Максютин Алексей Алексеевич
К.п.н., Почётный работник образования РФ

Многоуровневая система текстовых задач экономического содержания.

Базовые задачи и приёмы решения

Можно выделить несколько типов базовых задач (БЗ) экономического содержания, решаемых с помощью различного математического аппарата, из тех задач, что предлагаются на итоговой аттестации и на вступительных экзаменах.

БЗ №1. Задачи на моделирование n – летних равных платежей, использующие сложные проценты, решаемые с помощью уравнений различных степеней. Основные параметры модели: $S; p; n; x$, где S – взятый кредит, p – процентная ставка банка, n- количество лет или месяцев, на которые взят кредит, x- размер ежегодного (ежемесячного) платежа. Например, для двух- ,трёх- и четырёхлетних равных платежей модель имеет вид: $St^2 - xt - x = 0$; $St^3 - xt^2 - xt - x = 0$; $St^4 - xt^3 - xt^2 - xt - x = 0$, где $t = 1 + \frac{p}{100}$. Обозначим для краткости построенную математическую модель так: Модель 1.

Внутри базовой задачи и её модели возможны небольшие модификации, которые мы обозначаем словами модифицированная задач (МЗ), если она мало отличается от разобранной знакомой задачи (ЗЗ), и незнакомая задача (НЗ), если решателю до сих пор не встречались подобные формулировки. Задачи трёх выделенных подуровней каждой базовой задачи могут отличаться технической сложностью, необычной формой формулировки задания, необходимостью самостоятельно немного модифицировать знакомый алгоритм для приспособления его к новой ситуации. Известно, что перенос алгоритма из знакомой ситуации в видоизменённую является сложной творческой проблемой в обучении. Применение конструируемой многоуровневой системы учебных задач помогает развивать логическое (формирование логических действий) и математическое (построение моделей) мышление ученика. Ко всем 111 задачам даны ответы, многие задачи содержат подробные решения.

БЗ №2. Задачи на построение математических моделей дифференциальных платежей в экономических задачах, когда банк повышает долг на фиксированный процент, но после внесения очередного платежа долг должен убывать по определённому закону (обычно так: $S;\ \frac{n-1}{n}S;\ \frac{n-2}{n}S;\ \frac{n-3}{n}S;\ \frac{n-4}{n}S;\ ...;\ \frac{2}{n}S;\ \frac{1}{n}S;\ 0.$ Тогда

начисленная банком последовательность долгов до внесения платежа, имеет вид: $\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot S;\quad \left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{n-1}{n}S;\quad \left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{n-2}{n}S;\quad \left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{n-3}{n}S;\quad \left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{n-4}{n}S;\quad ..$).
$.;\quad \left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{2}{n}S;\quad \left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{1}{n}S;\quad 0.$

Размер очередного платежа x_i находится как разность между начисленным долгом и соответствующим членом заданной последовательности убывания долга после платежа: $x_1=\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot S-\frac{n-1}{n}S=\frac{S}{n}\left(\left(1+\frac{p}{100}\right)n-n+1\right)=\frac{S}{n}\left(\frac{p}{100}n+1\right)=\frac{S}{n}+\frac{p}{100}S.$ Второй платёж вычисляем аналогично: $x_2=\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{n-1}{n}S-\frac{n-2}{n}S=\frac{S}{n}\left(\left(1+\frac{p}{100}\right)(n-1)-n+2\right)=\frac{S}{n}\left(\frac{p}{100}(n-1)+1\right)=\frac{S}{n}+\frac{p}{100}\frac{n-1}{n}S.$

Последовательность платежей $\{x_i\}$, удовлетворяющих требованию задачи, имеет вид:

$\{x_i\}:\ \frac{S}{n}+\frac{p}{100}S;\ \frac{S}{n}+\frac{p}{100}\frac{n-1}{n}S;\ \frac{S}{n}+\frac{p}{100}\frac{n-2}{n}S;\ \dots\ \frac{S}{n}+\frac{p}{100}\frac{2}{n}S;\ \frac{S}{n}+\frac{p}{100}\frac{1}{n}S$. Нетрудно подсчитать

сумму всех платежей Σx_i, она сводится к суммированию двух арифметических прогрессий: $\Sigma x_i=n\cdot\frac{S}{n}+\frac{S}{n}\cdot\frac{p}{100}(n+n-1+n-2+n-3+\dots+2+1)=S+\frac{S}{n}\cdot\frac{p}{100}\frac{n+1}{2}\cdot n=S\left(1+\frac{p\cdot(n+1)}{200}\right).$

В некоторых задачах требуется найти сумму первой или второй половины всех платежей.

Основные параметры второй модели аналогичны Модели 1: $S;p;n;x_i$, где S – взятый кредит, p – процентная ставка банка, n- количество лет или месяцев, на которые взят кредит, x_i- размеры ежегодных (ежемесячных) платежей, в этом отличие от предыдущей модели. Обозначим для краткости построенную математическую модель так: Модель 2.

БЗ №3. Задачи, сводящиеся к математическим моделям, решаемым с помощью вычислений (числовых выражений), прикидки. Обычно в задачах этого типа требуется вычислить минимальный срок платежей, если возможности плательщика ограничены сверху заданной суммой. Понятно, что минимальное количество лет погашения кредита будет при максимальном ежегодном платеже.

Прикидка позволяет примерно определить минимальное число лет платежа, но последующее обоснование, например, с помощью числового моделирования, обязательно.

Другой, аналитический способ решения, основан на поиске минимального натурального n, при котором выполняется неравенство типа $St^3-xt^2-xt-x\le 0$ или $St^4-xt^3-xt^2-xt-x\le 0$, а в общем случае $St^n \le x\cdot\frac{t^n-1}{t-1}$, где S- величина взятого кредита, x- величина ежегодного платежа, $t=1+\frac{p}{100}$. Последнее неравенство проще решать перебором по n, начиная со значения n, найденного прикидкой (а не логарифмированием по основанию $t=1+\frac{p}{100}$).

БЗ №4. Задачи на сложные проценты, решаемые с помощью систем уравнений. Обычно одно или несколько уравнений задачи аналогичны уравнениям из модели 1: $St^2-xt-x=0$; $St^3-xt^2-xt-x=0$; $St^4-xt^3-xt^2-xt-x=0$, где $t=1+\frac{p}{100}$.

БЗ №5. Задачи, сводящиеся к математическим моделям, решаемые *функциональными методами*, т.е. с помощью исследования свойств функций, входящих в модель. Как известно, в алгоритм *полного исследования функции* входит исследование функции на монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, изучение поведения графика на бесконечности, асимптоты, и др.

БЗ №6. Задачи, сводящиеся к задачам линейного программирования, решаемые геометрическими методами. При решении используется построение многоугольных областей, заданных линейными неравенствами; семейства параллельных прямых, связанных с целевыми функциями. Как правило, наибольшие и наименьшие значения целевой функции достигаются в угловых точках многоугольной области.

БЗ №7. Задачи, сводящиеся к математическим моделям, решаемым в целых числах. Как правило, модели состоят из диофантовых уравнений первой или второй степени.

БЗ №8. Задачи, решаемые комбинированными способами.

Внутри каждого типа возможны варианты и модификации, частичное использование приёмов из другой разновидности. Некоторые из разобранных задач решены существенно различными способами (с использованием разного математического аппарата). Большинство задач взяты из сборников типовых заданий по подготовке к ЕГЭ по математике профильного уровня, из КИМов профильного ЕГЭ, вариантов вступительных экзаменов.

Перейдём к построению многоуровневой системы задач и к их решению.

БЗ №1. Задачи на моделирование n – летних равных платежей, использующие сложные проценты, решаемые с помощью уравнений различных степеней. Основные параметры модели: $S;p;n;x$**, где S –**

взятый кредит, p – процентная ставка банка, n- количество лет или месяцев, на которые взят кредит, x- размер ежегодного (ежемесячного) платежа. Например, для трёхлетних равных платежей модель имеет вид $St^3 - xt^2 - xt - x = 0$, где $t = 1 + \frac{p}{100}$. Модель 1.

Задача 1.1(ЗЗ). 31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк увеличивает долг на величину процентной ставки, затем Дмитрий переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x , чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (т.е. за два года)?

Решение. Для построения математической модели используем знакомый подход. Пусть 31.12.14 Дмитрий взял S рублей под p% годовых. S=4 290 000 рублей; p% =14,5%. 31.12.15. после начисления процентов долг составит $S\left(1+\frac{p}{100}\right)$рублей, а после внесения платежа в x рублей долг составит $S\left(1+\frac{p}{100}\right)-x$ руб. 31.12.16 после начисления процентов долг составит $\left(S\left(1+\frac{p}{100}\right)-x\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)$рублей, а после внесения платежа в x рублей долг будет погашен, т.е. получим уравнение $\left(S\left(1+\frac{p}{100}\right)-x\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)-x=0$, которое надо решить относительно x. Преобразуем уравнение:

$$S\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 - x\left(1+\frac{p}{100}\right) - x = 0 \Leftrightarrow S\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 = x\left(1+\frac{p}{100}+1\right) \Leftrightarrow x = \frac{S\left(1+\frac{p}{100}\right)^2}{2+\frac{p}{100}} = 2622050.$$

Отв.2 622 050 рублей.

Задача 1.2(ЗЗ). 31 декабря 2014 года Виктор взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк увеличивает долг на величину процентной ставки, затем Виктор переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x , чтобы Виктор выплатил долг четырьмя равными платежами (т.е. за четыре года)?

Решение. Для построения математической модели используем рассуждения, аналогичные задаче1.1, выводим уравнение для случая четырёхлетний равных платежей (сравните с решением задачи 4.1):

$\left(\left(\left(S\left(1+\frac{p}{100}\right)-x\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)-x\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)-x\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)-x=0$ т.е. долг будет полностью выплачен. Обозначим $\left(1+\frac{p}{100}\right)=t$, тогда последнее равенство примет вид: $St^4-xt^3-xt^2-xt-x=0$, это математическая модель четырёхлетних платежей, здесь x – искомая переменная, S и t известные величины. Решим уравнение $St^4=x\left(t^3+t^2+t+1\right)\Leftrightarrow x=\frac{St^4}{\left(t^3+t^2+t+1\right)}=2\,296\,350$.

Отв.2 296 350 рублей.

Задача 1.3(МЗ). 31 декабря 2015 года клиент взял в банке 1 млн. рублей в кредит под p% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря следующего года банк увеличивает долг на p%, затем клиент переводит очередной платёж. Клиент погасил кредит и проценты за два платежа, переведя в первый раз 540 тыс. рублей, во второй 649, 6 тыс. рублей. Чему равна процентная ставка? (Отв.12).

Решение. Постоим математическую модель задачи. Пусть 31.12.15 клиент взял S рублей под p% годовых. 31.12.16 после начисления процентов долг составит $S\left(1+\frac{p}{100}\right)$рублей, а после внесения платежа в x рублей долг составит $S\left(1+\frac{p}{100}\right)-x$ руб. 31.12.17 после начисления процентов долг составит $\left(S\left(1+\frac{p}{100}\right)-x\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)$рублей, а после внесения платежа в y рублей долг составит $\left(S\left(1+\frac{p}{100}\right)-x\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)-y=0$ рублей, т.е. будет полностью выплачен. Обозначим $\left(1+\frac{p}{100}\right)=t$, тогда последнее равенство примет вид: $St^2-xt-y=0$, решением квадратного уравнения при S=1000000, x=540000, y=649600 будет t=1,12. Обратная замена $1+\frac{p}{100}=1.12\Leftrightarrow p=12$. Ответ: 12. Решение нетрудно обобщить на трёхлетние различные платежи x,y,z.

Задача 1.4. Курсы евро и доллара в течение недели менялись следующим образом:

	евро	доллар
Понедельник	80 р.	50 р.
Вторник	90 р.	56 р.

Среда	100 р.	50 р.
Четверг	90 р.	60 р.
Пятница	80 р.	50 р.
Суббота	90 р.	60 р.

На сколько процентов максимально можно было увеличить за эту неделю капитал, играя на изменении курса этих валют? (Начальный капитал имелся в рублях. Конечный – тоже должен быть в рублях. В течение недели можно имеющиеся деньги как угодно распределять в рубли, доллары, евро. Курсы продажи и покупки считаются одинаковыми).

Решение. Введём в рассмотрение *коэффициент изменения курса евро* при переходе от предыдущего дня к последующему, таких коэффициентов при данных условиях будет пять: $\frac{9}{8};\frac{10}{9};\frac{9}{10};\frac{8}{9};\frac{9}{8}$.

Коэффициент изменения курса доллара составляет: $\frac{28}{25};\frac{25}{28};\frac{6}{5};\frac{5}{6};\frac{6}{5}$. Поэтому максимально возможное увеличение капитала будет происходить со следующими коэффициентами: $\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{6}{5}\cdot 1\cdot\frac{6}{5}=1.8$. На 80% максимально можно было увеличить за эту неделю капитал, играя на изменении курса валют.

Задача 1.5. Алексей положил 8000 рублей в банк. По истечении года к его вкладу добавляются деньги, начисленные в качестве процентов. Через год его друг Антон положил в тоже банк ту же сумму на тех же условиях. Ещё через год они сняли свои вклады и оказалось, что Алексей получил на 784,8 рублей больше, чем Антон. Какой процент годовых начислял банк по вкладам?

Решение. Обозначим величину первоначального вклада S, а годовую процентную ставку – p%. Тогда математическая модель задачи запишется так: $S\left(1+\frac{p}{100}\right)^2-S\left(1+\frac{p}{100}\right)=784{,}8 \Leftrightarrow \left(1+\frac{p}{100}\right)^2-\left(1+\frac{p}{100}\right)=\frac{784{,}8}{8000}=0{,}0981$.

Квадратное уравнение относительно $t=\left(1+\frac{p}{100}\right)$ имеет вид $t^2-t-0.0981=0$,его корень $t=\frac{1+1{,}18}{2}=1{,}09$, $1{,}09=\left(1+\frac{p}{100}\right)\Rightarrow p=9$. Ответ: 9%.

Задача 1.6. Светлана положила 5500 рублей в банк. По истечении года к её вкладу добавляются деньги, начисленные в качестве процентов. Через год Анна положила в тоже банк ту же сумму на тех же условиях.

Ещё через год они сняли свои вклады и оказалось, что Светлана получила на 739,2 рубля больше, чем Анна. Какой процент годовых начислял банк по вкладам? Ответ:12%.

БЗ №2. Задачи на построение математических моделей дифференциальных платежей в экономических задачах, когда банк повышает долг на фиксированный процент, но после внесения очередного платежа долг должен убывать по определённому закону (обычно так: $S;\ \frac{n-1}{n}S;\ \frac{n-2}{n}S;\ \frac{n-3}{n}S;\ \frac{n-4}{n}S;\ ...;\ \frac{2}{n}S;\ \frac{1}{n}S;\ 0.$ **Тогда начисленная банком последовательность долгов до внесения платежа, имеет вид:** $\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot S;\ \left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{n-1}{n}S;\ \left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{n-2}{n}S;\ \left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{n-3}{n}S;\ \left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{n-4}{n}S;\ ..$ **).** $.;\ \left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{2}{n}S;\ \left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{1}{n}S;\ 0.$

Размер очередного платежа x_i **находится как разность между начисленным долгом и соответствующим членом заданной последовательности убывания долга после платежа:** $x_1=\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot S-\frac{n-1}{n}S=\frac{S}{n}\left(\left(1+\frac{p}{100}\right)n-n+1\right)=\frac{S}{n}\left(\frac{p}{100}n+1\right)=\frac{S}{n}+\frac{p}{100}S.$ **Второй платёж вычисляем аналогично:** $x_2=\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{n-1}{n}S-\frac{n-2}{n}S=\frac{S}{n}\left(\left(1+\frac{p}{100}\right)(n-1)-n+2\right)=\frac{S}{n}\left(\frac{p}{100}(n-1)+1\right)=\frac{S}{n}+\frac{p}{100}\frac{n-1}{n}S.$

Последовательность платежей x_i**, удовлетворяющих требованию задачи, имеет вид:**
$\frac{S}{n}+\frac{p}{100}S$**;** $\frac{S}{n}+\frac{p}{100}\frac{n-1}{n}S$**;** $\frac{S}{n}+\frac{p}{100}\frac{n-2}{n}S$**; ...** $\frac{S}{n}+\frac{p}{100}\frac{2}{n}S$**;** $\frac{S}{n}+\frac{p}{100}\frac{1}{n}S$**. Нетрудно подсчитать сумму всех платежей** Σx_i**, она сводится к суммированию двух арифметических прогрессий:** $\Sigma x_i=n\cdot\frac{S}{n}+\frac{S}{n}\cdot\frac{p}{100}(n+n-1+n-2+n-3+...+2+1)=S+\frac{S}{n}\cdot\frac{p}{100}\frac{n+1}{2}\cdot n=S\left(1+\frac{p\cdot(n+1)}{200}\right).$ **В некоторых задачах требуется найти сумму первой или второй половины всех платежей.**

Основные параметры модели аналогичны модели 1: $S;p;n;x_i$**, где S – взятый кредит, p – процентная ставка банка, n- количество лет или месяцев, на которые взят кредит,** x_i**- размеры ежегодных (ежемесячных) платежей, в этом отличие от предыдущей схемы. Для краткости обозначим построенные последовательности - Модель 2.**

Задача 2.1. 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия предоставления кредита следующие:1)1-ого числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца; 2)со 2-ого по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; 3)15-ого числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-ое число предыдущего месяца.
Известно, что за первые 12 месяцев нужно выплатить банку 1370 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит? (Ответ: 2000000 рублей).

