько точек и сделайте с ними то же самое. Не сможете ли Вы указать ту область на плоскости POQ, которую занимают зелёные точки? а также ту область, которую занимают красные точки? Какая линия отделяет зелёные точки от красных? Сколько корней имеют уравнения, соответствующие точкам этой линии?
3) Нарисуйте множество точек плоскости POQ, соответствующих тем уравнениям, у которых корни действительны и сумма корней равна 0.
4) Нарисуйте множество точек плоскости POQ, соответствующих тем уравнениям, у которых корни действительны и положительны; действительны и отрицательны; действительны и имеют противоположные знаки.
5) Какой точкой или точками на плоскости POQ изобразится уравнение, один из корней которого равен 1? один из корней которого равен -1? Укажите точку A, соответствующую трёхчлену $(x-1)^2$, точку B, соответствующую трёхчлену $(x+1)^2$, точку C, соответствующую $x \cdot (x-1)$.
6) Нарисуйте множество точек плоскости POQ, соответствующих тем уравнениям, у которых корни действительные, а сумма квадратов коэффициентов p и q равна 1.

7) В зависимости от положения точки M(p, q) в плоскости POQ укажите число корней уравнения $x^2 - px - q = 0$, заключённых между –1 и 1.
8) Рассмотрим квадрат K, ограниченный прямыми p=5, p=-5, q=5, q=-5.Сколько зелёных точек с целочисленными координатами лежит внутри K? Аналогичный вопрос о красных точках.
9) Рассмотрим в плоскости POQ две точки (11,22) и (7,10), первой из которых соответствует квадратный трёхчлен $p_1(x)$, а второй $p_2(x)$. Составим рациональную дробь $y = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$.

   Определите целые значения x, при которых дробь y также принимает целые значения.
10) *Рассмотрим функцию $f(x) = \cos^2 x - p\cos x - q, x \in [0, \pi]$. Каждой такой функции, как и раньше, поставим в соответствие точку M(p,q) плоскости POQ. В одной системе координат XOY постройте графики функций $y = f(x)$,соответствующие следующим случаям: а) p=4,q=6, б) p=2,q=6, в) p= -1, q=6, г) p= - 2, q=6,
д) p= - 4, q=6. Исследуйте функцию f(x) на возрастание и убывание
в зависимости от положения точки M(p,q) в плоскости POQ.

11) *Пусть M_0 (p_0 ,q_0) и M(p,q)- точки плоскости POQ, соответствующие функциям $f_0(x) = \cos^2 x - p_0 \cos x - q_0$ и $f(x) = \cos^2 x - p\cos x - q$. Найдите наибольшее значение выражения $|f(x) - f_0(x)|$. Обозначим $\rho(M, M_0) = \max|f(x) - f_0(x)|, x \in [0, \pi]$.
12) *Предположим ,что $M_0(p_0, q_0)$ - фиксированная точка, а M(p,q)- переменная. Определите геометрическое место точек M(p,q) таких, что $\rho(M, M_0) = const$.
13) *Пусть A(2,2) и B(-2,-2) – точки в плоскости POQ. Найдите геометрическое место точек M таких, что $\rho(M, A) = \rho(M, B)$.

Задание 5.

Найдите область значений E(f) функции $f(x) = \frac{9x^2 + 21x + 19}{3x^2 + 7x + 5}$.

Задание 6.

1. На графике функции $y = |x^2 - 5x + 6|$ найдите точки, у которых абсцисса в 10 раз больше ординаты.
2. Даны функции $f(x) = a\sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x-2}$. Исследуйте взаимное расположение графиков этих функций в зависимости от параметра *a*. Сделайте соответствующие рисунки. Найдите координаты общих точек.

Задание 7.

1. Постройте график функции $y = |x^2 - 4x| - 5$. При каждом значении параметра a определите количество корней уравнения $y(x) = a$.
2. Постройте график функции $y = |x^2 - 4| + |x^2 - 9|$. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y(x)$ на всей числовой прямой.
3. Постройте график функции $y = \frac{|x^2 - 4x - 5| \cdot (x+3)}{x+1}$. При каждом значении параметра *a* определите количество корней уравнения $y(x) = a$.
4. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости XOY соотношением $2 \cdot (4.8 - 1{,}6x) \geq |y - 2x^2| + |y + 2x^2|$.

Зачетная работа

«Квадратный трехчлен, квадратные уравнения и неравенства»

Билет № 4.

Задание 1.
Даны координаты точек A(-1, -6), B(-4, -3), C(-3, -2).

1) Напишите уравнение функции вида $y = ax^2 + bx + c$, график которой проходит через точки A, B и C. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки A и B.
2) Изобразите область D, ограниченную параболой и прямой AB.
3) Подсчитайте количество точек с целочисленными координатами, принадлежащих области D.
4) Найдите координаты вершины параболы и уравнение оси симметрии параболы.
5) Укажите область определения D(y) и множество значений E(y) квадратичной функции.
6) Найдите все значения *x*, при которых: а) $y(x) > 0$; б) $y(x) = 0$; в) $y(x) < 0$.
7) Составьте уравнение касательной к параболе, параллельной прямой AB.
8) Найдите расстояние между секущей AB и касательной к параболе.
9) Постройте графики параболы, секущей и касательной на одном чертеже.
10) Чему равна площадь треугольника ABC?
11) Составьте уравнения трех касательных к параболе, параллельных соответственно сторонам BC и AC.
12) Найдите координаты точек A_1, B_1, C_1 попарного пересечения касательных.
13) Укажите коэффициенты подобия треугольников и площадь треугольника $A_1B_1C_1$.