Решение. Если бы не было начисления 2% на величину долга, то платежи осуществлялись бы равными долями по $\frac{S}{24}$ рублей, где S – сумма кредита. Величина долга (до внесения платежа) по месяцам составляла бы последовательность:

N	1	2	3	4	…	22	23	24
D_n	S	$S-\frac{S}{24}$	$S-\frac{2S}{24}$	$S-\frac{3S}{24}$		$S-\frac{21S}{24}$	$S-\frac{22S}{24}$	$S-\frac{23S}{24}$
или	S	$\frac{23S}{24}$	$\frac{22S}{24}$	$\frac{21S}{24}$	…	$\frac{3S}{24}$	$\frac{2S}{24}$	$\frac{1\cdot S}{24}$

Заметим, что третье условие предоставления кредита: 15-ого числа каждого месяца долг должен быть ***на одну и ту же величину*** меньше долга на 15-ое число предыдущего месяца, - выполнено. В данных условиях ***одна и та же величина*** может быть только $\frac{S}{24}$. Именно на эту величину должен уменьшаться долг 15-ого числа и в случае 2% роста долга. Иначе говоря, такая последовательность долга предписана условием 3) исходной задачи.
С учётом 2% повышения долга ежемесячно, размер долга (до платежа) составит следующую последовательность:

N	1	2	3	4	…	22	23	24
D_n	$1.02\cdot S$	$1.02\cdot\frac{23S}{24}$	$1.02\cdot\frac{22S}{24}$	$1.02\cdot\frac{21S}{24}$	…	$1.02\cdot\frac{3S}{24}$	$1.02\cdot\frac{2S}{24}$	$1.02\cdot\frac{1\cdot S}{24}$

Значит выплаты должны быть больше, чем $\frac{S}{24}$. Посчитаем величину первой выплаты, вычитая из $1.02\cdot S$ величину $\frac{23S}{24}$, которая должна остаться по условию задачи: $1.02\cdot S-\frac{23S}{24}=\frac{S}{24}+0.02\cdot S$ - величина первой выплаты. Аналогично вычисляем второй платёж:

$$1.02\cdot\frac{23}{24}S-\frac{22S}{24}=\frac{S}{24}(1.02\cdot 23-22)=\frac{S}{24}((1+0.02)\cdot 23-22)=\frac{S}{24}(1+0,02\cdot 23)=\frac{S}{24}+0,02\cdot\frac{23}{24}S.$$

Таким образом, платежи по месяцам составят последовательность:

$\frac{S}{24}+0.02\cdot S$; $\frac{S}{24}+0,02\cdot\frac{23}{24}S$; $\frac{S}{24}+0,02\cdot\frac{22}{24}S$; …; $\frac{S}{24}+0,02\cdot\frac{3}{24}S$; $\frac{S}{24}+0,02\cdot\frac{2}{24}S$; $\frac{S}{24}+0,02\cdot\frac{1}{24}S$.

За первые 12 месяцев сумма платежей составит1370000 рублей:

$$\left(\frac{S}{24}+0.02\cdot S\right)+\left(\frac{S}{24}+0,02\cdot\frac{23}{24}S\right)+\left(\frac{S}{24}+0,02\cdot\frac{22}{24}S\right)+\ldots+\left(\frac{S}{24}+0,02\cdot\frac{13}{24}S\right)=1370000\Leftrightarrow$$

$$\frac{12\cdot S}{24}+\frac{0.02\cdot S}{24}(24+23+22+\ldots+13)=1370000\Leftrightarrow$$

$\frac{S}{2}+\frac{0.02\cdot S}{24}\cdot 37\cdot 6=1370000\Leftrightarrow S=2000000.$ Ответ: 2000000 рублей.

Задача 2.2. (Для самостоятельного решения). 15 января планируется взять кредит в банке на 18 месяца. Условия предоставления кредита следующие:1)1-ого числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца; 2)со 2-ого по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; 3)15-ого числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-ое число предыдущего месяца.

Известно, что за первые 9 месяцев нужно выплатить банку 1024 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит? Ответ:1600000.

Задача 2.3. 15 января планируется взять кредит в банке на сумму 2400000 рублей на 24 месяца. Условия предоставления кредита следующие:1)1-ого числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца; 2)со 2-ого по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; 3)15-ого числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-ое число предыдущего месяца.

Какую сумму нужно выплатить банку за последние 12 месяцев? Ответ:1356000.

Решение. Используем математическую модель, построенную в задаче №6. Таким образом, платежи по месяцам составят последовательность:

$\frac{S}{24}+0.02\cdot S$; $\frac{S}{24}+0,02\cdot\frac{23}{24}S$; $\frac{S}{24}+0,02\cdot\frac{22}{24}S$; …; $\frac{S}{24}+0,02\cdot\frac{3}{24}S$; $\frac{S}{24}+0,02\cdot\frac{2}{24}S$; $\frac{S}{24}+0,02\cdot\frac{1}{24}S$.

За последние 12 месяцев сумма платежей составит:

$$\left(\frac{S}{24}+0.02\cdot\frac{12}{24}S\right)+\left(\frac{S}{24}+0,02\cdot\frac{11}{24}S\right)+\left(\frac{S}{24}+0,02\cdot\frac{10}{24}S\right)+\ldots+\left(\frac{S}{24}+0,02\cdot\frac{1}{24}S\right)=$$

$\frac{12\cdot S}{24}+\frac{0.02\cdot S}{24}(12+11+10+...+1)$ = $\frac{S}{2}+\frac{0.02\cdot S}{24}\cdot 13\cdot 6$ =1356000. Ответ: 1356000 рублей.

Задача 2.4(МЗ). (Для самостоятельного решения). 15 января планируется взять кредит в банке на 15 месяцев. Условия предоставления кредита следующие:1)1-ого числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца; 2)со 2-ого по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; 3)15-ого числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-ое число предыдущего месяца. Известно, что восьмая выплата составила 99,2 тыс. рублей.

Какую сумму нужно выплатить банку в течение всего срока кредитования? Ответ:1488000. Указание: $x_9=\frac{S}{15}+0{,}03\cdot S\cdot\frac{8}{15}=992000\Rightarrow S=1{,}2$ млн. сумма 15 платежей составит:

$\left(\frac{S}{15}+0.03\cdot S\right)$ $+\left(\frac{S}{15}+0{,}03\cdot\frac{14}{15}S\right)+$ $\left(\frac{S}{15}+0{,}03\cdot\frac{13}{15}S\right)+$ …+ $\left(\frac{S}{15}+0{,}03\cdot\frac{1}{15}S\right)=$

$\frac{15\cdot S}{15}+\frac{0.03\cdot S}{15}(15+14+13+...+1)$ = $S\left(1+\frac{0.01\cdot S}{5}\cdot\frac{16}{2}\cdot 15\right)=S\cdot 1{,}24$ =1488000.

Задача 2.5(МЗ).В августе планируется взять кредит в банке на сумму 3 млн. рублей на некоторый срок (целое количество лет). Условия предоставления кредита следующие: 1)каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года; 2)с февраля по июль каждого года необходимо выплатить часть долга; 3)в августе каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на август предыдущего года. **На сколько лет** планируется взять кредит, если известно, что вся сумма выплат по кредиту составит 5,1 млн. рублей? Ответ:6.

Задача 2.6(МЗ). В мае планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн. рублей на некоторый срок (целое количество лет). Условия предоставления кредита следующие: 1)каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года; 2)с февраля по апрель каждого года необходимо выплатить часть долга; 3)в мае каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на май предыдущего года. **На сколько лет** планируется взять кредит, если известно, что вся сумма выплат по кредиту составит 6 млн. рублей? Ответ:3.

Задача 2.7(МЗ). В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн. рублей на некоторый срок (целое количество лет). Условия предоставления кредита следующие:

1)каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года; 2)с февраля по июль каждого года необходимо выплатить часть долга; 3)в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года. На **сколько лет** планируется взять кредит, если известно, что вся сумма выплат по кредиту составит 18 млн. рублей? **(Отв.7 лет).**

Задача 2.8(НЗ). Индивидуальному предпринимателю 15 марта выдан кредит на расширение производства. В таблице указан график его погашения. Текущий долг указан в процентах от взятого кредита.

Дата	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07	15.08	15.09
Величина долга	100% от S	80% от S	65% от S	45% от S	30% от S	20% от S	0% от S

В конце каждого месяца, начиная с марта, банк увеличивает текущий долг на 5%. После этого в первой половине последующего месяца (т.е. не позднее 14 числа) предприниматель должен внести в банк такую сумму, чтобы оставшийся долг стал равным указанному в таблице проценту от взятого кредита. На сколько процентов от взятого кредита общая сумма выплат превысит величину кредита?

Решение. Пусть S – величина взятого кредита. После увеличения долга на 5% в конце марта долг составит $1{,}05\cdot S$. Предположим, не ограничивая общности рассуждений, что долг оплачивается 14 числа, начиная с апреля и в последующие месяцы. Первый платёж обозначим x_1, тогда, согласно условию имеет место равенство: $1{,}05\cdot S - x_1 = 0.8\cdot S$, отсюда находим величину первого платежа: $x_1 = 0{,}25\cdot S$

Аналогичные вычисления оформим в таблицу:

14.04	$1{,}05\cdot S - x_1 = 0.8\cdot S$	$x_1 = 0{,}25\cdot S$
14.05	$1{,}05\cdot 0{,}8\cdot S - x_2 = 0.65\cdot S$	$x_2 = 0{,}19\cdot S$
14.06	$1{,}05\cdot 0{,}65\cdot S - x_3 = 0.45\cdot S$	$x_3 = 0{,}2325\cdot S$
14.07	$1{,}05\cdot 0{,}45\cdot S - x_4 = 0.3\cdot S$	$x_4 = 0{,}1725\cdot S$
14.08	$1{,}05\cdot 0{,}3\cdot S - x_5 = 0.2\cdot S$	$x_5 = 0{,}115\cdot S$
14.09	$1{,}05\cdot 0{,}2\cdot S - x_6 = 0$	$x_6 = 0{,}21\cdot S$
		$\sum x_i = 1{,}17\cdot S$

Таким образом, сумма выплат превысила размер кредита на 0,17S, т.е. переплата составила 17%. **Второй способ** решения: сложим почленно уравнения во втором столбце:

$$1{,}05\cdot S(1+0{,}8+0{,}65+0{,}45+0{,}3+0{,}2)-\sum x_i = S\cdot(0{,}8+0{,}65+0{,}45+0{,}3+0{,}2)$$

$$\Leftrightarrow S\cdot 1{,}05\cdot 3{,}4-\sum x_i = 2{,}4\cdot S \quad \Leftrightarrow \sum x_i = 1{,}17\cdot S\,.$$

Ответ: На 17% от взятого кредита общая сумма выплат превысит величину кредита.

Задача 2.9(НЗ). Индивидуальному предпринимателю 15 июня выдан кредит на расширение производства. В таблице указан график его погашения. Текущий долг указан в процентах от взятого кредита.

Дата	15.06	15.07	15.08	15.09	15.10	15.11	15.12
Величина долга	100% от S	85% от S	65% от S	40% от S	30% от S	20% от S	0% от S

В конце каждого месяца, начиная с июня, банк увеличивает текущий долг на 7%. После этого в первой половине последующего месяца (т.е. не позднее 14 числа) предприниматель должен внести в банк такую сумму, чтобы оставшийся долг стал равным указанному в таблице проценту от взятого кредита. На сколько процентов от взятого кредита общая сумма выплат превысит величину кредита? Ответ: на 23,8% от взятого кредита общая сумма выплат превысит величину кредита.

Задача 2.10(НЗ). Анатолий Васильевич взял в начале года в банке кредит в 2 млн. рублей на пять лет. Условия погашения долга следующие: долг будет погашаться пятью платежами в конце каждого из пяти лет; имеющийся в начале года долг (начиная с первого года) будет в конце года увеличиваться на 10%; в конце года после начисления процентов часть долга необходимо погасить в таком размере, чтобы остаток был равен сумме, указанной в таблице.

Год	1	2	3	4	5
Величина долга в рублях	1600 000	1200 000	800 000	400 000	0

На сколько процентов от взятого кредита общая сумма выплат превысит величину кредита?

Решение оформим в таблицу:

Величина долга на начало года	Увеличение долга на 10%	Величина платежа до указанного остатка	Остаток долга
1год, 2 млн.	2,2 млн.	600тыс.	1,6 млн.
2 год,1,6 млн.	1,76млн.	560тыс.	1,2 млн.
3год, 1,2 млн.	1,32 млн.	520тыс.	0,8 млн.
4год, 0,8 млн.	0,88 млн.	480тыс.	0,4 млн.
5год, 0,4 млн.	0,44 млн.	440тыс.	0 млн.
		$\sum$ =2,6 млн.	

Переплата составила 0,6 млн. рублей, процент переплаты $= \frac{600000}{2000000} \cdot 100\% = 0,3 \cdot 100\% = 30\%$. Ответ: на 30% от взятого кредита общая сумма выплат превысит величину кредита.

Задача 2.11(НЗ). Виктория Самсоновна взяла в начале года в банке кредит в 1,5 млн. рублей на пять лет. Условия погашения долга следующие: долг будет погашаться пятью платежами в конце каждого из пяти лет; имеющийся в начале года долг (начиная с первого года) будет в конце года увеличиваться на 15%; в конце года после начисления процентов часть долга необходимо погасить в таком размере, чтобы остаток был равен сумме, указанной в таблице.

Год	1	2	3	4	5
Величина долга в рублях	1200 000	900 000	600 000	300 000	0

На сколько процентов от взятого кредита общая сумма выплат превысит величину кредита? Ответ: на 45% от взятого кредита общая сумма выплат превысит величину кредита.

Задача 2.12. 20 марта Виктор взял в банке кредит на 4 месяца. График погашения кредита представлен в таблице.

Дата	20.03	20.04	20.05	20.06	20.07
Долг (в процентах от кредита)	100%	80%	60%	40%	0%

В конце каждого месяца, начиная с марта, текущий долг увеличивается на 3%, а выплаты по кредиту Виктор проводит по графику с 1 по 20 число каждого месяца, начиная с апреля. На сколько процентов больше суммы кредита выплатит Виктор? (Отв.8,4).

Задача 2.13. 10 марта Андрей взял в банке кредит на 5 месяца. График погашения кредита представлен в таблице.

Дата	10.03	10.04	10.05	10.06	10.07	10.08
Долг (в процентах от кредита)	100%	80%	60%	30%	10%	0%

В конце каждого месяца, начиная с марта, текущий долг увеличивается на 4%, а выплаты по кредиту Андрей проводит по графику с 1 по 10 число каждого месяца, начиная с апреля. На сколько процентов больше суммы кредита выплатит Андрей? (Отв.11,2).

Задача 2.14. ЕГЭ 2018г (вариант 338). 15 декабря планируется взять кредит в банке на 17 месяцев. Условия его возврата таковы:

-1-ого числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-ого по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-ого числа каждого месяца соответствующие долги с первого по шестнадцатый должны быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

- 15-го числа 16-го месяца долг составит 400 000 рублей;

- к 15-му числу 17-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного погашения составит 1608 тысяч рублей?

Отв. 1,2 млн. рублей.

Решение. Основные параметры модели: n=17, p%=3%, долг после очередной выплаты убывает по арифметической прогрессии: $a_1 = S;\ \ldots,\ a_{17} = 400,\ a_{18} = 0;\ d < 0.$ По формуле общего члена прогрессии $a_{17} = S + 16d = 400 \Rightarrow d = \frac{400 - S}{16} < 0.$ Тогда последовательность убывающих долгов (в тысячах рублей) **после** выплат имеет вид:

$$(S);\quad S + \frac{400 - S}{16};\quad S + 2\cdot\frac{400 - S}{16};\quad S + 3\cdot\frac{400 - S}{16};\ldots;\quad S + 15\cdot\frac{400 - S}{16};\quad S + 16\cdot\frac{400 - S}{16} = 400;\ 0.$$

После преобразований получаем:

$$(S);\quad \frac{15\cdot S + 400}{16};\quad \frac{14\cdot S + 2\cdot 400}{16};\quad \frac{13\cdot S + 3\cdot 400}{16};\quad \frac{12\cdot S + 4\cdot 400}{16}\ldots;\quad \frac{S + 15\cdot 400}{16};\quad 400;\quad 0.$$

А последовательность долгов **до** выплат (после увеличения банком долга на 3%, т.е. на 1-ое число каждого месяца) имеет вид:

$$1.03\cdot S;\quad 1.03\cdot\frac{15\cdot S + 400}{16};\quad 1.03\cdot\frac{14\cdot S + 2\cdot 400}{16};\quad 1.03\cdot\frac{13\cdot S + 3\cdot 400}{16};\quad 1.03\cdot\frac{12\cdot S + 4\cdot 400}{16}\ldots;$$

$$1.03\cdot\frac{S + 15\cdot 400}{16};\quad 1.03\cdot 400 = 412;\quad 0.$$

Последовательность платежей x_i получим, вычисляя соответствующие разности: $x_1 = 1.03\cdot S - \frac{15\cdot S + 400}{16} = 0.03\cdot S + S - \frac{15\cdot S + 400}{16} = 0.03\cdot S + \frac{S - 400}{16}.$

$$x_2 = 1.03\cdot\frac{15\cdot S + 400}{16} - \frac{14\cdot S + 2\cdot 400}{16} = 0.03\cdot\frac{15\cdot S + 400}{16} + \frac{S - 400}{16}.$$

$$x_3 = 1.03\cdot\frac{14\cdot S + 2\cdot 400}{16} - \frac{13\cdot S + 3\cdot 400}{16} = 0.03\cdot\frac{14\cdot S + 2\cdot 400}{16} + \frac{S - 400}{16}.$$

$$x_4 = 1.03\cdot\frac{13\cdot S + 3\cdot 400}{16} - \frac{12\cdot S + 4\cdot 400}{16} = 0.03\cdot\frac{13\cdot S + 3\cdot 400}{16} + \frac{S - 400}{16}.$$

…

$$x_{15}=1.03\cdot\frac{2\cdot S+14\cdot 400}{16}-\frac{1\cdot S+15\cdot 400}{16}=0.03\cdot\frac{2\cdot S+14\cdot 400}{16}+\frac{S-400}{16}.$$
$$x_{16}=1.03\cdot\frac{1\cdot S+15\cdot 400}{16}-400=0.03\cdot\frac{1\cdot S+15\cdot 400}{16}+\frac{S-400}{16}.$$
$$x_{17}=412.$$
Сумма платежей равна 1608 тыс. руб.= $x_1+\ldots+x_{17}=$
$$=\frac{0.03}{16}\left[16\cdot S+(15\cdot S+400)+(14\cdot S+2\cdot 400)+(13\cdot S+3\cdot 400)+\ldots+(1\cdot S+15\cdot 400)\right]+S-400+412=$$
$$=\frac{0.03}{16}\left[S\cdot\frac{16+1}{2}\cdot 16+400\cdot\frac{1+15}{2}\cdot 15\right]+S+12=\frac{0.03}{16}\left[S\cdot 17\cdot 8+400\cdot 8\cdot 15\right]+S+12=1.255\cdot S+102.$$
Уравнение $1608=1.255\cdot S+102$ равносильно S=1 200 000 (рублей).

Отв. 1,2 млн. рублей планируется взять в кредит.

Задача 2.15. (Ящ.2020, В.1.17 (МЗ)). Планируется взять кредит в банке на целое число миллионов рублей на пять лет. Условия его возврата таковы:

-в середине каждого года долг возрастает на 20% по сравнению с началом текущего года;

- в конце 1,2,3 –го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному;

- в конце 4 и 5-ого годов заёмщик выплачивает равные суммы, погашая весь долг полностью.

Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 9 млн.рублей.

Отв. 4 млн.рублей.

Решение. Основные параметры модели: n=5, p=20%, S-? Первыми тремя равными платежами погашаются только проценты: $x_1=x_2=x_3=\frac{p}{100}\cdot S$, четвёртый и пятый платежи x описываются математической моделью двухлетних равных платежей: $St^2-xt-x=0$, где $t=1+\frac{p}{100}=1{,}2$, сумма всех пяти платежей 9 млн.руб., т.е. $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=3\cdot\frac{p}{100}\cdot S+2x<9$, требуется найти оценку для суммы кредита. Решим систему $\begin{cases}St^2-xt-x=0\\ 3\cdot\frac{p}{100}\cdot S+2x<9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1{,}44S-1{,}2x-x=0\\ 3\cdot\frac{p}{100}\cdot S+2x<9\end{cases}\Leftrightarrow$

Подставив x из первого уравнения во второе неравенство и решив последнее, получим : $\begin{cases} x = \dfrac{1{,}44}{2{,}2}S = \dfrac{36}{55}S \\ 3 \cdot \dfrac{p}{100} \cdot S + 2x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \cdot \dfrac{20}{100} \cdot S + 2 \cdot \dfrac{36}{55}S < 9 \Leftrightarrow S\left(0{,}6 + \dfrac{72}{55}\right) < 9$.

$$\Leftrightarrow S\left(0{,}6 + \frac{72}{55}\right) < 9 \Leftrightarrow S\left(\frac{33+72}{55}\right) < 9 \Leftrightarrow \frac{21}{11}S < 9 \Leftrightarrow S < \frac{99}{21} = 4\frac{15}{21}.$$

Ответ: $S_{\max\, целое} = 4$.

Задача2.16. (Ящ.2020, В.2.17 (МЗ)). Планируется взять кредит в банке на целое число миллионов рублей на пять лет. Условия его возврата таковы:

-в середине каждого года долг возрастает на 20% по сравнению с началом текущего года;

- в конце 1,2,3 –го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному;

- в конце 4 и 5-ого годов заёмщик выплачивает равные суммы, погашая весь долг полностью.

Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 10 млн.рублей.

Отв. 5 млн.рублей. Подсказка для самопроверки: $S < \frac{110}{21} = 5\frac{5}{21}$

Задача ЕГЭ 2.17. 10.06.2020 г. (НЗ). В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на 5 лет в размере 220 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

-каждый январь долг возрастает на р% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

- в июле 2027, 2028, 2029 годов долг остаётся равным 220 тыс. рублей;

- выплаты 2030, 2031 годов равны;

- к июлю 2031 года долг должен быть полностью погашен.

Найдите р%, если, если общая сумма выплат после полного погашения составит 420 тысяч рублей?

Отв. 20%.

Решение. Основные параметры модели: n=5, S=220 т.р., первыми тремя равными платежами погашаются только проценты: $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{p}{100} \cdot S$, четвёртый и пятый платежи x описываются математической моделью двухлетних равных платежей: $St^2 - xt - x = 0$, где $t = 1 + \frac{p}{100}$, сумма всех пяти платежей равна 420 т.р., т.е. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \cdot \frac{p}{100} \cdot S + 2x = 420$, требуется найти процентную ставку банка р%-? Решим систему $\begin{cases} St^2 - xt - x = 0 \\ 3 \cdot \frac{p}{100} \cdot S + 2x = 420 \end{cases}$

Относительно t, для этого из второго уравнения системы выразим x и подставим в первое уравнение: $\begin{cases} St^2 - xt - x = 0 \\ x = \dfrac{420 - 3 \cdot \frac{p}{100} \cdot S}{2} = 210 - \dfrac{3}{2} S \cdot \dfrac{p}{100} \end{cases}$.

$$\begin{cases} St^2 = x(t+1) \\ x = 210 - \dfrac{3}{2} S \cdot \dfrac{p}{100} \end{cases} \Rightarrow St^2 = \left(210 - \frac{3}{2} S \cdot \frac{p}{100}\right)(t+1) \Leftrightarrow 220t^2 = 210(t+1) - 330(t^2 - 1) \Leftrightarrow$$

$$550t^2 - 210t - 540 = 0 \Leftrightarrow 55t^2 - 21t - 54 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{21 \pm \sqrt{441 + 4 \cdot 54 \cdot 55}}{110} = \frac{21 \pm \sqrt{12321}}{110} = \frac{21 \pm 111}{110}.$$

Использован известный алгоритм извлечения квадратного корня из натурального числа, берём знак плюс, так как отрицательное значение t не имеет смысла: $t = \frac{21 + 111}{110} = \frac{132}{110} = 1.2 = 1 + \frac{p}{100} \Rightarrow p = 20.$ **Ответ: р=20.**

Задача 2.18. ЕГЭ 2018г (вариант 347). 15 декабря планируется взять кредит в банке на 16 месяцев. Условия его возврата таковы:

-1-ого числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-ого по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-ого числа каждого месяца соответствующие долги с первого по пятнадцатый должны быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

- 15-го числа 15-го месяца долг составит 200 000 рублей;

- к 15-му числу 16-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного погашения составит 612 тысяч рублей?

Отв. 0,5 млн. рублей.

Задача 2.19. ЕГЭ 10.06.2020 г. (НЗ). В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на 5 лет в размере 432 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

-каждый январь долг возрастает на р% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2027, 2028, 2029 годов долг остаётся равным 432 тыс. рублей;
- выплаты 2030, 2031 годов равны;
- к июлю 2031 года долг должен быть полностью погашен.

Найдите p%, если, если общая сумма выплат после полного погашения составит 924 тысяч рублей?

Отв. 25%.

Решение. Основные параметры модели: n=5, S=432 т.р., первыми тремя равными платежами погашаются только проценты: $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{p}{100}\cdot S$, четвёртый и пятый платежи x описываются математической моделью двухлетних равных платежей: $St^2 - xt - x = 0$, где $t = 1 + \frac{p}{100}$, сумма всех пяти платежей равна 924 т.р., т.е. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3\cdot\frac{p}{100}\cdot S + 2x = 924$, требуется найти процентную ставку банка p%-? Решим систему $\begin{cases} St^2 - xt - x = 0 \\ 3\cdot\frac{p}{100}\cdot S + 2x = 924 \end{cases}$

Относительно t, для этого из второго уравнения системы выразим x и подставим в первое уравнение:

$$\begin{cases} St^2 - xt - x = 0 \\ x = \dfrac{924 - 3\cdot\frac{p}{100}\cdot S}{2} = 462 - \dfrac{3}{2}S\cdot\dfrac{p}{100} = 462 - 648(t-1) = 1110 - 648t \end{cases}.$$

$$\begin{cases} St^2 = x(t+1) \\ x = 1110 - 648t \end{cases} \Rightarrow St^2 = (1110 - 648t)(t+1) \Leftrightarrow 432t^2 = 1110 - 648t + 1110t - 648t^2 \Leftrightarrow$$

$$1080t^2 - 462t - 1110 = 0 \Leftrightarrow 540t^2 - 231t - 555 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{231 \pm \sqrt{231^2 + 4\cdot 540\cdot 555}}{1080} = \frac{231 \pm \sqrt{1252161}}{1080}$$

Используем известный *алгоритм извлечения квадратного корня из натурального числа* http://spacemath.xyz/algoritm-izvlecheniya-kvadratnogo-kornya/ , берём знак плюс, так как отрицательное значение t не имеет смысла: $t = \frac{231 + 1119}{1080} = \frac{1350}{1080} = 1.25 = 1 + \frac{p}{100} \Rightarrow p = 25.$

Ответ: p=25.

Задача 2.20. (Лысенко,2020,В.7.17). В июле 2020 года планируется взять кредит в размере 6,3 млн. рублей. Условия его возврата таковы:

-каждый январь долг возрастает на p% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2021, 2022, 2023 годов долг остаётся равным 6,3 млн. рублей;
- суммы выплат 2024, 2025 годов равны;

- к июлю 2025 года долг должен быть полностью погашен.

Найдите p%, если, если общая сумма выплат после полного погашения составит 9,15 млн. рублей? Отв. 10%.

Задача 2.21.(Л.,2020,В.8.17). В июле 2020 года планируется взять кредит в размере 1,1 млн. рублей. Условия его возврата таковы:

-каждый январь долг возрастает на p% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2021, 2022, 2023 годов долг остаётся равным 1,1 млн. рублей;
- суммы выплат 2024, 2025 годов равны;
- к июлю 2025 года долг должен быть полностью погашен.

Найдите p%, если, если общая сумма выплат после полного погашения составит 2,1 млн. рублей? Отв. 20%.

БЗ №3. Задачи, сводящиеся к математическим моделям, решаемым с помощью вычислений (числовых выражений), прикидки. Обычно в задачах этого типа требуется вычислить минимальный срок платежей, если возможности плательщика ограничены сверху заданной суммой. Понятно, что минимальное количество лет погашения кредита будет при максимальном ежегодном платеже.

Прикидка позволяет примерно определить минимальное число лет платежа, но последующее обоснование, например, с помощью числового моделирования, обязательно.

Другой, аналитический способ решения, основан на поиске минимального натурального n, при котором выполняется неравенство типа $St^3 - xt^2 - xt - x \le 0$ **или** $St^4 - xt^3 - xt^2 - xt - x \le 0$**, а в общем случае** $St^n \le x \cdot \frac{t^n - 1}{t - 1}$**, где S- величина взятого кредита, x- величина ежегодного платежа,** $t = 1 + \frac{p}{100}$**. Последнее неравенство проще решать перебором по n, начиная со значения n, найденного прикидкой (а не логарифмированием по основанию** $t = 1 + \frac{p}{100}$**).**

Задача 3.1. Тимофей хочет взять кредит в 1,1 млн. рублей. Погашение кредите происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней суммы) после начисления процентов (т.е. увеличения долга на фиксированное число процентов). Цена кредита -10% годовых. На какое минимальное количество лет может взять кредит Тимофей, чтобы ежегодные выплаты были не более 270 тыс. рублей? (Отв.6).

Решение. Проблема состоит в том, чтобы найти неравенство наименьшей степени вида $St^2-xt-x\le 0$, или $St^3-xt^2-xt-x\le 0$ или $St^4-xt^3-xt^2-xt-x\le 0$, в общем случае $St^n\le x\cdot\frac{t^n-1}{t-1}$, где S- величина взятого кредита, x- величина ежегодного платежа, $t=1+\frac{p}{100}$. Понятно, что минимальное количество лет погашения кредита будет при максимальном ежегодном платеже, т.е. надо взять x=270000 рублей. Прикидка показывает, что за 4 года по 0,27млн. кредит не выплатить, значит, надо проверять n=5, n=6 и т.д. Проверка показывает, что 5 не удовлетворяет неравенству, а 6 удовлетворяет. Ответ: минимально на 6 лет.

Второй способ решения основан не на построении математической модели и решении неравенства, а на прямых вычислениях. В конце первого года, после увеличения долга в 1,1 млн. рублей на 10%, т.е. в 1,1 раза и выплате 0,27 млн.рублей долг станет равным:1,1*1,1-0,27=0,94 (млн. рублей). В конце второго:0,94*1,1 -0,27=0,764. Поместим вычисления в таблицу:

1год	1,1*1,1-0,27=0,94
2	0,94*1,1 -0,27=0,764
3	0,764*1,1 -0,27=0,5704
4	0,5704*1,1 -0,27=0,35744
5	0,35744*1,1 -0,27=0,123184
6	0,123184*1,1 -0,27=0,1355024-0,27<0

Таким образом, кредит будет погашен за 6 неполных лет. При заданных ограничениях это минимальное количество лет погашения.

Задача 3.2. В июле Виктор планирует взять кредит в 2,5 млн. рублей. Погашение кредите происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней суммы) после начисления процентов (т.е. увеличения долга на фиксированное число процентов). Цена кредита - 20% годовых. На какое минимальное количество лет может взять кредит Виктор, чтобы ежегодные выплаты были не более 760 тыс. рублей? **Решение.** Найдём наименьшее натуральное n, таое, что выполнено неравенство: $St^n\le x\cdot\frac{t^n-1}{t-1}$, где S- величина взятого кредита, x- максимально возможная величина ежегодного платежа, т.е.0,76 млн.рублей, $t=1+\frac{p}{100}=1{,}2$. Прикидка показывает, что $n\ge 4$,неравенство

$St^n \le x \cdot \dfrac{t^n - 1}{t-1}$ примет вид $2{,}5 \cdot 1{,}2^n \le 0{,}76 \cdot \dfrac{1{,}2^n - 1}{0{,}2} \Leftrightarrow 2{,}5 \cdot 1{,}2^n \le 3{,}8 \cdot \left(1{,}2^n - 1\right) \Leftrightarrow 2{,}923 \le 1{,}2^n$.

пробы начнём с n=4.

n	4	5	6
$2{,}923 \le 1{,}2^n$	$2{,}923 \le 2{,}07$ неверно	$2{,}923 \le 2{,}48$ неверно	$2{,}923 \le 2{,}98$ верно

Отв.6.

БЗ №4. Задачи на сложные проценты, решаемые с помощью систем уравнений. Обычно одно или несколько уравнений задачи аналогичны уравнениям из модели 1.

Задача 4.1. 31 декабря 2014 года клиент взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк увеличивает долг на р%, затем клиент переводит очередной платёж. Если он будет платить каждый год по 328 050 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 587 250 рублей, то за 2 года. Найдите величину процентной ставки р. (Отв.12,5).

Решение. Постоим математическую модель задачи. Пусть 31.12.14 клиент взял S рублей под р% годовых. 31.12.15 после начисления процентов долг составит $S\left(1+\dfrac{p}{100}\right)$рублей, а после внесения платежа в х рублей долг составит $S\left(1+\dfrac{p}{100}\right)-x$ руб. 31.12.16 после начисления процентов долг составит $\left(S\left(1+\dfrac{p}{100}\right)-x\right)\left(1+\dfrac{p}{100}\right)$рублей, а после внесения платежа в х рублей долг составит $\left(S\left(1+\dfrac{p}{100}\right)-x\right)\left(1+\dfrac{p}{100}\right)-x$ рублей. 31.12.17 после аналогичных процедур долг составит $\left(\left(S\left(1+\dfrac{p}{100}\right)-x\right)\left(1+\dfrac{p}{100}\right)-x\right)-x$; а в 31.12.18 после аналогичных процедур долг составит $\left(\left(\left(S\left(1+\dfrac{p}{100}\right)-x\right)\left(1+\dfrac{p}{100}\right)-x\right)\left(1+\dfrac{p}{100}\right)-x\right)\left(1+\dfrac{p}{100}\right)-x=0$ рублей, т.е. будет полностью выплачен. Обозначим$\left(1+\dfrac{p}{100}\right)=t$, тогда последнее равенство примет вид: $St^4-xt^3-xt^2-xt-x=0$, это математическая модель четырёхлетних равных платежей, здесь х=328 050 рублей. Математическая модель двухлетних равных платежей имеет вид: $\left(S\left(1+\dfrac{p}{100}\right)-y\right)\left(1+\dfrac{p}{100}\right)-y=0$, или $St^2-yt-y=0$, здесь у=587 250 рублей.

Решим систему уравнений: $\begin{cases} St^4 - xt^3 - xt^2 - xt - x = 0 \\ St^2 - yt - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} St^4 = x(t^3 + t^2 + t + 1) \\ St^2 = y(t+1) \end{cases}$

Разделим первое уравнение на второе, тогда: $t^2 = \frac{x}{y} \cdot \frac{t^3 + t^2 + t + 1}{t+1} \Leftrightarrow t^2 = \frac{x}{y} \cdot (t^2 + 1) \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{x}{y-x}} = \sqrt{\frac{328050}{259200}} = \sqrt{1.265625} = 1.125.$

http://spacemath.xyz/algoritm-izvlecheniya-kvadratnogo-kornya/ , Обратная замена: $1 + \frac{p}{100} = 1.125 \Leftrightarrow p = 12.5$. **Ответ: 12.5.**

Задача 4.2. В июле 2018 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия предоставления кредита следующие: 1)каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года; 2)с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга. Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен за три года тремя равными платежами и общая сумма выплат после полного погашения кредита на 48250 рублей больше суммы, взятой в кредит? (Отв.162000).