Задание 2.

Даны 3 квадратных трехчлена $f_1(x) = 98x^2 + 49x - 5a$; $f_2(x) = 98x^2 + 49ax - 5$; $f_3(x) = 98ax^2 + 49x - 5$. Проведите исследование каждого квадратного трехчлена по следующему плану.

Определите, при каких значениях параметра *a* соответствующее квадратное уравнение:

1) не имеет действительных корней;
2) имеет 2 различных действительных корня;
3) имеет 1 корень. Этот случай проиллюстрируйте графиком функции;
4) имеет корень, равный 17;
5) имеет только положительные различные корни;
6) не имеет неотрицательных корней;
7) имеет корни разных знаков;
8) имеет различные корни, принадлежащие интервалу (0; 4);
9) имеет дискриминант, совпадающий хотя бы с одним из дискриминантов других уравнений;
10) имеет дискриминант D = 63 при $a \in Z$;
11) корни уравнений $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = 0$ перемежаются, т.е. каждое уравнение имеет 2 различных корня и между корнями одного уравнения находится только 1 корень другого уравнения.
12) корни уравнений $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = 0$ не перемежаются, т.е. каждое уравнение имеет 2 различных корня и между корнями одного уравнения нет корней другого уравнения.
13) не вычисляя корней многочленов $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$, для каждого из них определите следующие выражения:
$S_1 = x_1 + x_2$; $S_2 = x_1^2 + x_2^2$; $S_3 = x_1^3 + x_2^3$; $S_4 = x_1^4 + x_2^4$; $S_5 = x_1^5 + x_2^5$; $S_6 = x_1^6 + x_2^6$, где x_1, x_2 - корни соответствующих многочленов.
14) вычислите расстояние между прямой *y = 9x - 15* и каждой из парабол $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $y = f_3(x)$ при значении параметра *a*, равном $2 \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}\right]$, где $[b]$ означает целую часть числа *b*, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее *b*.
15) При каких значениях *a* корни $f_1(x)$ и $f_2(x)$, взятые в каком-либо порядке, образуют: а) арифметическую ÷, б) геометрическую ∷ прогрессию?
16) Существует ли квадратный трехчлен $P_2(x)$ такой, что $P_2(x^2) = f_1^2(x) + f_2^2(x) + f_3^2(x) \quad \forall x \in R$ хотя бы при каком-нибудь значении параметра *a*?

Задание 3.

Будем рассматривать квадратные уравнения вида $x^2 - px - q = 0$, каждое такое уравнение задаётся двумя числами p, q. Условимся изображать это уравнение точкой $(p;q)$ на координатной плоскости POQ.

Например, уравнение $x^2 - 2x + 3 = 0$ изобразится точкой A(2; -3), а уравнение $x^2 - 1 = 0$ точкой B(0; 1).

1) Какое уравнение соответствует началу координат?
2) Возьмите наугад точку на плоскости POQ. Если уравнение, соответствующее взятой точке, имеет два действительных корня, отметьте эту точку зелёным цветом. Если уравнение не имеет действительных корней , отметьте эту точку красным цветом. Возьмите ещё несколько точек и сделайте с ними то же самое. Не сможете ли Вы указать ту область на плоскости POQ, которую занимают зелёные точки? а также ту область, которую занимают красные точки? Какая линия отделяет зелёные точки от красных? Сколько корней имеют уравнения, соответствующие точкам этой линии?
3) Нарисуйте множество точек плоскости POQ, соответствующих тем уравнениям, у которых корни действительны и сумма корней равна 1.
4) Нарисуйте множество точек плоскости POQ, соответствующих тем уравнениям, у которых корни действительны и положительны; действительны и отрицательны; действительны и имеют противоположные знаки.
5) Какой точкой или точками на плоскости POQ изобразится уравнение , один из корней которого равен 2? один из корней которого равен -2? Укажите точку A, соответствующую трёхчлену $(x-2)^2$, точку B, соответствующую трёхчлену $(x+2)^2$, точку C, соответствующую $x \cdot (x-2)$.
6) Нарисуйте множество точек плоскости POQ, соответствующих тем уравнениям, у которых корни действительные, а сумма квадратов коэффициентов p и q равна 1.
7) В зависимости от положения точки M(p, q) в плоскости POQ укажите число корней уравнения $x^2 - px - q = 0$, заключённых между –2 и 2.
8) Рассмотрим квадрат K, ограниченный прямыми p=4, p= - 4, q=4, q= - 4.Сколько зелёных точек с целочисленными координатами лежит внутри K? Аналогичный вопрос о красных точках.
9) Рассмотрим в плоскости POQ две точки (12, 23) и (8, 11), первой из которых соответствует квадратный трёхчлен $p_1(x)$, а второй $p_2(x)$. Составим рациональную дробь $y = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$.