Решение. Постоим математическую модель задачи. Пусть в июле 2018г. клиент взял S рублей под p% годовых. В январе 2019г. после начисления процентов долг составит $S\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ рублей, а после внесения (в июне) платежа в x рублей долг составит $S\left(1 + \frac{p}{100}\right) - x$ руб. В январе 2020г. после начисления процентов долг составит $\left(S\left(1 + \frac{p}{100}\right) - x\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ рублей, а после внесения (в июне) платежа в x рублей долг составит $\left(S\left(1 + \frac{p}{100}\right) - x\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right) - x$ рублей. В январе 2021г. после аналогичных процедур долг составит $\left(\left(S\left(1 + \frac{p}{100}\right) - x\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right) - x\right) - x = 0$ рублей, т.е. будет полностью выплачен. Обозначим $\left(1 + \frac{p}{100}\right) = t$, тогда последнее равенство примет вид: $St^3 - xt^2 - xt - x = 0$, это математическая модель трёхлетних равных платежей, здесь x рублей – искомая величина, $t = 1{,}2 = \frac{6}{5}$. Заметим, что модель двухлетних равных платежей по y рублей имеет вид: $\left(S\left(1 + \frac{p}{100}\right) - y\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right) - y = 0$, или $St^2 - yt - y = 0$. По условию задачи сумма выплат 3х на 48250 рублей больше суммы S, взятой в кредит, следовательно $3x - S = 48250$.

Получаем систему уравнений относительно x и S, здесь $t = 1{,}2 = \frac{6}{5}$:

$$\begin{cases} St^3 - xt^2 - xt - x = 0 \\ 3x - S = 48250 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = \dfrac{x\left(t^2 + t + 1\right)}{t^3} \\ 3x - S = 48250 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = \dfrac{x\left(\left(\dfrac{6}{5}\right)^2 + \dfrac{6}{5} + 1\right)}{\left(\dfrac{6}{5}\right)^3} = \dfrac{455x}{216}; \\ 3x - \dfrac{455x}{216} = 48250. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует $x = 216 \cdot 250 = 54000$, тогда $3x = 162000$.

Ответ: 162000 рублей.

Задача 4.3. В июле 2021 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия предоставления кредита следующие: 1)каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года; 2)с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга. Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (т.е. за три года) и вся сумма выплат по кредиту на 34 150 рублей больше суммы кредита? **(Отв. 199 650).**

Задача 4.4. В июле 2018 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия предоставления кредита следующие: 1)каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года; 2)с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга. Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (т.е. за три года) и вся сумма выплат по кредиту на 104 800 рублей больше суммы кредита? **(Отв.300000).**

Задача 4.5. В июле 2021 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия предоставления кредита следующие: 1)каждый январь долг возрастает на 30% по сравнению с концом предыдущего года; 2)с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга. Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (т.е. за три года) и вся сумма выплат по кредиту на 78 030 рублей больше суммы кредита? **(Отв.197 730).**

Задача 4.6. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 8 млн. рублей на некоторый срок (целое количество лет). Условия предоставления кредита следующие: 1)каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года; 2)с февраля по июль каждого года необходимо выплатить часть долга; 3)в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года. На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что вся сумма выплат по кредиту составит 21 млн. рублей? **(Отв. 12 лет).**

Задача 4.7. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определённый процент (свой для каждого банка). В начале года треть некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть - во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равной 380 денежным единицам, к концу следующего года 482 денежным единицам. Было подсчитано, что если бы первоначально треть исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равной 370 денежным единицам. Определите величину вклада по истечении двух лет, если бы исходное количество денег целиком было положено во второй банк.

Решение. По условию $\begin{cases} \frac{s}{3}\left(1+\frac{p_1}{100}\right)+\frac{2\cdot s}{3}\left(1+\frac{p_2}{100}\right)=380 \\ \frac{s}{3}\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^2+\frac{2\cdot s}{3}\left(1+\frac{p_2}{100}\right)^2=482 \\ \frac{2\cdot s}{3}\left(1+\frac{p_1}{100}\right)+\frac{s}{3}\left(1+\frac{p_2}{100}\right)=370 \end{cases}$; надо найти $s\left(1+\frac{p_2}{100}\right)^2-?$

Пусть $a=\frac{s}{3}\left(1+\frac{p_1}{100}\right);b=\frac{s}{3}\left(1+\frac{p_2}{100}\right)$, тогда $\begin{cases} a+2b=380 \\ 2a+b=370 \end{cases}$; $\begin{cases} a=120 \\ b=130 \end{cases}$. Обратная замена: $\left(1+\frac{p_1}{100}\right)=\frac{360}{s}$; $\left(1+\frac{p_2}{100}\right)=\frac{390}{s}$;подставим полученные величины во второе уравнение системы: $\frac{s}{3}\left(\frac{360}{s}\right)^2+\frac{2\cdot s}{3}\left(\frac{390}{s}\right)^2=482 \Rightarrow s=300.$

Тогда $s\left(1+\frac{p_2}{100}\right)^2=300\cdot\left(\frac{390}{300}\right)^2=300\cdot 1.3^2=507$.Отв.507.

Задача 4.8. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определённый процент (свой для каждого банка). В начале года 3/5 некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть - во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равной 590 денежным единицам, к концу следующего года 701 денежным единицам. Было подсчитано, что если бы первоначально 3/5 исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равной 610 денежным единицам. Какова в этом случае была бы сумма вкладов в эти банки к концу второго года? **Решение.** По условию $\begin{cases} \frac{3s}{5}\left(1+\frac{p_1}{100}\right)+\frac{2\cdot s}{5}\left(1+\frac{p_2}{100}\right)=590 \\ \frac{3s}{5}\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^2+\frac{2\cdot s}{5}\left(1+\frac{p_2}{100}\right)^2=701 \\ \frac{2\cdot s}{5}\left(1+\frac{p_1}{100}\right)+\frac{3s}{5}\left(1+\frac{p_2}{100}\right)=610 \end{cases}$**;** надо найти $\frac{2}{5}s\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^2+\frac{3}{5}s\left(1+\frac{p_2}{100}\right)^2-?$

Пусть $a=\frac{s}{5}\left(1+\frac{p_1}{100}\right); b=\frac{s}{5}\left(1+\frac{p_2}{100}\right)$, тогда $\begin{cases} 3a+2b=590 \\ 2a+3b=610 \end{cases}$; $\begin{cases} a=110 \\ b=130 \end{cases}$. Обратная замена: $\left(1+\frac{p_1}{100}\right)=\frac{550}{s}$; $\left(1+\frac{p_2}{100}\right)=\frac{650}{s}$; подставим полученные величины во второе уравнение системы: $\frac{s}{5}\left(\frac{550}{s}\right)^2+\frac{2\cdot s}{5}\left(\frac{650}{s}\right)^2=701 \Rightarrow s=500.$

Тогда $\frac{2}{5}s\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^2+\frac{3}{5}s\left(1+\frac{p_2}{100}\right)^2=\frac{2}{5}\cdot 500\cdot 1.1^2+\frac{3}{5}\cdot 500\cdot 1.3^2=749$.Отв.709.

Задача 4.9. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определённый процент (свой для каждого банка). В начале года четверть некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть - во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равной 470 денежным единицам, к концу следующего года 553 денежным единицам. Было подсчитано, что если бы первоначально четверть исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равной 450 денежным единицам. Какова в этом случае была бы сумма вкладов в эти банки к концу второго года?

Решение.

По условию $\begin{cases} \frac{s}{4}\left(1+\frac{p_1}{100}\right)+\frac{3\cdot s}{4}\left(1+\frac{p_2}{100}\right)=470 \\ \frac{s}{4}\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^2+\frac{3\cdot s}{4}\left(1+\frac{p_2}{100}\right)^2=553 \\ \frac{3\cdot s}{4}\left(1+\frac{p_1}{100}\right)+\frac{s}{4}\left(1+\frac{p_2}{100}\right)=450 \end{cases}$**;** надо найти $\frac{3s}{4}\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^2+\frac{s}{4}\left(1+\frac{p_2}{100}\right)^2-?$

Пусть $a=\frac{s}{4}\left(1+\frac{p_1}{100}\right); b=\frac{s}{4}\left(1+\frac{p_2}{100}\right)$, тогда $\begin{cases} a+3b=470 \\ 3a+b=450 \end{cases}$; $\begin{cases} a=110 \\ b=120 \end{cases}$. Обратная замена: $\left(1+\frac{p_1}{100}\right)=\frac{440}{s}$; $\left(1+\frac{p_2}{100}\right)=\frac{480}{s}$; подставим полученные величины во второе уравнение системы: $\frac{s}{4}\left(\frac{440}{s}\right)^2+\frac{3\cdot s}{4}\left(\frac{480}{s}\right)^2=553 \Rightarrow s=400.$

Тогда $\frac{3s}{4}\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^2+\frac{s}{4}\left(1+\frac{p_2}{100}\right)^2=\frac{3\cdot 400}{4}\left(\frac{440}{400}\right)^2+\frac{400}{4}\left(\frac{480}{400}\right)^2=363+144=507$.

БЗ №5. Задачи, сводящиеся к математическим моделям, решаемые *функциональными методами*, т.е. с помощью исследования свойств функций, входящих в модель. Как известно, в алгоритм *полного исследования функции* входит исследование функции на монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, изучение поведения графика на бесконечности, асимптоты, и др.

Задача 5.1. В начале 2001 года Алексей приобрёл ценную бумагу за 7000 рублей. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 2000 рублей. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги в банк под 10% годовых. В начале какого года Алексею стоит продать ценную бумагу, так чтобы через 15 лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей? (Отв. В начале 2008 года).

Решение. Для построения математической модели, рассмотрим несколько частных случаев. Если продать ценную бумагу в начале 2001 года, то через 15 лет на счету будет сумма $S(1)=7000\cdot(1{,}1)^{15}$ рублей. Если продать в конце 2002 года, то $S(2)=(7000+2000)\cdot(1{,}1)^{14}$. Далее, аналогично: $S(3)=(7000+2000\cdot 2)\cdot(1{,}1)^{13}$; $S(4)=(7000+2000\cdot 3)\cdot(1{,}1)^{12}$; $S(x)=(7000+2000\cdot(x-1))\cdot(1{,}1)^{15-(x-1)}$ или $S(x)=(2000x+5000)\cdot(1{,}1)^{16-x}$. Для нахождения максимума этой функции вычислим производную, затем приравняем её к нулю: $S'(x)=(2000)\cdot(1{,}1)^{16-x}-(2000x+5000)\cdot(1{,}1)^{16-x}\cdot\ln 1.1=(1{,}1)^{16-x}(2000-(2000x+5000)\cdot\ln 1.1)$.

Для приближённого вычисления критической точки воспользуемся приближенным равенством $\ln(1+x)\approx x$, в нашем случае, это $\ln 1.1\approx 0.1$; $x_{крит}\approx 7.5$ Линейная функция, на которую умножается экспонента, в критической точке меняет знак с «плюса» на «минус», т.е. найдена именно точка максимума. Учтём, что решение мы ищем на множестве натуральных чисел, получаем x=8. Ответ: 2008.

Заметим, что задачу можно решить иначе, **не используя производную.** Стоимость бумаги увеличивается на 2 тыс. рублей в год, последовательность стоимости бумаги по годам будет:7,9,11,13,15,17,19,21,23,…(в тысячах рублей). 10%-ые увеличения денег в банке составили бы последовательность по годам: 0,7;0,9;1,1;1,3;1,5;1,7;1,9;2,1;2,3;…. ,…(в тысячах рублей). Т.е., начиная с 8-го года скорость увеличения вклада в банке будет больше, чем рост стоимости бумаги. Найдено необходимое условие на n, $n \geq 8$. Проверим достаточность этого условия. Для этого нам придётся воспользоваться выведенной формулой $S(x)=(2000x+5000)\cdot(1{,}1)^{16-x}$; $S(8)=(2000\cdot 8+5000)\cdot(1{,}1)^{16-8} \approx$ 45,01..; $S(9)=(2000\cdot 9+5000)\cdot(1{,}1)^{16-9} \approx 44{,}82$. Ответ: 2008.

Задача 5.2. Между двумя портами, удалёнными друг от друга на расстояние 1200 км, с постоянной скоростью курсирует «Метеор». Затраты на рейс в одном направлении складываются из двух частей. Первое слагаемое, связанное с обслуживанием пассажиров, пропорционально времени нахождения «Метеора» в пути; второе слагаемое, обусловленное стоимостью топлива, пропорционально кубу скорости движения. С какой скоростью должен двигаться «Метеор», чтобы затраты на рейс были минимальны, если известно, что при скорости 90 км/час затраты равны 11610 денежных единиц, причём стоимость обслуживания пассажиров составляет $\frac{16}{27}$ стоимости топлива.

Решение. По условию, функция затрат имеет вид: $f(v)=k_1\cdot\frac{1200}{v}+k_2\cdot v^3;$ причём, $f(90)=k_1\cdot\frac{1200}{90}+k_2\cdot 90^3=11610;\quad k_1\cdot\frac{1200}{90}=\frac{16}{27}k_2\cdot 90^3;$ последние два уравнения приводят к системе: $\begin{cases} k_1\cdot\frac{40}{3}+k_2\cdot 729000=11610 \\ k_1\cdot\frac{4}{3}=k_2\cdot 432000 \end{cases};\Leftrightarrow\begin{cases} k_1=324 \\ k_2=0.01 \end{cases}$.Таким образом, функция затрат примет вид: $f(v)=\frac{388800}{v}+0.01\cdot v^3,\quad v>0;$ найдём точки экстремума $f'(v)=\frac{0.03(v^2-3600)(v^2+3600)}{v^2};\ v_{\min}=60;\quad f_{\min}(60)=6480+2160=8460.$

Задача 5.3 (V уровень, сложности, модель - дробно-рациональная функция, технические сложности в алгебраических преобразованиях и при вычислении экстремумов с применением производной или с помощью неравенства О.Коши).

Планируется построить некоторое количество одинаковых жилых домов с общей жилой площадью 40 000 кв.м. Затраты на постройку одного дома, имеющего N кв.м. жилой площади, складываются из стоимости наземной части, пропорциональной $N\sqrt{N}$, и стоимости фундамента, пропорциональной $\sqrt{N}$. Строительство дома на 1600 кв.м. обходится в 176800 рублей, в этом случае стоимость наземной части составляет 36% стоимости фундамента. Сколько нужно построить домов, чтобы сумма затрат была наименьшей, найдите эту сумму затрат.

Решение. Обозначения: n –одинаковых домов каждый площадью в y кв. м. жилой площади. По условию ny=40 000. Пусть стоимость одного дома равна z тыс. рублей, тогда сумма затрат равна x=nz. Стоимость z одного дома площадью в y кв. м складывается из стоимости наземной части, пропорциональной $y\sqrt{y}$, т.е. она равна $\alpha \cdot y\sqrt{y}$, плюс стоимость фундамента, равная $\beta \cdot \sqrt{y}$, где α, β- некоторые коэффициенты пропорциональности. $z = \alpha \cdot y\sqrt{y} + \beta \cdot \sqrt{y}$. По условию, при строительстве дома на 1600 кв.м. стоимость наземной части составляет 36% стоимости фундамента, т.е. $\alpha \cdot 1600\sqrt{1600} = \frac{36}{100} \cdot \beta \cdot \sqrt{1600}$. По условию $176{,}8 = \alpha \cdot 1600\sqrt{1600} + \beta \cdot \sqrt{1600}$. Решая два последние уравнения относительно α, β, получим $\alpha = \frac{117}{160000}; \beta = \frac{13}{4}$. Итак, модель получена, функция затрат на один дом имеет вид: $z = \frac{117}{160000} \cdot y\sqrt{y} + \frac{13}{4} \cdot \sqrt{y}$. Заменяя $z = \frac{x}{n}$, $y = \frac{40000}{n}$, получим $x = 650\left(\frac{9}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right)$. Минимум функции $x(n)$можно найти с помощью производной: $x' = 650\left(\frac{n-9}{2n\sqrt{n}}\right)$, $n_{\min} = 9$, $x(9) = 3900$тыс.рублей.

Иначе найти минимум функции $x(n)$можно, используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух неотрицательных чисел: $a + b \ge 2\sqrt{ab}$, равенство достигается только при a=b. Тогда $x(n) \ge 2 \cdot 650\sqrt{9} = 3900$тыс. руб., минимум достигается при $\frac{9}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \Leftrightarrow n = 9$.

Задача 5.4. Зависимость объёма Q (в штуках), купленного у фирмы товара от цены P (в рублях за штуку) выражается формулой $Q = 15000 - P,\ 1000 \le P \le 15000$. Доход от продажи товара составляет P*Q рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q + 5000000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи и затрат на производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену продукции на 20%, однако её прибыль не изменилась. На сколько рублей следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли? Вычислите эту наибольшую прибыль. (Отв.1000; 31000000).

Решение. Обозначим F(P) функцию прибыли в зависимости от цены P товара. По условию $F(P) = P \cdot Q - 3000Q - 5000000 = -P^2 + 18000P - 50000000$ (*).

Пусть первоначальная цена была P_0, а сниженная P_1, при этом $F(P_0)=F(P_1)\Leftrightarrow (P_1-P_0)(P_1+P_0-18000)=0 \Leftrightarrow P_1+P_0-18000=0 \Leftrightarrow \frac{P_1+P_0}{2}=9000=P_{вершины}$

Т.е. точки P_0 и P_1 симметричны относительно абсциссы вершины параболы (*), а числа P_1, $P_{вершины}, P_0$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии: $0{,}8P_0;\ 0{,}9P_0;\ P_0$, при этом $0{,}9P_0=9000=P_{вершины} \Rightarrow P_0=10000$, тогда $P_1=8000$, значит, до $P_{\max}=9000$ надо цену $P_1=8000$ повысить на 1000 рублей. Наибольшая прибыль будет равна $F(9000)=-9000^2+18000\cdot 9000-50000000=31000000$. Отв.1000; 31000000.

Задача 5.5. Зависимость объёма Q (в штуках), купленного у фирмы товара от цены P (в рублях за штуку) выражается формулой $Q=15000-P,\ \ 1000\le P\le 15000$. Доход от продажи товара составляет P*Q рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q+5000000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи и затрат на производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену продукции на 20%, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли? (Отв.12,5).

Задача 5.6. Крейсер «Москва» стоит на якоре в 9 км от ближайшей точки берега, с крейсера нужно послать спецназ на авиабазу ВКС РФ в Латакию, расположенную в 15 км, считая по берегу от ближайшей к крейсеру точки берега (база расположена на берегу). Спецназ с полной выкладкой передвигается пешком со скоростью 5 км/час, а на плавсредствах со скоростью 4 км/час. В какой точке берега следует пристать, чтобы попасть на авиабазу в кратчайшее время? (Отв.: в 3км от базы).

Задача 5.7. Строительной организации необходимо построить некоторое количество домов общей площадью 2500 кв.м. Стоимость одного дома площадью a кв.м. складывается из стоимости материалов – $p_1a^{\frac{3}{2}}$ тысяч рублей, строительных работ– $p_2\cdot a$ тысяч рублей и стоимости отделочных работ– $p_3a^{\frac{1}{2}}$ тысяч рублей. Числа p_1, p_2, p_3 являются последовательными членами геометрической прогрессии, их сумма равна 21, их произведение равно 64. Если построить 63 дома, то затраты на материалы будут меньше, чем затраты на строительные и отделочные работы. Сколько стоит построить домов, чтобы общие затраты были минимальными? Отв.(156 домов).

Задача 5.8. Часть денег от суммы 600 млн. рублей размещена в банке под 14% годовых, а другая часть инвестирована в производство, где вложенная сумма в x млн. рублей оборачивается в капитал 2,2x млн. рублей. После этого отчисляются издержки производства, которые задаются зависимостью вида $0{,}0031x^2$ млн. рублей. Разность между капиталом и издержками производства облагается налогом в 20%. Как распределить первоначальную сумму денег между банком и производством, чтобы через год получить суммарную максимальную прибыль. Сколько млн. рублей составит эта прибыль?

Решение. Пусть x млн.рублей инвестированы в производство, тогда (600-x) млн. рублей положены в банк под 14% годовых, т.о. в конце года величина вклада составит $1{,}14(600-x)$ млн.рублей. Вложенная в производство сумма в x млн. рублей оборачивается в капитал 2,2x млн. рублей, после отчисления издержек будет: $2{,}2x-0{,}0031x^2$, а после уплаты 20%-ого налога останется $0.8\cdot(2{,}2x-0{,}0031x^2)$. Суммарная выручка (т.е. пока без вычитания вложенных денег) составит $V(x)=1{,}14(600-x)+0.8\cdot(2{,}2x-0{,}0031x^2)$ или $V(x)=684+0.62x-0{,}00248x^2$, точку максимума можно найти с помощью производной: $V'(x)=0.62-0{,}00496x$, $V'(x)=0 \Rightarrow x_{\max}=\dfrac{0{,}62}{0{,}00496}=125$, т.е.125 млн. рублей надо вложить в производство для обеспечения максимальной выручки. Точку максимума квадратичной функции $V(x)=684+0.62x-0{,}00248x^2$ можно найти с помощью формулы $x_в=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{-0{,}62}{-2\cdot 0{,}00248}=125$. Вычислим максимум функции $V(125)=684+0.62\cdot125-0{,}00248\cdot125^2=722{,}75$ млн. рублей. Вычитая вложенные расходы, получим максимальную чистую прибыль: $722{,}75-600=122{,}75$ млн. рублей. Ответ: $122{,}75$ млн. рублей.

Задача 5.9. Часть денег от суммы 400 млн. рублей размещена в банке под 12% годовых, а другая часть инвестирована в производство, где вложенная сумма в x млн. рублей оборачивается в капитал 2,5x млн. рублей. После этого отчисляются издержки производства, которые задаются зависимостью вида $0{,}0022x^2$ млн. рублей. Разность между капиталом и издержками производства облагается налогом в 20%. Как распределить первоначальную сумму денег между банком и производством, чтобы через год получить суммарную максимальную прибыль. Сколько млн. рублей составит эта прибыль? Ответ: 158 млн. рублей.

Задача 5.10. Стоимость разработки электронной версии учебника Математика в издательстве равна 800 000 рублей. Затраты на производство **х тысяч** таких электронных учебников составляют $(x^2+6x+22100)$тысяч рублей в год. Если электронный учебник продавать по цене **а рублей за единицу**, то прибыль издательства (в тысячах рублей) за один год составит $ax-(x^2+6x+22100)$. Издательство будет выпускать электронные учебники в таком количестве , чтобы обеспечить наибольшую прибыль. При какой наименьшей цене за учебник расходы на разработку учебника окупятся не более, чем за два года? (Отв. 306).

Задача 5.11. Строительство нового цеха обойдётся в 39 000 000 рублей. Затраты на производство **х тысяч** единиц продукции в этом цехе составляют $(0.5x^2+4x+19)$млн. рублей в год. Если продукцию цеха продавать по цене **а тысяч рублей за единицу**, то прибыль фирмы (в млн. рублей) за один год составит $ax-(0.5x^2+4x+19)$. Когда цех построят, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы обеспечить наибольшую прибыль. При каком наименьшем значении **а** расходы на строительство цеха окупятся не более, чем за три года? (Отв. 12).

Задача 5.12. В первом отделении банка 45% от общего числа клиентов составляют бюджетные организации и 55% частные клиенты, во втором отделении 10% составляют корпоративные клиенты, 40% бюджетные организации и 50% частные клиенты, в третьем отделении 30% составляют корпоративные клиенты, 70% частные клиенты. После объединения трёх отделений корпоративные клиенты составили 15%. Найдите промежуток, в пределах которого может находиться процент частных клиентов. (Отв. (55%; 62,5%)).

Задача 5.13. В первом отделении банка 30% от общего числа клиентов составляют корпоративные клиенты и 70% бюджетные организации; во втором отделении 10% составляют бюджетные организации и 90% частные клиенты; в третьем отделении 15% составляют корпоративные клиенты, 60% - частные клиенты, 25% -бюджетные организации . После объединения трёх отделений частные клиенты составили 40%. Найдите промежуток, в пределах которого может находиться процент бюджетных организаций. (Отв. (40%; $43\frac{1}{3}$%)).

Задача 5.14. Для откорма птицы на птицефабрике используется комбикорм двух видов: А и В. Один цикл производства птицефабрики требует 50 тонн комбикорма, при этом, для обеспечения необходимого набора микроэлементов в рационе птицы, комбикорма типа А должно быть использовано не менее 42 тонн, а комбикорма типа В – не менее 5 тонн. Определите в рублях минимально возможную стоимость комбикорма, требуемого для одного цикла производства, если закупка х тонн комбикорма типа А обходится птицефабрике в $2x\cdot(1-0.01x)$ тысяч рублей, а закупка х тонн комбикорма типа В обходится птицефабрике в $4x\cdot(1-0.01x^2)$ тысяч рублей. (Отв.: 60240 руб.)

Задача 5.15. Объединённая группа из четырёх строительных фирм учредила компанию с уставным капиталом 150 млн. рублей. Первая фирма внесла 20% уставного капитала, вторая – 22,5 млн. рублей, третья – 0,3 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внесла четвёртая фирма. Ежегодная прибыль делится между участниками пропорционально внесённому капиталу. Годовая прибыль составила 100 млн. рублей. Какие суммы причитаются каждой из фирм – учредителей? (Четвёртой фирме – 35 млн.)

Задача 5.16. Объединённая группа из четырёх строительных фирм учредила компанию с уставным капиталом 400 млн. рублей. Первая фирма внесла 40% уставного капитала, вторая – 40 млн. рублей, третья – 0,2 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внесла четвёртая фирма. Ежегодная прибыль делится между участниками пропорционально внесённому капиталу. Годовая прибыль составила 250 млн. рублей. Какие суммы причитаются каждой из фирм – учредителей? (Четвёртой фирме – 75 млн.)

БЗ №6. Задачи, сводящиеся к задачам линейного программирования, решаемые геометрическими методами. При решении используется построение многоугольных областей, заданных линейными неравенствами; семейства параллельных прямых, связанных с целевыми функциями. Как правило, наибольшие и наименьшие значения целевой функции достигаются в угловых точках многоугольной области.

Задача 6.1. Фермер может на своём участке площадью 1400 кв.м. снимать два урожая в год, засевая рис, кукурузу или пшено. В таблице дана урожайность культур в зависимости от первого или второго урожая. За год обычно собирают два урожая: летом и осенью. По данным таблицы подсчитайте наибольшее число килограммов урожая, которое можно собрать за один год, если фермер может засевать разные культуры.

	Рис	Кукуруза	Пшено
1 урожай	650г/м кВ.	800г/м кВ.	Не выращивают

2 урожай	550г/м кВ.	Не выращивают	600г/м кВ.

Решение.

Пусть x кВ.м. выделено на посадку риса, тогда (1400-x) кВ.м.будет засеяно кукурузой во время первой посевной. Аналогично, пусть y кВ.м. выделено на посадку риса, тогда (1400-y) кВ.м.будет засеяно пшеном во время второй посевной.

1 урожай (засаженные площади)	x кВ.м.	(1400-x) кВ.м	Нет
1 урожай (собрано килограммов зерна)	0,65x кг риса	0,8*(1400-x)кг кукурузы	нет
2 урожай (засаженные площади)	y кВ.м.	нет	(1400-y) кВ.м
2 урожай (собрано килограммов зерна)	0,55y кг риса	нет	0,8*(1400-y)кг пшена

Тогда сумма двух урожаев в килограммах равна

U(x,y)=0,65x+0,8*(1400-x)+0,55y+0,8*(1400-y)= 1960-0,15x-0,05y. Требуется найти максимум для выражения U(x,y) при условии, $x, y \in [1400;1400]$, что геометрически можно трактовать так: на множестве точек квадрата с вершинами (0,0), (1400,0), (1400,1400),(0,1400) найти наибольшее значение выражения U(x,y). Рассмотрим уравнение

U=1960-0,15x-0,05y, где U это некоторая константа. Его можно рассматривать как уравнение множества прямых $y = \frac{1960 - 0{,}15x - U}{0{,}05} = -3x + \frac{1960 - U}{0{,}05}$, которые получаются параллельными сдвигами прямой $y = -3x$ вверх или вниз. Построим квадрат и несколько таких прямых. Осуществляя параллельные сдвиги прямых $y = -3x + \frac{1960 - U}{0{,}05}$ так, чтобы прямая проходила хотя бы через одну точку квадрата, видим два крайних случая: когда прямая проходит через угловые точки (0,0) и (1400,1400). Вычислим значения U в этих точках, для этого в равенство U=1960-0,15x-0,05y поочерёдно подставим координаты выбранных точек: U(0,0)=1960; U(1400,1400)=1960-200=1760. **Ответ:** 1960кг-максимальный урожай. Можно показать, что подставляя в выражение для U(x,y) координаты любой точки квадрата, получим промежуточные значения $U \in [1760;1960]$

Задача 6.2. Найдите наибольшее значение выражения для а, если для х и у выполняется условие: $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + 4y \leq 16, \\ 3x + y \leq 15, \\ a = x + y. \end{cases}$

Задача 6.3. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 300 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 1 кг никеля. Обе шахты доставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. Шахты договариваются так вести добычу металлов, чтобы завод мог выпустить наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет выпускать завод? (Отв.5400).

Решение. Производственный ресурс первой шахты составляет 500 человеко-часов, второй – 1500 чел/час. Пусть х чел/час отпущено в 1-ой шахте на производство Al, при этом производство Al составит х кг, а Ni - $(500-x)\cdot 3$кг. Пусть у чел/час отпущено во 2-ой шахте на производство Al, при этом производство Al составит 3у кг, а Ni - $(1500-y)\cdot 1$кг. По условию задачи х, у – неотрицательны. Всего на двух шахтах произведено $m_{Al} = x + 3y$ кг Al и $m_{Ni} = (1500 - 3x + 1500 - y)$кг Ni. По условию должно быть $m_{Al} = 2m_{Ni}$, или $x + 3y = 2\cdot(1500 - 3x + 1500 - y) \Leftrightarrow 7x + 5y = 6000; \quad 0 \leq x \leq 500; \quad 0 \leq 0 \leq 1500$ (*).

При этом условии (*) согласованного производства вся произведённая масса металла идёт в сплав, т.е. достигается максимальный вес произведённого сплава, равный $x + 3y + (1500 - 3x + 1500 - y) = 2(y - x + 1500)$. Исследуем на наибольшее значение последнее выражение при условии (*). Очевидно, что выражение $2(y - x + 1500)$ принимает наибольшее значение тогда и только тогда, когда принимает наибольшее значение выражение $y - x$, т.к. остальные величины являются константами. Обозначим $y - x = c$, найдем $c_{\max}$ при условии(*). Для наглядности сделаем рисунок, используем геометрическую интерпретацию задачи: в первом квадранте прямоугольной системы координат XOY отмечен отрезок АВ прямой $7x + 5y = 6000$, где $A(0;1200); B(500;500)$; здесь учтены ограничения на х,у, указанные в математической модели (*). Прямые вида $y = x + c$

должны пересекать отрезок АВ. Требуется найти наибольшее значение с, т.е. $c_{\max}$. Проводя прямые $y = x + c$ через точки А и В, получим наибольшее и наименьшее значения **с.** $c_{\max} = 1200$, тогда $\max 2(y - x + 1500) = 2(1200 + 1500) = 5400$. Ответ: 5400.

Задача 6.4. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 4 кг никеля. Во второй шахте имеется 200 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 5 кг алюминия или 6 кг никеля. Обе шахты доставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг алюминия приходится 2 кг никеля. Шахты договариваются так вести добычу металлов, чтобы завод мог выпустить наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет выпускать завод?

Решение. Производственный ресурс первой шахты составляет 500 человеко-часов, второй – 1000 чел/час. Пусть х чел/час отпущено в 1-ой шахте на производство Al, при этом производство Al составит 3х кг, а Ni - $(500 - x)\cdot 4$ кг. Пусть у чел/час отпущено во 2-ой шахте на производство Al, при этом производство Al составит 5у кг, а Ni - $(1000 - y)\cdot 6$ кг. По условию задачи х, у – неотрицательны и ограничены сверху: $x \le 500; y \le 1000$. Всего на двух шахтах произведено $m_{Al} = 3x + 5y$ кг Al и $m_{Ni} = (8000 - 4x - 6y)$кг Ni. По условию согласованного производства должно быть $2m_{Al} = 3m_{Ni}$,(*) или $2(3x + 5y) = 3\cdot(8000 - 4x - 6y) \Leftrightarrow 9x + 14y = 12000; \quad 0 \le x \le 500; \quad 0 \le 0 \le 1500$ (*) где ограничения $0 \le x \le 500; \quad 0 \le 0 \le 1500$ следуют из условия задачи.

При этом условии (*) согласованного производства вся произведённая масса металла идёт в сплав, т.е. достигается максимальный вес произведённого сплава. Вес сплава $P(x, y)$ равен $m_{Al} + m_{Ni} = (3x + 5y) + (8000 - 4x - 6y) = 8000 - x - y$. Исследуем на наибольшее значение последнее выражение при условии (*). Обозначим $8000 - y - x = c$ (тогда $8000 - c - x = y$), найдем $c_{\max}$ при условии (*).

Для наглядности сделаем рисунок, используем геометрическую интерпретацию задачи: в первом квадранте прямоугольной системы координат XOY отмечен отрезок АВ прямой $9x + 14y = 12000$, где

$A\left(500;\frac{3750}{7}\right);B\left(0;\frac{6000}{7}\right)$; здесь учтены ограничения на х,у, указанные в математической модели (*). Прямые вида $y=8000-c-x$ должны пересекать отрезок АВ. Требуется найти наибольшее значение с, т.е. $c_{\max}$. Это и будет ответом задачи.

Проводя прямые $y=8000-c-x$ через точки А и В, получим наименьшее и наибольшее значения **с** соответственно. Если прямая $y=8000-c-x$ проходит через точку $A\left(500;\frac{3750}{7}\right)$, то координаты точки удовлетворяют уравнению прямой: $\frac{3750}{7}=8000-c_A-500 \Leftrightarrow c_A=\frac{48750}{7}$. Аналогично, в точке $B\left(0;\frac{6000}{7}\right)$: $\frac{6000}{7}=8000-c_A-0 \Leftrightarrow c_B=\frac{50000}{7}$. Ясно, что $c_B>c_A$, но прямая со слагаемым c_B лежит ниже, чем прямая со слагаемым c_A, т.к. в уравнения прямых эти слагаемые входят со знаком «минус». Действительно, $-c_A>-c_B \Leftrightarrow c_B>c_A$. В этом и состоит решение «парадокса», когда в «верхнюю» прямую входит м*е*ньшая по величине константа С.

Ответ: максимальный вес сплава равен $\frac{50000}{7}$ кг.

Задача 6.5. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 200 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 4 кг алюминия или 2 кг никеля. Обе шахты доставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг алюминия приходится 1 кг никеля. Шахты договариваются так вести добычу металлов, чтобы завод мог выпустить наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет выпускать завод? Отв. $\frac{60000}{7}$ кг.

Задача 6.6. В двух областях есть по 250 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1кг никеля. Во второй области для добычи х кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, для добычи у кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?