   Определите целые значения *x*, при которых дробь *y* также принимает целые значения.
10) Рассмотрим функцию $f(x) = \sin^2 x - p\sin x - q,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Каждой такой функции, как и раньше, поставим в соответствие точку M(p,q) плоскости POQ. В одной системе координат XOY постройте графики функций $y = f(x)$,соответствующие следующим случаям: а) p=4,q=6, б) p=2, q=6, в) p= -1, q=6, г) p=- 2,q=6,

    д) p= - 4, q=6. Исследуйте функцию f(x) на возрастание и убывание в зависимости от положения точки M(p,q) в плоскости POQ.
11) Пусть M_o (p_o ,q_o) и M(p,q)- точки плоскости POQ, соответствующие функциям $f_0(x) = \sin^2 x - p_0 \sin x - q_0$ и $f(x) = \sin^2 x - p\sin x - q$ . .Найдите наибольшее значение выражения $|f(x) - f_0(x)|$. Обозначим $\rho(M, M_0) = \max\limits_{x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} |f(x) - f_0(x)|$.
12) *Предположим ,что $M_0(p_0, q_0)$ - фиксированная точка, а M(p,q)- переменная. Определите геометрическое место точек M(p,q) таких, что $\rho(M, M_0) = const$.
13) *Пусть A(2,2) и B(-2,-2) – точки в плоскости POQ. Найдите геометрическое место точек M таких, что $\rho(M, A) = \rho(M, B)$.

Зачетная работа
«Квадратный трехчлен, квадратные уравнения и неравенства»

Билет № 1.

Задание 1.

Даны координаты точек A(-1, -1), B(0, 1), C(2, -1).

1) Напишите уравнение функции вида $y = ax^2 + bx + c$, график которой проходит через точки А, В и С. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки А и В.
2) Под какими углами секущая АВ пересекает параболу?
3) Изобразите область D, ограниченную параболой и прямой АВ.
4) Подсчитайте количество точек с целочисленными координатами, принадлежащих области D.
5) Найдите координаты вершины параболы и уравнение оси симметрии параболы.
6) Укажите область определения D(y) и множество значений E(y) квадратичной функции.
7) Найдите все значения *x*, при которых: а) $y(x) > 0$; б) $y(x) = 0$; в) $y(x) < 0$.
8) Составьте уравнение касательной к параболе, параллельной прямой АВ.
9) Найдите расстояние между секущей АВ и касательной к параболе.
10) Постройте графики параболы, секущей и касательной на одном чертеже.
11) Чему равна площадь треугольника АВС?
12) Составьте уравнения касательных к параболе, параллельных соответственно сторонам ВС и АС.
13) Какое наибольшее (наименьшее) значение может принять выражение 2*x*+3*y*, если *x*, *y* принадлежат графику данной функции $y = ax^2 + bx + c$?

    Результаты исследования оформите в таблицу:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Задание 2.

Даны 3 квадратных трехчлена $f_1(x) = 45x^2 + 21x - 5a$; $f_2(x) = 45x^2 + 21ax - 5$; $f_3(x) = 45ax^2 + 21x - 5$. Проведите исследование каждого квадратного трехчлена по следующему плану.

Определите, при каких значениях параметра *a* соответствующее квадратное уравнение:

17) не имеет действительных корней;
18) имеет 2 различных действительных корня;
19) имеет 1 корень. Этот случай проиллюстрируйте графиком функции;
20) имеет корень, равный 13;
21) имеет только положительные различные корни;
22) не имеет неотрицательных корней;
23) имеет корни разных знаков;
24) имеет различные корни, принадлежащие интервалу (0; 2);
25) имеет дискриминант, совпадающий хотя бы с одним из дискриминантов других уравнений;
26) имеет дискриминант D = 55 при $a \in Z$;
27) корни уравнений $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = 0$ перемежаются, т.е. каждое уравнение имеет 2 различных корня и между корнями одного уравнения находится только 1 корень другого уравнения.
28) корни уравнений $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = 0$ не перемежаются, т.е. каждое уравнение имеет 2 различных корня и между корнями одного уравнения нет корней другого уравнения.
29) не вычисляя корней многочленов $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$, для каждого из них определите следующие выражения:
    $S_1 = x_1 + x_2$; $S_2 = x_1^2 + x_2^2$; $S_3 = x_1^3 + x_2^3$; $S_4 = x_1^4 + x_2^4$; $S_5 = x_1^5 + x_2^5$; $S_6 = x_1^6 + x_2^6$, где x_1, x_2 - корни соответствующих многочленов.

30) вычислите расстояние между прямой *y = 5x - 11* и каждой из парабол $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $y = f_3(x)$ при значении параметра *a*, равном $2\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\right]$, где $[b]$ означает целую часть числа *b*, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее *b*.

Результаты исследования оформите в таблицу:

	$f_1(x)=45x^2+21x-5a$	$f_2(x)=45x^2+21ax-5$	$f_3(x)=45ax^2+21x-5$
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			