Решение. До построения математической модели учтём некоторые обстоятельства: 1)промышленности всё равно, что потреблять, Al или Ni; 2) производство в первой и второй областях не надо согласовывать; 3) требуется просто произвести как можно больше Al или Ni. В первой области за один человеко/час производят вдвое больше Al, чем Ni, поэтому следует весь ресурс в 1250 человеко/часов пустить на производство Al, получится 250 кг Al. Во второй области производительность добычи обоих металлов одинакова, поэтому, всё равно, как распределить ресурсы на добычу металлов: можно *распределить их поровну, тогда получится уравнение* $x^2+y^2=1250$, *при этом условии нужно найти максимум суммы x+y. Задача решается геометрически: наибольшее значение C , где* $c=x+y$ *достигается на окружности* $x^2+y^2=1250$ *тогда, когда x=y=25, тогда C=50. А наибольшая масса металлов равна 300 кг. Можно, например, все ресурсы второй области бросить на добычу, какого-то одного металла, тогда наибольшее значение C, где,* $c=x+y$ *достигается при условии* $x^2+x^2=1250$ тогда, когда x=25, C=50. Ответ:300.

Задача 6.7. У фермера есть два поля площадью 10 га. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором 200 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором 300 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 10000 рублей за центнер, а свёклу- по цене 13000 рублей за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Решение. Пусть на первом поле x га засажено картофелем, а (10-x) га – свёклой, тогда получаемый урожай составит: 300x центнеров картофеля и 200(10-x) центнеров свёклы. Соответствующая суммарная выручка с первого поля будет $10000\cdot 300x+13000\cdot 200(10-x)$ рублей. Аналогично, на втором поле будет: у га засажено картофелем, а (10-у) га – свёклой, тогда получаемый урожай составит: 200у центнеров картофеля и

300(10-y) центнеров свёклы. Соответствующая суммарная выручка со второго поля будет

10000·200y+13000·300(10-y) рублей. Общая выручка от картофеля и свёклы с обоих полей составит $P(x,y)=10^5(30x+26(10-x)+20y+39(10-y))=10^5(4x-19y+650)$. Пусть $4x-19y+650=C$, надо найти $C_{max}-?$ По условию $0\le x\le 10;\quad 0\le y\le 10$, в осях XOY это квадрат со стороной 10, целевую функцию $4x-19y+650=C$ перепишем так $y=\frac{4}{19}x+\frac{650-c}{19}$, это множество прямых, параллельных $y=\frac{4}{19}x$, некоторые из которых проходят через точки указанного квадрата, а некоторые – нет. Из всех прямых, которые имеют общие точки с квадратом, надо выделить те, которые имеют наибольшее значение С. Рассмотрим две угловые «крайние» точки (0;10) и (10;0). Подставляя координаты (0;10) в уравнение $y=\frac{4}{19}x+\frac{650-c}{19}$, получим С=260. Подставляя координаты (10;0) в уравнение $y=\frac{4}{19}x+\frac{650-c}{19}$, получим С=690. Умножая на 10^5, приходим к **ответу:** 69 млн.

Задача 6.8. Предприятие выпускает изделия двух типов путём последовательной обработки каждого из них сначала в цехе А, а затем в цехе Б. Обработка каждого изделия первого типа занимает 5 часов в цехе А и 3 часа в цехе Б. Обработка каждого изделия второго типа занимает 2 часа в цехе А и 4 часа в цехе Б. Цех А в состоянии работать не более 150 часов, цех Б– не более 132 часов в месяц. Известно, что предприятие за каждое изготовленное изделие первого и второго типов получает прибыль соответственно 300 и 200 денежных единиц. Определите, сколько изделий каждого типа следует выпускать в месяц, чтобы обеспечить предприятию наибольшую прибыль.

Решение. Пусть x,y-число изделий первого и второго типов соответственно. Прибыль предприятия, согласно условию, составит $f(x;y)=300x+200y$. Ограничения, сформулированные в условии, приводят к системе: $\begin{cases}5x+2y\le 150;\\3x+4y\le 132;\\x\ge 0;\\y\ge 0; x,y\in Z.\end{cases}$нас будет интересовать f_{max}. Построим область, заданную системой неравенств: $\begin{cases}y\le \frac{150-2x}{2};\\y\le \frac{132-3x}{4};\\x\ge 0;\\y\ge 0;\end{cases}$одна из вершин четырёхугольника имеет координаты (24;15). В ней и будет достигаться максимум целевой функции $f_{\max}(24;15)=300\cdot 24+200\cdot 15=10200$.

Задача 6.9. В двух областях есть по 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия **в день** требуется x^2 человеко-часов труда, для добычи y кг никеля **в день** требуется y^2 человеко-часов труда. Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, причём на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. Области договариваются, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение. До построения математической модели учтём некоторые обстоятельства: 1)заводу не всё равно, что потреблять: соотношение масс Al и Ni должно быть 2:1; 2) производство в первой и второй областях надо согласовывать, чтобы не осталось металла, который будет не с чем сплавлять; 3) первая область втрое эффективнее добывает Al, чем Ni, вторая область с одинаковой производительностью добывает Al и Ni и делает это хуже, чем первая область, поэтому большую часть Al надо преимущественно добывать в первой области.

Обсуждение гипотез. *Гипотеза 1- пропорциональная добыча*: соотношение масс Al и Ni 2:1 в каждой области. Добыча в первой области $0{,}3x+0{,}1(1000-x)$ кг, условия согласованного производства: $0{,}3x=0{,}2(1000-x)\Leftrightarrow x=400$, а, следовательно, будет всего добыто $0{,}3\cdot 400+0{,}1\cdot 600=120+60=180$ кг.

Во второй области $(2a)^2+a^2=1000\Leftrightarrow a=10\sqrt{2}$, тогда будет добыто $20\sqrt{2}$ кг Al и $10\sqrt{2}$ кг Ni. Суммарно добыча составит $180+30\sqrt{2}\approx 222.4$ кг.

Гипотеза 2- 1000 ч/ч, т.е. все ресурсы второй области (как менее производительной) направить на Ni ,т.к. его требуется вдвое меньше. Это даст $10\sqrt{10}\approx 31.6$ кг Ni, тогда согласованная добыча в первой области даст 161,1+32=193,1 кг, а всего 224,7 кг. Это больше, чем первом случае. Обе гипотезы страдают отсутствием обоснования.

Гипотеза 3 – x, y – целые числа, т.к. в условиях производства едва ли реально управлять дробными человеко-часами. Ищем решение уравнения баланса $x^2+y^2=1000$ *для второй области в целых неотрицательных числах.* Уравнение $x^2+y^2=1000$, в натуральных числах имеет только решения (10;30): (18;26) и симметричные им. Второе решение означает 18 кг Al и 26 кг Ni добудет вторая область. Тогда первая область произведёт $0{,}3x+0{,}1(1000-x)$ кг металлов, а по условиям согласованной добычи с учётом 18 кг Al и 26 кг Ni добытых второй областью, имеем уравнение: $0{,}3x+18=(0{,}1(1000-x)+26)\cdot 2 \Leftrightarrow x=448$. Это значит, чт о первая область произведёт $0{,}3\cdot 448+0{,}1\cdot 552=134{,}4+55{,}2=189{,}6$ кг, а в сумме со второй будет 189,6+44=233,4 кг.

Первое решение означает 10 кг Al и 30 кг Ni добудет вторая область. Аналогично, имеем: $0{,}3x+10=(0{,}1(1000-x)+30)\cdot 2 \Leftrightarrow x=500$. Тогда первая область произведёт $0{,}3\cdot 500+0{,}1\cdot 500=150+50=200$ кг металлов, вторая 40 кг, в сумме это будет 240 кг, что больше, чем во всех рассмотренных случаях. Других решений диофантово уравнение баланса не имеет, следовательно, найденный случай – оптимален. **Ответ:240 кг.**

Задача 6.10. Небольшая мебельная фирма производит книжные шкафы и серванты. На изготовление одного книжного шкафа расходуется 1 кв.м. древесно-стружечной плиты, $\frac{4}{3}$ кв.м. сосновой доски и 1,5 человеко-часа рабочего времени. Аналогичные данные для серванта даются числами: 1,5 кв.м. древесно-стружечной плиты, 1,5 кв.м. сосновой доски и 4,5 человеко-часа рабочего времени. В течение одного месяца в распоряжении фирмы имеются 120 кв.м. ДСП, 150 кв.м. сосновых досок и 315 человеко-часов рабочего времени. Прибыль от реализации одного книжного шкафа равна 500 рублей, а серванта - 1200 рублей. Сколько следует выпускать шкафов и сервантов для получения максимальной прибыли? Укажите величину этой прибыли.

Решение. Затраты на один шкаф определяются триадой

1 кв.м. ДСП	$\frac{4}{3}$ кв.м. сосновой доски	1,5 человеко-часа

Следовательно, затраты на x шкафов составят:

x кв.м. ДСП	$\frac{4}{3}\cdot x$ кв.м. сосновой доски	1,5*x человеко-часов

Аналогичные затраты на **1** и на **y** сервантов составят:

1,5 кв.м. ДСП	1,5 кв.м. сосновой доски	4,5 человеко-часа
1,5*y кв.м. ДСП	1,5*y кв.м. сосновой доски	4,5*y человеко-часа

Ресурсы на ДСП ограничены 120 кв.м., получаем первое ограничение задачи $x+1{,}5y\le 120$. Ресурсы сосновой доски ограничены 150 кв.м., получаем второе ограничение задачи $\frac{4}{3}x+1{,}5y\le 150$. Ресурсы человеко-часов ограничены 315 ч/ч, получаем третье ограничение задачи $1{,}5x+4{,}5y\le 315$. Четвёртое ограничение связано с тем, что $x,y\in N$. Все эти ограничения образуют систему, которую запишем в виде: $\begin{cases} y\le 80-\frac{2}{3}x, \\ y\le 100-\frac{8}{9}x, \\ y\le 70-\frac{1}{3}x \end{cases}$ с целевой функцией $P(x,y)=500x+1200y$, выражающей величину прибыли фирмы. В плоскости XOY система задаёт область в первой четверти, ограниченную осями координат и отрезками прямых, проходящих через точки (0;70), (30;60), (90;20), 112,5;0) пересечения границ полуплоскостей, заданных системой неравенств. Обозначим значение целевой функции через С: $C=500x+1200y$. Наибольшее значение С достигается тогда и только тогда, когда свободный член в уравнении прямой $y=\frac{C}{1200}-\frac{5}{12}x$примет наибольшее значение. Это произойдёт, когда прямая из семейства прямых $y=\frac{C}{1200}-\frac{5}{12}x$ пройдёт через угловую точку области (30;60). При этом $P(30{,}60)=500\cdot 30+1200\cdot 60=87000$. Ответ:87000рублей, 30 шкафов, 60 сервантов.

Задача 6.11. Небольшая мебельная фирма производит книжные шкафы и письменные столы. На изготовление одного книжного шкафа расходуется 1,5 кв.м. сосновой доски стандартного сечения, 1кв.м. берёзовой доски и 3 человеко-часа рабочего времени. Аналогичные данные для письменного стола даются числами: 1 кв.м. сосновой доски стандартного сечения, 1кв.м. берёзовой доски и 6 человеко-часов. В течение одного месяца в распоряжении фирмы имеются 120 кв.м. сосновых досок, 100 кв.м. берёзовых досок и 540 человеко-часов рабочего времени. Прибыль от реализации одного книжного шкафа равна 900 рублей, а письменного стола - 1200 рублей. Сколько следует выпускать шкафов и сервантов для получения максимальной прибыли? Укажите величину этой прибыли. (Отв.:20 шкафов, 80 столов, 114 000 рублей).

Задача 6.12. Небольшая мебельная фирма производит книжные шкафы и стеллажи. На изготовление одного книжного шкафа расходуется 3 кв.м. древесно-стружечной плиты, 2кв.м. сосновой доски и 2,6 человеко-часа рабочего времени. Аналогичные данные для стеллажа даются числами: 4,5 кв.м. древесно-стружечной плиты, 1 кв.м. сосновой доски и 2 человеко-часа рабочего времени. В течение одного месяца в распоряжении фирмы имеются 360 кв.м. ДСП, 160 кв.м. сосновых досок и 250 человеко-часов рабочего времени. Прибыль от реализации одного книжного шкафа равна 1100 рублей, а стеллажа - 900 рублей. Сколько следует выпускать шкафов и сервантов для получения максимальной прибыли? Укажите величину этой прибыли. (Отв.:60 шкафов, 40 стеллажей, 102000 рублей).

БЗ №7. Задачи, сводящиеся к математическим моделям, решаемые в целых числах.

Задача 7.1. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём гостиницу со стандартными номерами площадью 21 квадратных метров и номера люкс, площадью 49 кв.м. Площадь, отводимая под гостиничные номера равна 1099 кв.м. Выручка от одного стандартного номера в сутки равна 2000 рублей, от номера люкс – 4500 рублей. Как предпринимателю следует распределить имеющуюся площадь между номерами обоих типов так, чтобы суточная выручка была максимальной и чему равна будет максимальная выручка?

Решение. Построим математическую модель задачи. Пусть будет x стандартных номеров и y – номеров «люкс». x, y – неотрицательные целые числа. Получаем диофантово уравнение $21x+49y=1099$. Требуется найти максимальное значение при данных условиях целевой функции $P(x,y)=2000x+4500y$. Неочевидный факт: диофантово уравнение сокращается на 7, получаем $3x+7y=157$. **Первый способ.** Начнём перебор целых неотрицательных значений: y=0$\Rightarrow x\notin Z$. При y=1 x=50, по частному решению (50,1) используя теорему об общем решении линейного диофантова уравнения, получаем общее решение: x=50+7t, y=1-3t, $t\in Z$. Условие неотрицательности позволяет найти все соответствующие значения t: $\begin{cases}50+7t\ge 0\\ 1-3t\ge 0\\ t\in Z\end{cases}\Leftrightarrow t\in\{-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$. При каждом из указанных t вычислим соответствующие x, y а затем значения целевой функции: при t=-7, x=1,y=22, P(1,22)=1*2000+22*4500=101000.

t=-7	x=1	y=22	P(1,22)=101000

t=-6	x=8	y=19	P(8,19)=101500
t=-5	x=15	y=16	P(15,16)=102000
t=-4	x=22	y=13	P(22,13)=102500
t=-3	x=29	y=10	P(29,10)=103000
t=-2	x=36	y=7	P(36,7)=103500
t=-1	x=43	y=4	P(43,4)=104000
t=0	x=50	y=1	**P(50,1)=104500**

Ответ:104500 рублей.

Второй способ основан не на теореме об общем виде решения и угадывании или подборе частного решения, а на методе П. Ферма «бесконечного спуска». Выразим x из основного уравнения: $x = 52 - 2y + \frac{1-y}{3}$, дробь должна принимать целые значения, обозначим дробь так $n = \frac{1-t}{3} \Leftrightarrow y = 1 - 3n \Rightarrow x = 52 - 2(1-3n) + n = 50 + 7n$. Условия неотрицательности x, y дают: $n \le 0; n \ge -7$ и далее вычисляем решения (x,y) и P(x,y), как и в первом способе.

Задача 7.2. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём гостиницу со стандартными номерами площадью 27 квадратных метров и номера люкс, площадью 45 кв.м. Площадь, отводимая под гостиничные номера равна 981 кв.м. Выручка от одного стандартного номера в сутки равна 2000 рублей, от номера люкс – 4000 рублей. Как предпринимателю следует распределить всю имеющуюся площадь между номерами обоих типов так, чтобы суточная выручка была максимальной и чему равна будет максимальная выручка?

Отв.: 3 ст. и 20 люкс дадут макс. выручку 86 000рублей.

Задача 7.3. Для перевозки большого числа бочек по 160 кг и по 210 кг выделены трёхтонные машины. Можно ли загрузить такими бочками машину полностью (т.е.избежать недогрузки).Если да, то укажите все способы такой загрузки.

Решение. Предположим, что надо загрузить x бочек по 160 кг и y бочек по 210 кг, получим уравнение $160x + 210y = 3000 \Leftrightarrow 16x + 21y = 300$, которое решаем в неотрицательных целых числах. Это линейное диофантово уравнение можно решить: 1) графически, 2)подбором, 3)методом Ферма, 4)с помощью теоремы о виде общего решения, если известно какое-либо частное решение. **Решим**, например, методом Ферма, или методом бесконечного спуска. $16x + 21y = 300 \Leftrightarrow x = \frac{300 - 21y}{16} \Leftrightarrow x = 18 - y + \frac{12 - 5y}{16}$. Дробь должна принимать только целые значения, поэтому полагаем $\frac{12-5y}{16}=n \Leftrightarrow 12-5y=16n \Leftrightarrow y=\frac{12-16n}{5} \Leftrightarrow y=2-3n+\frac{2-n}{5}$. Последняя дробь должна принимать только целые значения, поэтому полагаем $l=\frac{2-n}{5} \Leftrightarrow n=2-5l$. Тогда $y=2-3(2-5l)+\frac{2-(2-5l)}{5} \Leftrightarrow y=16l-4$. Аналогично, $x=18-(16l-4)+\frac{12-5(16l-4)}{16} \Leftrightarrow x=24-21l$. Итак, общее решение диофантова уравнения $16x+21y=300$ имеет вид: $x=24-21l; \quad y=16l-4; \quad l \in Z$. По условию, $x \geq 0; y \geq 0 \Rightarrow l=0$ и единственное решение, удовлетворяющее условию неотрицательности, это x=3, y=12.

Ответ: 3 бочки по 160 кг и 12 бочек по 210 кг. Проверьте самостоятельно, что, угадав частное решение (3;12), мы получим по теореме об общем решении то же самое решение, которое получено методом Ферма бесконечного спуска.

Задача 7.4. Тринадцать пиратов делят клад золотых монет на палубе шхуны. При попытке разделить поровну, они обнаружили, что осталось 8 монет. Налетевший шторм смыл двух пиратов за борт. Оставшиеся пираты попытались заново разделить поровну монеты, лишними остались 3 монеты. В споре о том, кому они достанутся и последовавшей перестрелке, погибли ещё трое. Уцелевшие пираты попытались в третий раз разделить поровну, но и теперь лишними остались 5 монет. Из какого количества состоял вклад, если для его хранения достаточно сундука, вмещающего 500 монет?

Решение. Искомое число монет обладает тем свойством, что при делении на 13 оно даёт в остатке 8, при делении на 11 даёт в остатке 3, при делении на 8 оно даёт в остатке 5. По теореме о делении натуральных чисел с остатком, получаем $13k+8=11m+3=8n+5$ систему двух линейных диофантовых уравнений с тремя натуральными неизвестными. Рассмотрим сначала первое уравнение $13k+8=11m+3$. Его можно решить либо по теореме об общем решении, но для этого необходимо угадать частное решение, или методом бесконечного спуска Ферма. Используя метод Ферма, последовательно получаем: $13k+5=11m \Leftrightarrow m=\frac{13k+5}{11} \Leftrightarrow m=k+\frac{2k+5}{11}$. Последняя дробь должна принимать только целые значения, поэтому полагаем $l=\frac{2k+5}{11} \Leftrightarrow k=\frac{11l-5}{2} \Leftrightarrow k=5l-2+\frac{l-1}{2}$. Последняя дробь должна принимать только целые значения, поэтому полагаем $p=\frac{l-1}{2} \Leftrightarrow l=2p+1$. Тогда

$k=5(2p+1)-2+\frac{2p+1-1}{2} \Leftrightarrow k=11p+3$. Подставим найденное выражение для k в исходное уравнение: $13(11p+3)+5=11m \Leftrightarrow 13\cdot 11p+44=11m \Leftrightarrow m=13p+4$.Итак, решением первого уравнения является $\begin{cases} k=11p+3 \\ m=13p+4;\ p\in Z \end{cases}$. При подстановке этих выражений в первое уравнение получаем верное равенство: $13(11p+3)+5=11(13p+4) \Leftrightarrow 143p+47=143p+47$. Чисел вида $143p+47$, не превосходящих 500, всего три: 190, 333, 476. Среди них только 333 при делении на 8 даёт остаток 5, действительно, 8* 41+5=333. Это и есть искомое число монет. Заметим, что второе диофантово уравнение можно было решить либо методом Ферма, либо по теореме об общем виде решения диофантова уравнения.

Ответ:333. Решите самостоятельно более общую задачу: найти все решения системы диофантовых уравнений без ограничения сверху числом 500.

Задача 7.5. (IV уровень, сложности, модель – диофантово уравнение с двумя неизвестными, технические сложности в решении методом спуска Ферма или по теореме). Для перевозки большого числа ящиков по 130 кг и 110 кг выделены двухтонные машины. Можно ли загрузить машины ящиками полностью? Если да, то укажите все возможные варианты.

Решение. Обозначения: x,y – число ящиков первого и второго типов. $13x+11y=200; x\geq 0; y\geq 0$- математическая модель задачи. Если угадать частное решение, то можно записать общее решение пользуясь теоремой об общем виде решения линейного диофантового уравнения: $x=1-11t, y=17+13t,$. Условия неотрицательности $x\geq 0; y\geq 0$выполняются только при $t\in\{-1;0\}$. Отсюда из общих формул получаем два решения задачи и, соответственно, два способа загрузки машин: (1,17),(12,4). Заметим, что уравнение $13x+11y=200$можно решить и методом Ферма.

Задача 7.6. (V уровень, сложности, модель – диофантово уравнение с тремя неизвестными, технические сложности в переборе).

Из лесного хозяйства в город нужно вывезти 1590 деревьев. Для перевозки имеются полуторатонки, трёхтонки, пятитонки. На полуторатонке можно перевезти за один раз 26 деревьев, на трёхтонке – 45, на пятитонке – 75. Стоимость одного пробега полуторатонки 9 рублей, трёхтонки – 15рублей, пятитонки – 24 рубля. Как хозяйство должно распределить перевозки, чтобы общая их стоимость была наименьшей? Недогрузка машин не допускается.

Решение. Обозначения: x,y,z – число полуторатонок, трёхтонок, пятитонок соответственно при оптимальном распределении. Число перевозимых деревьев при этом равно 26x+45y+75z=1590. Решение этого диофантова уравнения с тремя неизвестными, технически сложно. Применим житейские соображения: определим тип машины, где себестоимость перевозки одного дерева самая низкая: $\frac{9}{26} > \frac{15}{45} > \frac{24}{75}$ - себестоимости перевозок на полуторатонках, трёхтонках, пятитонках соответственно. Т.е. дешевле всего перевозить на пятитонках, дороже на трёхтонках, дороже всего - на полуторатонках. На пятитонках можно перевезти 1500 деревьев. Если погрузить 1575, то оставшиеся 25 деревьев нельзя распределить по 3-х и 1,5- тонкам без недогруза. Значит оставшиеся 90 деревьев загрузим в две трёхтонки. Этот план оптимален, т.к.если уменьшать число 5-тонок, то неперевезённые ими деревья надо загружать в 1,5- или 3- тонки, что приведёт к удорожанию перевозки.

Ответ: 20 5-тонок, 2 3-х тонки, 0 – 1,5-тонок.

Задача 7.7. (V уровень, сложности, модель – система двух диофантовых уравнений с тремя неизвестными, технически сложный приём решения).

Лаборатория «Сигма» на покупку пяти микроскопов, четырёх телескопов и эпидиаскопа потратила 140 000 рублей. Лаборатория «Тэта» » на покупку шести микроскопов, пяти телескопов и эпидиаскопа потратила 167 000 рублей. Сколько потратит лаборатория «Зета» на покупку трёх микроскопов, двух телескопов и эпидиаскопа, если известно, что цены у всех поставщиков одинаковые?

Решение. Обозначения: x,y,z – стоимость микроскопа, телескопа и эпидиаскопа в тысячах рублей, соответственно. Математическая модель имеет вид:

$\begin{cases} 5x + 4y + z = 140, \\ x + 5y + z = 167 \\ 3x + 2y + z - ? \end{cases}$. Предположим, что искомую комбинацию $3x + 2y + z$ можно выразить как линейную комбинацию данных по условию $5x + 4y + z$ и $x + 5y + z$ выражений, т.е. $\alpha(5x + 4y + z) + \beta(x + 5y + z) = 3x + 2y + z$. Приводя подобные, получим: $(5\alpha + 6\beta)x + (4\alpha + 5\beta)y + (\alpha + \beta)z = 3x + 2y + z$. Понимая последнее равенство, как равенство двух многочленов от трёх переменных, приравняем соответствующие коэффициенты при переменных:

$\begin{cases} 5\alpha + 6\beta = 3, \\ 4\alpha + 5\beta = 2, \\ \alpha + \beta = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3, \\ \beta = -2. \end{cases}$ Тогда $3x + 2y + z = 3 \cdot 140 - 2 \cdot 167 = 86.$

Ответ: 86 000 рублей.

Пример 7.8 (V уровень, сложности, модель – система двух диофантовых уравнений с тремя неизвестными, технически сложный приём решения).

Пятая часть персонала фирмы работает в транспортном отделе, ещё 52 сотрудника – в отделе продаж, остальные – в нескольких цехах, в каждом из которых работает $\frac{1}{7}$ персонала фирмы. Чему равна общая численность персонала фирмы?

Ответ: 140.

Задача 7.9. Реконструкция ВАЗа проходила в четыре этапа, каждый из которых продолжался целое число месяцев и сопровождался падением производства. Ежемесячное падение производства на первом этапе составило 4%, на втором – 12,5%, на третьем - $\frac{100}{7}\%$; на четвёртом - $\frac{50}{3}\%$. В результате по окончании реконструкции первоначальный объём продукции сократился на 64%. Определите продолжительность каждого этапа реконструкции.

Решение. Пусть a,b,c,d месяцев – продолжительности этапов, S – первоначальный объём продукции, $a, b, c, d \in N$. Основное уравнение имеет вид: $S\left(1 - \frac{4}{100}\right)^a \left(1 - \frac{12{,}5}{100}\right)^b \left(1 - \frac{100}{7 \cdot 100}\right)^c \left(1 - \frac{50}{3 \cdot 100}\right)^d = S\left(1 - \frac{64}{100}\right).$ После упрощений получим: $\left(\frac{24}{25}\right)^a \left(\frac{7}{8}\right)^b \left(\frac{6}{7}\right)^c \left(\frac{5}{6}\right)^d = \frac{9}{25}$, приводя степени к основаниям 2,3,5,7 $2^{3a-3b+c-d} \cdot 3^{a+c-d} \cdot 5^{-2a+d} \cdot 7^{b-c} = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^{-2} \cdot 7^0 \Leftrightarrow 2^{3a-3b+c-d} \cdot 3^{a+c-d-2} \cdot 5^{-2a+d+2} \cdot 7^{b-c} = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0$ и пользуясь основной теоремой арифметики о единственности разложения натурального числа на простые множители, получим систему: $\begin{cases} 3a - 3b + c - d = 0 \\ a + c - d - 2 = 0 \\ -2a + d + 2 = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = 2 \\ d = 2 \end{cases}.$

Ответ: каждый из 4-х этапов длился по два месяца.

Задача 7.10. Реконструкция завода проходила в четыре этапа, каждый из которых продолжался целое число месяцев и сопровождался падением производства. Ежемесячное падение производства на первом этапе составило 4%, на втором – 10%, на третьем - $\frac{50}{3}\%$; на четвёртом - 65%. В результате по окончании реконструкции первоначальный объём продукции сократился на 93%. Определите продолжительность третьего этапа реконструкции. (Отв.:7 месяцев).

Задача 7.11. Нефтеперерабатывающий завод имеет цеха трёх видов. В каждом цехе первого, второго и третьего вида работает соответственно 350, 80 и 30 рабочих, а также 91, 19 и 8 технологов. Всего в цехах работают 980 рабочих и 252 технолога. Сколько цехов каждого типа на заводе, если общее количество цехов не превосходит 15. (Отв. 2,2,4).

Задача 7.12. Алмаз имеет дефект и, чтобы устранить дефект, мастер решает разделить алмаз на три части, суммарный вес которых после огранки составит 50 карат. При этом вес меньшего из полученных бриллиантов будет не меньше 5 карат, а вес большего из них – не более 30 карат. Возможность равенства бриллиантов по весу не исключается. Известно, что стоимость бриллианта пропорциональна его весу. Какой вес должен придать мастер каждому из трёх бриллиантов, чтобы их суммарная стоимость была максимальна? Отв. (5, 15, 30)

Задача 7.13. Три бригады должны выполнить работу. Первая бригада делает в день 200 деталей. Вторая бригада делает в день на a деталей меньше, чем первая ($a \in (0;200)$), а третья делает в день на 5a деталей больше, чем первая. Сначала первая и вторая бригады, работая вместе, выполняют $\frac{1}{5}$ всей работы, а затем все три бригады, работая вместе, выполняют оставшиеся $\frac{4}{5}$ работы. На сколько деталей в день меньше должна делать вторая бригада, чем первая, чтобы вся работа была выполнена указанным способом как можно скорее? (a=125).

Задача 7.14. За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно и прибавлялись к вкладу, сначала в размере 5%, затем 12%, потом $11\frac{1}{9}\%$, и, наконец, 12,5% в месяц. Под действием каждой процентной ставки вклад находился целое число месяцев. По истечению срока хранения, первоначальная сумма увеличилась на $104\frac{1}{6}\%$. Определите срок хранения вклада.

Решение. Пусть k,l,m,n месяцев – продолжительности этапов, S – первоначальный размер вклада, $k,l,m,n \in N$. Основное уравнение имеет вид: $S\left(1+\frac{5}{100}\right)^{k}\left(1+\frac{12}{100}\right)^{l}\left(1+\frac{100}{9\cdot 100}\right)^{m}\left(1+\frac{12{,}5}{100}\right)^{n}=S\left(1+\frac{625}{6\cdot 100}\right)$. После упрощений получим: $\left(\frac{21}{20}\right)^{k}\left(\frac{28}{25}\right)^{l}\left(\frac{10}{9}\right)^{m}\left(\frac{9}{8}\right)^{n}=\frac{49}{24}$, приводя степени к основаниям 2,3,5,7 $2^{m+2l+3}\cdot 3^{2n+k+1}\cdot 5^{m}\cdot 7^{l+k}=2^{3n+2k}\cdot 3^{2m}\cdot 5^{2l+k}\cdot 7^{2}$ и, пользуясь, основной теоремой арифметики о единственности разложения натурального числа на простые множители, получим систему: $\begin{cases} m+2l+3=3n+2k \\ 2n+k+1=2m \\ m=2l+k \\ l+k=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ l=1 \\ m=3 \\ n=2 \end{cases}$.

Ответ: срок хранения вклада равен 7 месяцам.

Задача 7.15. За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно и прибавлялись к вкладу, сначала в размере 5%, затем $11\frac{1}{9}\%$, потом $7\frac{1}{7}\%$, и, наконец, 12% в месяц. Под действием каждой процентной ставки вклад находился целое число месяцев. По истечению срока хранения, первоначальная сумма увеличилась на 180% . Определите срок хранения вклада. Отв.:12 месяцев.

БЗ №8. Задачи, решаемые комбинированными способами.

Задача 8.1. В банк положили вклад в 100000 рублей. В каком случае спустя 10 лет вкладчик получит больше денег: если банк начисляет 5% от имеющейся суммы денег раз в год (начисленные проценты прибавляются к вкладу) или, если он начисляет ежемесячно $\frac{5}{12}\%$? Определите, насколько больше денег можно получить в оптимальном случае. (Подсказка: можно использовать неравенство Бернулли: для $x \geq -1$ выполнено $(1+x)^n \geq 1+nx,\ n \in Z^+$.).

Задача 8.2. В начале года фирма выбирает банк для получения кредита среди нескольких банков, кредитующих под разные проценты. Полученным кредитом фирма планирует распорядиться следующим образом: 70% кредита направить на организацию продажи компьютеров, а остальные 30% на проведение компьютерных курсов. Торговля компьютерами может принести прибыль в размере от 33% до 45% годовых, а курсы - от 23% до 35% годовых. В конце года фирма должна вернуть кредит банку с процентами и при этом рассчитывает на чистую прибыль от указанных видов деятельности от не менее 10%, но и не более 27% годовых от всего полученного кредита. Какими должны быть наименьшая и наибольшая процентные ставки кредитования выбираемых банков, чтобы фирма гарантированно обеспечила себе указанный выше уровень прибыли?

Решение. Пусть кредитная ставка банка р%, S – величина кредита, первая часть кредита – 0,7S может принести выручку в размере от $0,7\cdot 1,33\cdot S$ до $0,7\cdot 1,45\cdot S$. Вторая часть кредита – 0,3S может принести выручку в размере от $0,3\cdot 1,23\cdot S$ до $0,3\cdot 1,35\cdot S$. Складывая нижнюю границу с нижней, затем верхнюю границу с верхней, получим отрезок возможных значений суммарной выручки от двух видов бизнеса: $[(0.931+0.369)S; (1,015+0,405)S] = [1,3;\ 1,42]\cdot S$. После выплаты кредита банку с процентами, т.е. $S\left(1+\frac{p}{100}\right)$, получится чистая прибыль в размере $\left[\frac{30-p}{100}; \frac{42-p}{100}\right]\cdot S$. Это соответствует проценту чистой прибыли из промежутка $[30-p;\ \ 42-p]$. Для наглядности составим таблицу значений промежутков в зависимости от значений р:

P=14	P=15	P=16	P=17	P=18	P=19	P=20	P=21	P=22
$[16;28]$	$[15;27]$	$[14;26]$	$[13;25]$	$[12;24]$	$[11;23]$	$[10;22]$	$[9;21]$	$[8;20]$

Требованию задачи на чистую прибыль от указанных видов деятельности от не менее 10%, но и не более 27% годовых от всего полученного кредита удовлетворяют значения процентной ставки $p\in[15;20]$. Отв. $p\in[15;20]$.

Задача 8.3. В начале года фирма выбирает банк для получения кредита среди нескольких банков, кредитующих под разные проценты. Полученным кредитом фирма планирует распорядиться следующим образом: 75% кредита направить на торговлю программным продуктом «Бухгалтерия», а остальные 25% на организацию консультационного пункта «Математика». Торговля ПО может принести прибыль в размере от 36% до 44% годовых, а «Математика» - от 20% до 24% годовых. В конце года фирма должна вернуть кредит банку с процентами и при этом рассчитывает на чистую прибыль от указанных видов деятельности от не менее 19%, но и не более 27% годовых от всего полученного кредита. Какими должны быть наименьшая и наибольшая процентные ставки кредитования выбираемых банков, чтобы фирма гарантированно обеспечила себе указанный выше уровень прибыли? (Отв. $p\in[12;13]$).

Задача 8.4. В начале года фирма выбирает банк для получения кредита среди нескольких банков, кредитующих под разные проценты. Полученным кредитом фирма планирует распорядиться следующим образом: 75% кредита направить на торговлю программным продуктом

«Бухгалтерия», а остальные 25% на организацию консультационного пункта «Математика». Торговля ПО может принести прибыль в размере от 36% до 44% годовых, а «Математика» - от 20% до 24% годовых. В конце года фирма должна вернуть кредит банку с процентами и при этом рассчитывает на чистую прибыль от указанных видов деятельности от не менее 13%, но и не более 21% годовых от всего полученного кредита. Какими должны быть наименьшая и наибольшая процентные ставки кредитования выбираемых банков, чтобы фирма гарантированно обеспечила себе указанный выше уровень прибыли? (Отв. $p \in [18;19]$).

Задача 8.5. В начале года фирма выбирает банк для получения кредита среди нескольких банков, кредитующих под разные проценты. Полученным кредитом фирма планирует распорядиться следующим образом: 60% кредита направить на торговлю канцтоварами, а остальные 40% на организацию подготовительных курсов. Торговля канцтоварами может принести прибыль в размере от 35% до 45% годовых, а курсы - от 20% до 25% годовых. В конце года фирма должна вернуть кредит банку с процентами и при этом рассчитывает на чистую прибыль от указанных видов деятельности от не менее 11%, но и не более 23% годовых от всего полученного кредита. Какими должны быть наименьшая и наибольшая процентные ставки кредитования выбираемых банков, чтобы фирма гарантированно обеспечила себе указанный выше уровень прибыли? (Отв. $p \in [14;18]$).

Задача 8.6. Имеются три фирмы: «А», «В», «С». Они являются учредителями трёх акционерных обществ. Учредителями первого общества «АВ» являются только «А» и «В», причём они делят пакет акций в отношении 10:1; второго общества «ВС» - только фирмы «В» и «С», они делят пакет акций в отношении 1:2. Учредителями третьего общества «АС» являются только «А» и «С», они делят пакет акций в отношении 2:1. Возможно ли из трёх акционерных обществ «АВ», «ВС» и «АС» создать новую компанию, так чтобы в новом объединении участие компаний «А», «В» и «С» определялось бы как 12:3:5? Если да, то в каком отношении должны быть сформированы пакеты акций компаний «АВ», «ВС» и «АС»? (Отв. 11:6:3).

Задача 8.7. Вклад планируется положить на пять лет, он составляет целое число сотен тысяч рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 20% по сравнению с его размером в начале года, кроме того, в начале четвёртого и пятого годов вклад ежегодно пополняется на 100 000 рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через пять лет он будет меньше 800 000 рублей.

Решение. Пусть S – целое число, равное величине первоначального вклада. По формуле сложных процентов в конце третьего года величина вклада станет равной $S(1+\frac{20}{100})^3 = S\cdot 1{,}2^3$, в начале четвёртого - $S\cdot 1{,}2^3+100000$, а в конце четвёртого - $1{,}2\cdot\left(S\cdot 1{,}2^3+100000\right)$. Аналогично, в начале пятого - $1{,}2\cdot\left(S\cdot 1{,}2^3+100000\right)+100000 = S\cdot 1{,}2^4+1{,}2\cdot 10^5+10^5$, в конце пятого - $1{,}2\left(S\cdot 1{,}2^4+2{,}2\cdot 10^5\right)=1{,}2^5\cdot S+1{,}2\cdot 2{,}2\cdot 10^5$. Требуется решить неравенство: $1{,}2^5\cdot S+1{,}2\cdot 2{,}2\cdot 10^5<800000 \Leftrightarrow 2{,}48832\cdot S<800000-2{,}64\cdot 10^5=536000 \Leftrightarrow S<215406{,}3786$.

Учитывая, что S наибольшее целое в сотнях тысяч, получаем **ответ**: S=200 000. **Второй способ:** решение перебором. Из условия задачи ясно, что S<600000, остаётся перебрать пять вариантов: $10^5, 2\cdot 10^5$, $3\cdot 10^5$, $4\cdot 10^5, 5\cdot 10^5$, со второй попытки повезёт.

Задача 8.8. Вклад планируется положить на три года, он составляет целое число десятков тысяч рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, кроме того, в начале второго и третьего годов вклад ежегодно пополняется на 30 000 рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через три года он будет меньше 96 000 рублей. Ответ: 20 000.

Задача 8.9. Банк предлагает два вида вкладов «Базовый» и «Активный». По вкладу «Базовый» начисляется 12% годовых. По вкладу «Активный» начисляется 8% годовых в первый год, 10% годовых во второй год и р% за третий год. Проценты по вкладу начисляются один раз в год и добавляются к текущей сумме вклада. При каком наибольшем целом значении параметра р трёхлетний вклад «Базовый» выгоднее вклада «Активный»?

Решение. Если сумму денег в S рублей положить на вклад «Базовый», то к концу третьего года величина вклада станет равной $(1{,}2)^3\cdot S$. Если сумму денег в S рублей положить на вклад «Активный», то к концу первого, второго, третьего года величина вклада станет, соответственно, равной: в конце 1-ого - $1{,}08\cdot S$; в конце 2-ого - $1{,}1\cdot 1{,}08\cdot S=1.188\cdot S$; в конце 3-его - $\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot 1.188\cdot S$. По требованию задачи составим и решим неравенство $(1{,}2)^3\cdot S>\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot 1.188\cdot S \Leftrightarrow$

$\left(1+\frac{p}{100}\right)<\frac{1,404928}{1,188} \Leftrightarrow \frac{p}{100}<1,182599327-1 \Leftrightarrow p<18,25993266$. Наибольшее целое значение параметра p=18. Ответ: 18.

Задача 8.10. Первый банк предлагает вклад под 8% годовых. Второй банк предлагает 6% годовых в первые два года и p% за третий год. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Найдите наименьшее целое значение p, при котором трёхлетний вклад во втором банке выгоднее, чем в первом. Ответ: 13.

Задача 8.11. Иван положил в банк некоторую сумму денег на 4 года. Перед началом каждого года он выбирает одну из двух возможных схем начисления прибыли в наступающем году: 1) к его вкладу прибавляется 10% от находящейся на счёте суммы; 2) к его вкладу прибавляется 5% от находящейся на счёте суммы и ещё 50 000 рублей. Известно, что по прошествии 4 лет Иван может получить максимальную прибыль в 417 967 рублей, если будет оптимально выбирать схему начисления прибыли. Сколько рублей положил на счёт Иван? Если возможны разные варианты, укажите хотя бы один.

Решение. Прикидка даёт 16 различных алгоритмов начисления прибыли. Действительно, согласно комбинаторному правилу произведения, если сложное действие состоит из 4-х элементарных действий (выбор в начале каждого из 4-х годов одной из 2-х схем начисления прибыли), причём каждое элементарное действие может быть выполнено 2-я различными способами, то общее количество способов, которым может быть выполнено сложное действие (т.е.стратегий начисления прибыли на протяжении 4-хлет), равно $2\cdot2\cdot2\cdot2=16$. Эти стратегии можно визуализировать в виде графа или дерева вариантов. Перспектива просчитывать 16 вариантов не вдохновляет, выбор оптимальной схемы неясен.

Что означает оптимальный выбор схемы? Начнём со сравнительного анализа схем начисления прибыли. Первая схема из суммы S рублей за год позволяет получить $1,1\cdot S$, а вторая - $1,05\cdot S+50000$.Для сравнения результатов вычтем из первой суммы вторую сумму: $1,1\cdot S-1,05\cdot S-50000=0,05\cdot S-50000$ отсюда ясно, что при S>1000 000 рублей первая схема выгоднее второй, вторая выгоднее при S<1000 000 рублей.

Предположим, что $S\geq1000000$, тогда применима 1 схема и максимальная прибыль будет $(1,1)^4\cdot S-S=1,4641\cdot S-S=0,4641\cdot S$, т.е. больше 464 100 рублей, что противоречит условию (прибыль равна 417 967 рублям), значит, S<1000000. И, следовательно, максимальная прибыль в первом году достигается по второй схеме начисления прибыли.

Дальше алгоритм начисления будет разветвляться: сумма вклада может достигнуть пороговой величины в 1 млн. рублей в начале второго года, тогда следует переходить на первую схему начисления во втором и последующим годам. Если на начало второго года величина вклада ещё не достигнет порогового значения, то продолжается применение второй схемы; если к началу третьего года величина вклада достигает 1 млн. рублей, то надо переходить на первую схему начисления для третьего и четвёртого годов. Если к началу третьего года величина вклада не достигает 1 млн. рублей, то надо оставаться на второй схеме начисления прибыли, а в начале четвёртого года провести анализ для выбора оптимальной схемы.

Нам предстоит последовательная проверка сформулированных версий, а критерием оптимальности стратегии будет данная величина максимальной прибыли в 417 967 рублей.

Рассмотрим **1 случай**: в конце первого года после начисления по второй схеме $S \to 1{,}05 \cdot S + a$, где a=50000 рублей, величина вклада превысила 1 млн. рублей, т.е. $1{,}05 \cdot S + a > 1000000 \Leftrightarrow S > 904761{,}9048$. Значит по соображениям оптимальности, на 2,3,4 годах выбираем первую схему: в конце четвёртого года величина вклада составит $(1{,}1)^3 \cdot (1{,}05 \cdot S + 50000)$, а величина прибыли будет: $(1{,}1)^3 \cdot (1{,}05 \cdot S + 50000) - S$, по условию она равна 417 967 рублям. Уравнение $(1{,}1)^3 \cdot (1{,}05 \cdot S + 50000) - S = 417967$ даёт корень S=883956,735 рублей, что противоречит условию $S > 904761{,}9048$. Т.е. в конце первого года вклад не превысил 1 млн. рублей. Значит пороговое значение в 1 млн. рублей достигается в конце второго года (или позже). Проверим вторую версию.

2 случай: в конце второго года после начисления по второй схеме $S \to 1{,}05 \cdot (1{,}05 \cdot S + a) + a = 1{,}05^2 \cdot S + 1{,}05 \cdot a + a$, где a=50000 рублей, величина вклада превысила 1 млн. рублей, т.е. выполнено неравенство: $1{,}05^2 \cdot S + 1{,}05 \cdot a + a > 1000000 \Leftrightarrow 1{,}05^2 \cdot S + 2{,}05 \cdot 50000 > 1000000 \Leftrightarrow 1{,}05^2 \cdot S > 897500 \Leftrightarrow$ $S > \dfrac{897500}{1{,}05^2} = 814058{,}9569$. Следовательно, в 3 и 4 годы для достижения оптимальной прибыли используется схема №1: $(1{,}1)^2 \cdot (1{,}05^2 \cdot S + 2{,}05 \cdot 50000) - S = 417967 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}334025 \cdot S = 417967 - 124025 \quad \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0{,}334025 \cdot S = 293942 \Leftrightarrow S = 880000$. Это значение S удовлетворяет необходимому условию $S > 814058{,}9569$.

Предлагаем читателю самостоятельно рассмотреть случай, когда только в конце третьего года после начисления по второй схеме $S \to 1{,}05 \cdot (1{,}05^2 \cdot S + 1{,}05 \cdot a + a) + a$, где a=50000 рублей, величина вклада

превысила 1 млн. рублей и возникла целесообразность перейти на схему №1.
Ответ: Иван положил на счёт 880000 рублей.

Задача 8.12. Виктор положил в банк некоторую сумму денег на 4 года. Перед началом каждого года он выбирает одну из двух возможных схем начисления прибыли в наступающем году: 1) к его вкладу прибавляется 20% от находящейся на счёте суммы; 2) к его вкладу прибавляется 10% от находящейся на счёте суммы и ещё 150 000 рублей. Известно, что по прошествии 4 лет Виктор может получить максимальную прибыль в 1430240 рублей, если будет оптимально выбирать схему начисления прибыли. Сколько рублей положил на счёт Виктор? Если возможны разные варианты, укажите хотя бы один. Ответ:1300000.

Задача 8.13. Финансовый консультант даёт рекомендации клиенту по оптимальному инвестиционному портфолио. Клиент хочет вложить средства (не более 25000 долларов)в два наименования акций крупных предприятий А и В. Цены за акцию предприятия А составляют 5 долларов, за акцию предприятия В – 3 доллара. Клиент уточнил, что хочет приобрести 6000 акций обоих наименований. По оценке консультанта прибыль от инвестиций в эти акции в следующем году составит: предприятие А – 1,1 доллара за акцию, предприятие В – 0,9 доллара за акцию. Сколько акций каждого предприятия следует купить клиенту (по совету консультанта), чтобы прибыль от инвестиций была максимальной? Ответ: 3500;2500.

Задача 8.14. Вкладчик положил две одинаковые суммы под r% годовых в банки «А» и «В». Через год условия в банке «А» изменились и он понизил годовую ставку до 10% годовых, а банк «В» оставил ставку на прежнем уровне. При каком наименьшем целом значении параметра r вклад в банке «В» через три года будет по крайней мере на 20% больше, чем вклад в банке «А»?Ответ: 21.

Задача 8.15. Вкладчик положил две одинаковые суммы под r% годовых в банки «А» и «В». Через год условия в банке «А» изменились и он понизил годовую ставку до 8% годовых, а банк «В» оставил ставку на прежнем уровне. При каком наименьшем целом значении параметра r вклад в банке «В» через три года будет по крайней мере на 16% больше, чем вклад в банке «А»? Ответ:17.

Задача 8.16. Брокер продавал акции на бирже, которая работает ежедневно. В первый день он продал 1 акцию за 99 рублей, во второй день продал 2 акции по 98 рублей, в третий – 3 акции по 97 рублей, и так далее, пока в последний день он продал 99 акций по 1 рублю. В

какой по счёту день его выручка была наибольшей; какую сумму денег брокер выручил в этот день; какую сумму он выручил от всей продажи?
Решение. Преобразуем искомую сумму:

$$1\cdot 99+2\cdot 98+3\cdot 97+\ldots+97\cdot 3+98\cdot 2+99\cdot 1=$$
$$=1\cdot(100-1)+2\cdot(100-2)+3\cdot(100-3)+\ldots+49\cdot(100-49)+50\cdot(100-50)+51\cdot(100-51)+\ldots$$
$$+(100-3)\cdot 3+(100-2)\cdot 2+(100-1)\cdot 1.$$

Раскрываем скобки и группируем совпадающие первую и последнюю, затем вторую и предпоследнюю и т.д. скобки, без пары будет центральное слагаемое 50*50, получаем:

$$=2\cdot\left((100-1)+(200-4)+(300-9)+\ldots+\left(4900-49^2\right)\right)+5000-50^2=$$
$$=2\left(\frac{100+4900}{2}\cdot 49-\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+49^2\right)\right)+2500=2\left(2500\cdot 49-\frac{49\cdot(49+1)\cdot(2\cdot 29+1)}{6}\right)=$$
$$=166650.$$

В преобразованиях использована формула суммы арифметической прогрессии и формула суммы квадратов первых n натуральных чисел, $\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}$, которая доказывается методом математической индукции. Ежедневная выручка в i-ый день вычисляется по формуле $i(100-i)$, эта величина достигает максимума при i=50, максимум равен 50*50 = 2500. Ответ: в 50-ый, 2500, 166650.

Задача 8.17. Брокер продавал акции на бирже, которая работает ежедневно. В первый день он продал 1 акцию за 999 рублей, во второй день продал 2 акции по 998 рублей, в третий – 3 акции по 997 рублей, и так далее, пока в последний день он продал 999 акций по 1 рублю. В какой по счёту день его выручка была наибольшей и какую сумму денег брокер выручил в этот день? Ответ: в 500-ый, 250 000, 166 666 650.

Задача 8.18. Борис Леонидович имеет годовой валютный вклад S под ставку d% годовых. Если вклад с начисленными процентами не будет востребован на дату окончания, договор считается пролонгированным (продлённым) ещё на один год. Годичная ставка по рублёвому депозиту (вкладу) составляет r% , курс доллара на дату начала возможной пролонгации равен K_0рублей, а прогнозируемый курс на дату её окончания - K_1 рублей. За перевод валютного вклада в рублёвый банк взимает комиссионные в рублях в размере $\alpha\%$переводимой суммы. 1) При этих данных получите условия, при которых целесообразно перевести валютный вклад S (на дату возможной пролонгации) в годовой рублёвый депозит. 2) Определите, что выгоднее: продлить валютный вклад или переложить деньги на рублёвый вклад, при условии, что K_0=63, K_1=64, d=9, r=12, $\alpha = 0{,}7$.Отв. 1) $K_0\left(1+\frac{r}{100}\right) > K_1\left(1+\frac{d}{100}\right)$;

2) выгоднее переложить деньги на рублёвый вклад.

Задача 8.19. Иван Васильевич планирует открыть вклад в банке на определённую сумму на 18 месяцев. Банк предлагает сделать валютный вклад в долларах под 4% годовых или рублёвый вклад под 17% годовых. Какому уловию должен удовлетворять прогнозируемый через 18 месяцев курс рубля к доллару K_1, чтобы более выгодным был рублёвый вклад, если на момент вклада курс составляет K_0=60 рублей за один доллар?

Задача 8.20. В малом предприятии «Сигма» в начале года имелось некоторое количество S денежных средств. В результате деятельности предприятия количество денежных средств в конце каждого месяца увеличивалось на 60%, но из-за нарушения разных нормативных актов в конце каждого месяца (после увеличения денежных средств) на предприятие «Сигма» накладывался штраф в размере 1000 рублей. Несмотря на это, через четыре месяца количество денежных средств предприятия составило 56 280 рублей. Сколько денежных средств в начале года было у предприятия «Сигма»? (Отв. 10 000).

Использованные источники:

1) И.В. Ященко, М.А. Волчкевич, И.Р. Высоцкий и др. ЕГЭ 2018-2021. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов типовых экзаменационных заданий. –М.:Экзамен,2017-2021.-232с.
2) И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий и др. ОГЭ 2018-2021. Математика. 50 вариантов типовых экзаменационных заданий. –М.:Экзамен,2017-2021.-278с.
3) Ф.Ф. Лысенко, С. Ю. Калабухов. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2017-2021. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов. –Ростов-на-Дону:Легион,2016-2021.-384 с.
4) В.В. Ткачук, Математика- абитуриенту.-М.: 2008.-1016с.
5) А.П. Иванов, Тесты и контрольные работы по математике.-М.:МФТИ,2002.-288с.
6) А.А.Максютин. Текстовые задачи экономического содержания: типология и приёмы решения. - Тренировочные материалы для подготовки к ЕГЭ2017г. – Самара,2017.-с.120-144.